Збірник праць Інституту математики НАН України 2016, т. 13, № 3, 174–190

УДК 531:383-62:50

Оптимальне керування лінійними майже консервативними системами

В.В. Новицький, М.О. Зінчук, О.П. Коломійчук, О.В. Тетерятник

Інститут математики НАН України, Київ;
Novyc@imath.kiev.ua, E.Teteryatnik@gmail.com

In this paper, discrete and continuous linear almost conservative systems with quadratic performance index are considered. The technique of constructing an optimal control based on the power series expansion of a matrix-solution of the Riccati equation is proposed. The results are demonstrated by illustrative examples.

В данной работе рассматриваются почти консервативные линейные непрерывные и дискретные системы управления с квадратичным критерием качества. Предлагается методика построения оптимального управления, основанная на разложении в степенной ряд матрицы-решения уравнения Риккати. Приводятся иллюстративные примеры.

1 Вступ

Протягом багатьох років проводяться дослідження оптимального керування механічними системами та, як важливий спеціальний випадок розглядають майже консервативні системи, вивчення яких й досі залишається актуальним, як моделей різноманітних керованих механічних систем (див., наприклад, [1–6]).

В [7] розглядалося оптимальне керування лінійними неперервними майже консервативними системами з матрицями коефіцієнтів консервативних частин в загальній формі, що не мають кратних власних значень, а в [8, 9] вивчалося оптимальне керування неперервними та дискретними майже консервативними системами, коли матриці консервативних частин задані в канонічній формі з довільними власними значеннями.

Нижче наведено відмінний від [7] підхід знаходження оптимального керування неперервними та дискретними лінійними майже консервативними системами з матрицями коефіцієнтів консервативних частин в загальній формі, що не містять кратних власних значень.

2 Оптимальне керування лінійними неперервними майже консервативними системами

Розглянемо лінійну неперервну керовану майже консервативну систему [7]

$$\dot{x} = (A_0 + \varepsilon A_1)x + \varepsilon Bu, \qquad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

де $x \in \mathbb{R}_{2n}$ — вектор стану, $A_0 = -A_0^T \in \mathbb{R}_{2n\times 2n}$ — кососиметрична невироджена матриця, $A_1 \in \mathbb{R}_{2n\times 2n}$ — довільна стала матриця, $u \in \mathbb{R}_m$ — вектор керування, $B \in \mathbb{R}_{2n\times m}$ — матриця при керуванні, $\varepsilon > 0$ — малий параметр.

Будемо шукати оптимальний регулятор для (1) у вигляді зворотного зв'язку за станом

$$u = -Kx, \tag{2}$$

що мінімізує квадратичний критерій якості

$$J = \int_0^\infty \left(x^T Q x + u^T R u\right) dt, \tag{3}$$

де $K \in \mathbb{R}_{m\times 2n}$ — деяка стала матриця, $0 < R \in \mathbb{R}_{m\times m}$, $0 < Q \in \mathbb{R}_{2n\times 2n}$ — додатно означені матриці.

Регулятор (2) буде оптимальним [10], якщо

$$K = \varepsilon R^{-1} B^T S, \tag{4}$$

де $S \in \mathbb{R}_{2n\times 2n}$ — симетрична додатно означена матриця-розв'язок матричного рівняння Ріккаті

$$(A_0 + \varepsilon A_1)^T S + S(A_0 + \varepsilon A_1) - \varepsilon^2 SBR^{-1}B^T S + Q = 0.$$

Введемо заміну [11] $P = \varepsilon S$, тоді наведене рівняння набуде вигляду

$$(A_0 + \varepsilon A_1)^T P + P(A_0 + \varepsilon A_1) - \varepsilon PBR^{-1}B^T P + \varepsilon Q = 0. \tag{5}$$

Виходячи з (5), матрицю-роз'вязок P будемо шукати у вигляді розкладу за параметром ε

$$P = P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \dots . \tag{6}$$

Матрицю Q зобразимо у вигляді подібного розкладу

$$Q = Q_0 + \varepsilon Q_1 + \varepsilon^2 Q_2 + \ldots . \tag{7}$$

На відміну від класичної постановки задачі, коли матриця Q задана конкретно, будемо вважати, що матриці $Q_0, \ \ldots, \ Q_s$ ($0 \leq s$ — деяке число) задані, причому $Q_0 + \varepsilon Q_1 + \ldots + \varepsilon^s Q_s > 0$, а симетричні матриці $Q_{s+1}, \ Q_{s+2}, \ \ldots$ будуть обчислені в процесі пошуку матриці зворотного зв'язку K. Хоч обчислені матриці вносять певні (незначні) корективи в заданий критерій якості, але дозволяють знайти точний розв'язок матричного рівняння Ріккаті (5) за скінченне число кроків за умови, що Q — додатно означена матриця [8].

Від параметричного матричного рівняння Ріккаті, підставляючи (6), (7) в (5) і зрівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε, приходимо до нескінченної системи матричних рівнянь типу Ріккаті

$$A_0 P_0 - P_0 A_0 = 0, \tag{8}$$

$$\begin{gathered}
A_0 P_1 - P_1 A_0 = P_0 A_1 + A_1^T P_0 - P_0 B R^{-1} B^T P_0 + Q_0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_0 P_k - P_k A_0 = P_{k-1} A_1 + A_1^T P_{k-1} - \\
- \sum_{i=1}^{k} P_{i-1} B R^{-1} B^T P_{k-i} + Q_{k-1}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{gathered} \tag{9}$$

Покажемо, що за деяких умов нескінченну систему рівнянь (9) можна розв'язати за скінченне число кроків.

Нехай на k-му кроці розв'язання системи (9) отримані додатно означені матриці $\sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i P_i, \ \sum_{i=0}^{k-1} \varepsilon^i Q_i, \ k > s$, де матриці Q_i, $i = s+1, \ldots, k-1$ вибираються з урахуванням розв'язності рівнянь (9). Тоді можна покласти $P_i = 0, \ i = k+1, \ k+2, \ \ldots$ і завершити процес обчислення матриці-розв'язку P, а матриці $Q_k, \ Q_{k+1}, \ \ldots$ обчислити за формулами

$$Q_k = \sum_{j=1}^{k+1} P_{j-1} B R^{-1} B^T P_{k+1-j} - P_k A_1 - A_1^T P_k,$$

$$Q_i = \sum_{j=1}^{i+1} P_{j-1} B R^{-1} B^T P_{i-j+1}, \quad i = k+1, \ldots, 2k, \tag{10}$$

$$Q_i = 0, \quad i = 2k+1,\ 2k+2, \ldots$$

і вони, у відповідності з (7), не вплинуть на означеність матриць $\sum_{i=0}^{k-1} \varepsilon^i Q_i$ та Q.

Рівняння (8) означає, що матриці A_0 і P_0 комутують. Будемо вважати, що A_0 є довільною невиродженою кососиметричною матрицею, яка не має кратних власних значень. Тоді матрицю P_0 можна зобразити у вигляді наступного розкладу [12]:

$$P_0 = \alpha_0 I_{2n} + \alpha_2 A_0^2 + \ldots + \alpha_{2(n-1)} A_0^{2(n-1)}, \tag{11}$$

де $\alpha_0, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2(n-1)}$ — вільні параметри. Тут I_{2n} — одинична матриця розміру $2n$.

В [8] показано, що для розв'язності системи (9) (A_0 кососиметрична канонічної форми) права частина рівнянь має задовольняти певні умови, за допомогою яких обчислюються значення вільних параметрів матриць P_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$. Знайдемо подібні умови в нашому випадку. Для цього перейдемо до еквівалентного рівняння, матриця коефіцієнтів якого має розмір $4n^2$. Це можна зробити через прямий добуток [13, теорема 8.4.1, с.239].

Позначимо через D_i праву частину i-го рівняння, а через $D_{i,l*}$, $P_{i,l*}$ — l-ті рядки відповідно матриць D_i, P_i. Отримаємо наступну систему рівнянь:

$$\breve{A}\theta_i = \xi_i, \ \ i = 1, 2, \ldots, \tag{12}$$

де

$$\breve{A} = A_0 \otimes I_{2n} - I_{2n} \otimes A_0^T, \quad \theta_i = [P_{i,1*}, \ldots, P_{i,2n*}]^T,$$

$$\xi_i = [D_{i,1*}, \ldots, D_{i,2n*}]^T, \quad \breve{A} \in \mathbb{R}_{4n^2 \times 4n^2}, \quad \theta_i, \xi_i \in \mathbb{R}_{4n^2}.$$

Тут $\otimes$ — символ прямого добутку. Симетричність матриць P_i з розв'язків θ_i забезпечуємо за допомогою вільних параметрів.

Отже, якщо виконуються рівності (необхідні та достатні умови)

$$\mathrm{rank}\,\breve{\mathrm{A}} = \mathrm{rank}\left[\breve{\mathrm{A}}, \mathrm{\xi_i}\right], \ \ \mathrm{i} = 1, 2, \ldots, \tag{13}$$

то рівняння (12) мають розв'язки. Звідси випливає, що матриці $\breve{A}$ і $\left[\breve{A}, \xi_i\right]$ мають спільний нуль-простір.

Матриця $\breve{A}$ має власні значення $\lambda_k - \lambda_j$ [13, с.238], де λ_k, λ_j, $k, j \in \{\overline{1, 2n}\}$ — власні значення матриці A_0, звідки $2n$ із них є нульовими. Нехай вектор $\gamma \in \mathbb{R}_{4n^2}$ є загальним розв'язком системи рівнянь

$$\breve{A}\gamma = 0, \tag{14}$$

тобто він описує нуль-простір матриці $\breve{A}$. Із властивостей прямого добутку отримуємо

$$(\breve{A})^T = A_0^T \otimes I_{2n} - I_{2n} \otimes (A_0^T)^T = -A_0 \otimes I_{2n} - I_{2n} \otimes \left(-A_0^T\right) = -\breve{A},$$

тобто матриця $\breve{A}$ — кососиметрична, тому для вектора γ з (14) вірна рівність $(\breve{A})^T\gamma = 0$. Вектор γ має довільні сталі, за допомогою яких можна отримати довільний вектор нуль-простору матриці $\breve{A}$. Тому з (13) і (14) випливає такий факт: якщо помножимо зліва обидві частини рівнянь (12) на ненульовий транспонований вектор γ^T, то отримаємо нульові тотожності (довільні сталі матимуть нульові коефіцієнти) тоді тільки тоді, коли рівняння мають розв'язки.

Таким чином, необхідні та достатні умови розв'язності i-го рівняння визначає рівність

$$(\gamma, \xi_i) = 0. \tag{15}$$

Для виконання (15) і обчислення значень вільних параметрів матриці P_{i-1} в скалярному добутку (γ, ξ_i) необхідно прирівняти до нуля коефіцієнти при довільних сталих.

Відзначимо наступне: оскільки матриця P_0 задовольняє рівняння (8), що еквівалентно (14), то вектор γ можна сформувати за розкладом (11) з меншою кількістю довільних сталих

$$\gamma = [P_{\delta,1*}, \ldots, P_{\delta,2n*}], \ \ P_\delta = \delta_1 I_{2n} + \delta_2 A_0^2 + \ldots + \delta_n A_0^{2(n-1)}, \tag{16}$$

де δ_i, $i = \overline{1,n}$ — довільні сталі. Але вектор γ, сформований за (16), не в усіх випадках (через меншу кількість довільних сталих) може давати розв'язність (12) за допомогою (15).

Перше рівняння системи (9) нелінійне відносно матриці P_0, а інші рівняння лінійні відносно матриць P_i, $i > 0$, що мають вільні параметри. Підставимо в праву частину першого рівняння системи (9) розклад для P_0 отримаємо

$$\begin{aligned} D_1 = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{2j} A_0^{2j} A_1 + A_1^T \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{2j} A_0^{2j} - \\ - \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{2j} A_0^{2j} B R^{-1} B^T \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{2j} A_0^{2j} + Q_0 \end{aligned}$$

або [14]

$$D_1 = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{2j} (A_0^{2j} A_1 + A_1^T A_0^{2j}) - \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_{2j} \alpha_{2l} A_0^{2j} B R^{-1} B^T A_0^{2l} + Q_0,$$

тобто для $i = 1$ в рівнянні (15) коефіцієнти при довільних сталих вектора γ будуть нелінійними відносно параметрів розкладу (11), а для інших рівнянь — лінійні відносно вільних параметрів відповідних матриць.

З рівнянь (12) при відомій правій частині отримуємо матрицю P_i з вільними параметрами. Для спрощення розв'язання цих рівнянь матрицю $\breve{A}$ можна звести до верхнього трикутного вигляду за допомогою лівих елементарних операцій [15, с.126], яким відповідають матриці $S_1, S_2, \ldots, S_l$. Далі покладаємо $S = S_l S_{l-1} \cdots S_1$ і приходимо до наступної системи рівнянь:

$$S\breve{A}\theta_i = S\xi_i, \;\; i = 1, 2, \ldots, \tag{17}$$

де елементи вектора θ_i обчислюються достатньо просто, починаючи з нижніх. Симетричність матриці P_i узгоджуємо за допомогою частини з $2n$ вільних параметрів, достатня кількість яких випливає з розв'язності i-го рівняння системи (9).

Відзначимо ще одну властивість вектора γ. За допомогою нього легко можна знайти номери лінійно залежних (незалежних) стовпців матриці $\breve{A}$. Позначимо $c = [c_1, c_2, \ldots, c_{2n}]^T$ вектор, який ставить у відповідність номери стовпцям матриці $\breve{A}$. Тоді в коефіцієнти при довільних сталих вектора γ скалярного добутку (γ, c) входитимуть номери лінійно залежних (в сукупності, ланцюжків) стовпців. Лінійно залежними стовпцями матриці $\breve{A}$ будуть номери, які належать тільки одному з коефіцієнтів. Число таких номерів дорівнює числу коефіцієнтів, тобто розмірності нуль-простору матриці $\breve{A}$.

Наведений вище підхід опишемо у вигляді наступного алгоритму.

1. Формування матриці P_0 у вигляді (11).

2. Обчислення матриці $\breve{A} = A_0 \otimes I_{2n} - I_{2n} \otimes A_0^T$.

3. Побудова загального розв'язку рівняння (14). Покласти $k = 1$, а максимальне число кроків рівним N.

4. Знаходження вільних параметрів матриці P_{k-1} із (15). Якщо $k < N$, то перейти до п.5. Якщо $k = N$, то покласти $P_i = 0$, $i = k, k+1, \ldots$, а Q_i обчислити за формулами (10).

5. Знаходження θ_k з (12) або (17). Формування симетричної матриці P_k з вектора θ_k.

6. Збільшення k на 1 та перехід до п.4.

Приклад 2.1. Побудуємо оптимальний регулятор для системи (1)–(4) з такими матрицями

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix},\ A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T,\ Q_0 = I_4,\ R = I_2,\ K \in \mathbb{R}_{2\times 4}.$$

Матриця A_0 має різні власні значення $\lambda_{1,2} = \pm 2.828427125i$, $\lambda_{3,4} = \pm 1.414213562i$, тому для пошуку оптимального регулятора можна застосувати підхід, наведений вище. Запишемо нульове наближення у вигляді розкладу (11) $P_0 = \alpha_0 I_{2n} + \alpha_2 A_0^2$. З рівняння (14) знаходимо вектор γ

$$\gamma = [\delta_3, \delta_4, \delta_2, \delta_1, -\delta_4, \delta_3 - \delta_1, 0, \delta_4, -\delta_2, 0, \delta_1 + \delta_3, -\delta_2, \delta_1, -\delta_4, \delta_2, \delta_3]^T.$$

Обчислюємо матрицю D_1, формуємо вектор ξ_1 і в скалярному добутку прирівнюємо до нуля коефіцієнти при довільних сталих δ_i, $i = \overline{1,4}$. Отримуємо наступні рівняння (два з коефіцієнтів тотожно дорівнюють нулю)

$$\begin{aligned} -18\alpha_2 + 6\alpha_2(\alpha_0 - 5\alpha_2) + (\alpha_0 - 2\alpha_2)^2 = 0, \\ -(\alpha_0 - 2\alpha_2)^2 + 4 + 6\alpha_0 - 30\alpha_2 - 9\alpha_2^2 - (\alpha_0 - 5\alpha_2)^2 = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

З системи нелінійних рівнянь (18) знаходимо один із розв'язків: $\alpha_0 = 1/3 - 1/3\sqrt{13} + 4/9\sqrt{21}$, $\alpha_2 = -1/3 - 1/6\sqrt{13} + +1/18\sqrt{21}$ і за розкладом (11) будуємо матрицю

$$P_0 = \begin{bmatrix} 2 + \frac{\sqrt{13}}{2} + \frac{\sqrt{21}}{6} & 0 & 0 & 1 + \frac{\sqrt{13}}{2} - \frac{\sqrt{21}}{6} \\ 0 & 1 + \frac{\sqrt{21}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 + \sqrt{13} & 0 \\ 1 + \frac{\sqrt{13}}{2} - \frac{\sqrt{21}}{6} & 0 & 0 & 2 + \frac{\sqrt{13}}{2} + \frac{\sqrt{21}}{6} \end{bmatrix},$$

власні значення якої дорівнюють $\lambda_{1,2} = 2.527525232$, $\lambda_{3,4} = 6.605551276$, тобто $P_0 > 0$.

Далі з рівняння (12) знаходимо перше наближення матриці-розв'язку P

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 5.637411987 & 1.324830392 & 0 \\ 5.637411987 & 0 & 0 & 2.943220088 \\ 1.324830392 & 0 & 0 & -1.074830392 \\ 0 & 2.943220088 & -1.074830392 & 0 \end{bmatrix},$$

врахувавши симетричність матриці за допомогою частини вільних параметрів, а решту покладаємо рівними нулю. За формулами (10) обчислюємо елементи розкладу Q

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0.0 & 10.63806196 & 7.758400412 & 0.0 \\ 10.63806196 & 0.0 & 0.0 & 18.21744116 \\ 7.758400412 & 0.0 & 0.0 & 3.127846858 \\ 0.0 & 18.21744116 & 3.127846858 & 0.0 \end{bmatrix},$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 31.78041391 & 0.0 & 0.0 & 16.5921442 \\ 0.0 & 8.662544486 & -3.163462401 & 0.0 \\ 0.0 & -3.163462401 & 1.155260372 & 0.0 \\ 16.5921442 & 0.0 & 0.0 & 8.662544486 \end{bmatrix}.$$

З побудови випливає, що знайдений розв'язок P, Q задовольняє матричне рівняння Ріккаті (5).

Наприклад, при $\varepsilon = .04$ маємо $P > 0,\ \ Q > 0$, а оптимальний регулятор $K = R^{-1}B^T(P_0 + \varepsilon P_1)$ і функціонал J такі:

$$K = \begin{bmatrix} 0.2254964794 & 2.527525232 & 0.0 & 0.1177288035 \\ 2.039013022 & 0.1177288035 & -0.0429932157 & 4.566538254 \end{bmatrix},$$

$$J = \int_0^\infty \left(x^T[Q_0 + .04Q_1 + .0016Q_2]x + u^T R u\right) dt.$$

Матриця замкненої системи має вигляд

$$A_0 + \varepsilon(A_1 - BK) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0.04 & 1.0 & -2.0 & 0.0 \\ -1.009019859 & -0.101101009 & -0.08 & 0.995290848 \\ 2.0 & 0.12 & 0.0 & 2.0 \\ -0.081560521 & -1.004709152 & -1.998280271 & -0.10266153 \end{bmatrix}$$

з такими власними значеннями:

$$\lambda_{1,2} = -.036450216 \pm 2.8303275i,\ \ \lambda_{3,4} = -.045431054 \pm 1.4130169i,$$

тобто система (1)–(4) за допомогою знайденого оптимального регулятора стабілізована.

3 Оптимальне керування лінійними дискретними майже консервативними системами

В цьому параграфі будемо досліджувати дискретну керовану майже консервативну систему з керуванням лінійно залежним від стану системи і оптимальним в квадратичному сенсі.

Розглянемо дискретну лінійну стаціонарну керовану майже консервативну систему [9, 16]

$$x(k+1) = (F_0 + \varepsilon F_1)x(k) + \varepsilon G u(k), \quad x(0) = x_0, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{19}$$

де $x \in \mathbb{R}_n$ — вектор стану, F_0 — ортогональна матриця $\left(F_0^T F_0 = F_0 F_0^T = I\right)$, $F_1 \in \mathbb{R}_{n\times n}$ — довільна стала матриця, $u(k) \in \mathbb{R}_m$ — вектор керування, $G \in \mathbb{R}_{n\times m}$ — матриця при керуванні, $\varepsilon > 0$ — малий параметр.

Поставимо задачу побудови оптимального регулятора у вигляді зворотного зв'язку за станом

$$u(k) = -Hx(k), \tag{20}$$

що мінімізує квадратичний критерій якості

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \left[x^T(k)Qx(k) + u^T(k)Ru(k)\right], \tag{21}$$

де $H \in \mathbb{R}_{m\times n}$ — деяка стала матриця, $R \in \mathbb{R}_{m\times m}$, $Q \in \mathbb{R}_{n\times n}$ — додатно означені матриці.

Регулятор (20) буде оптимальним [17], якщо

$$H = \varepsilon(\varepsilon^2 G^T S G + R)^{-1} G^T S F, \tag{22}$$

де $F = F_0 + \varepsilon F_1$, а $S \in \mathbb{R}_{n\times n}$ — симетрична додатно означена матриця-розв'язок матричного рівняння Ріккаті

$$S = F^T S F - \varepsilon^2 F^T S G(\varepsilon^2 G^T S G + R)^{-1} G^T S F + Q. \tag{23}$$

Для спрощення розв'язання рівняння (23), введемо заміну $P = \varepsilon S$, тоді прийдемо до наступного рівняння:

$$P = F^T P F - \varepsilon F^T P G(\varepsilon G^T P G + R)^{-1} G^T P F + \varepsilon Q. \tag{24}$$

Будемо шукати матрицю-роз'язок P у вигляді розкладу за малим параметром (6) і нехай матриця Q представлена подібним чином (7). Збіжність рядів (6), (7) випливає з існування розв'язку матричного рівняння Ріккаті (23) та достатньої малості параметра ε.

Аналогічно неперервному випадку будемо вважати, що матриці $Q_0, \ \ldots, \ Q_s$ $(s \geq 0)$ задані, причому $Q_0 + \varepsilon Q_1 + \ldots + \varepsilon^s Q_s > 0$, а симетричні матриці $Q_{s+1}, \ Q_{s+2}, \ \ldots$ будуть обчислені або покладені рівними нулю в процесі пошуку матриці зворотного зв'язку H.

Для спрощення рівняння (24), застосуємо відомий спосіб обчислення оберненої матриці $(\varepsilon G^T P G + R)^{-1} = M$ шляхом розкладу її у збіжний ряд за малим параметром [9, 13]

$$M = M_0 + \varepsilon M_1 + \varepsilon^2 M_2 + \ldots, \tag{25}$$

де $M_0, \ M_1, \ M_2, \ \ldots$ — деякі симетричні матриці.

Із властивості оберненої матриці випливає рівність

$$\left[\varepsilon G^T (P_0 + \varepsilon P_1 + \ldots) G + R\right] (M_0 + \varepsilon M_1 + \ldots) = I. \tag{26}$$

Зрівнюючи коефіцієнти при однакових степенях малого параметра, приходимо до системи рівнянь

$$\begin{gathered} RM_0 = I, \\ RM_1 + G^T P_0 G M_0 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ RM_i + \sum_{k=1}^{i} G^T P_k G M_{i-1-k} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

Звідки знаходимо невідомі матриці M_i

$$M_0 = R^{-1}, \quad M_i = -R^{-1} \sum_{k=1}^{i} G^T P_{k-1} G M_{i-k}, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{27}$$

Підставимо вирази для матриць $F, \ P, \ Q, \ M$ в (24) отримаємо рівняння

$$\begin{gathered} (P_0 + \varepsilon P_1 + \ldots) = (F_0 + \varepsilon F_1)^T (P_0 + \varepsilon P_1 + \ldots)(F_0 + \varepsilon F_1) - \\ -\varepsilon (F_0 + \varepsilon F_1)^T (P_0 + \varepsilon P_1 + \ldots) G (M_0 + \varepsilon M_1 + \ldots) G^T \times \end{gathered}$$

$$\times (P_0 + \varepsilon P_1 + \ldots)(F_0 + \varepsilon F_1) + \varepsilon(Q_0 + \varepsilon Q_1 + \ldots). \qquad (28)$$

Зрівняємо коефіцієнти в (28) при однакових степенях ε прийдемо до нескінченної системи матричних рівнянь типу Ріккаті

$$P_0 - F_0^T P_0 F_0 = 0, \qquad (29)$$

$$P_1 - F_0^T P_1 F_0 = F_1^T P_0 F_0 + F_0^T P_0 F_1 - F_0^T P_0 G M_0 G^T P_0 F_0 + Q_0,$$

....

$$P_i - F_0^T P_i F_0 = F_1^T P_{i-1} F_0 + F_0^T P_{i-1} F_1 -$$
$$- \sum_{(k,j,q,l,t)\in J(i)} F_k^T P_j G M_q G^T P_l F_t + Q_{i-1}, \qquad (30)$$

....

Тут $J(i) = \{(k,j,q,l,t)\,|k + j + q + l + t = i - 1;\ \ k,t \in \{0,1\};$ $j,q,l \in \{\overline{0,i-1}\}\}$ — множини індексів, $i = 1,2,\ldots$.

З рівняння (29) випливає, що нульове наближення P_0 матриці-розв'язку P комутує з ортогональною матрицею F_0. Дійсно, помножимо зліва обидві частини (29) на невироджену матрицю F_0 отримаємо $F_0P_0 - P_0F_0 = 0$. В якості P_0 ми шукаємо симетричну додатно означену матрицю. Таких матриць нескінченна множина, а вибрати конкретну матрицю з цієї множини можна, розв'язавши перше рівняння системи (30). Рівняння (30) мають таку структуру, що дозволяють послідовно знаходити невідомі матриці $P_i,\ i = 0,1,2,\ldots$.

Будемо вважати, що ортогональна матриця F_0 не має кратних власних значень, тоді переставну з нею матрицю P_0 можна зобразити у вигляді наступного розкладу [12]:

$$P_0 = \alpha_0 I_n + \alpha_1 F_0 + \ldots + \alpha_{n-1} F_0^{n-1}, \qquad (31)$$

де $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ — деякі невідомі коефіцієнти.

Знайдемо умови, яким має відповідати права частина рівнянь (30), щоб вони мали розв'язок. Для цього перейдемо до еквівалентного рівняння, матриця коефіцієнтів якого має розмір n^2 і зробимо це через прямий добуток.

Позначимо через D_i праву частину i-го рівняння системи (30), а через $D_{i,l*}$, $P_{i,l*}$ — l-ті рядки відповідно матриць D_i, P_i. Отримаємо наступну еквівалентну систему рівнянь:

$$\breve{F}\theta_i = \xi_i, \ \ i = 1,2,\ldots, \qquad (32)$$

де

$$\breve{F} = I_n \otimes I_n - F_0^T \otimes F_0^T, \quad \theta_i = [P_{i,1*}, \ldots, P_{i,n*}]^T,$$

$$\xi_i = [D_{i,1*}, \ldots, D_{i,n*}]^T, \quad \breve{F} \in \mathbb{R}_{n^2 \times n^2}, \quad \theta_i, \xi_i \in \mathbb{R}_{n^2}.$$

Симетричності матриць P_i з розв'язків θ_i досягаємо за допомогою вільних параметрів.

Отже, якщо виконуються рівності

$$\mathrm{rank}\,\breve{\mathrm{F}} = \mathrm{rank}\left[\breve{\mathrm{F}}, \xi_{\mathrm{i}}\right], \quad \mathrm{i} = 1, 2, \ldots, \tag{33}$$

тобто матриці обох частин рівностей (33) мають спільний нуль-простір, то рівняння (32) розв'язні.

Матриця $F_0^T \otimes F_0^T$ має власні значення $\lambda_l \lambda_j$ [13, с.238], де λ_l, λ_j, $l, j \in \{\overline{1, n}\}$ — власні значення матриці F_0, тобто n власних значень матриці $\breve{F}$ є нульовими, тому що $\lambda_l \bar{\lambda}_l = 1$, $l \in \{\overline{1, n}\}$. Тут $\bar{\lambda}_l$ — комплексно-спряжене власне значення. Нехай вектор $\gamma \in \mathbb{R}_{n^2}$ є загальним розв'язком системи рівнянь

$$\breve{F}\gamma = 0. \tag{34}$$

Знайдений вектор описує нуль-простір матриці $\breve{F}$. Покажемо, що також виконується рівність

$$(\breve{F})^T \gamma = 0. \tag{35}$$

Із властивостей прямого добутку маємо

$$(F_0^T \otimes F_0^T)^T (F_0^T \otimes F_0^T) = (F_0 F_0^T) \otimes (F_0 F_0^T) = I_{n^2},$$
$$(F_0^T \otimes F_0^T)(F_0^T \otimes F_0^T)^T = (F_0^T F_0) \otimes (F_0^T F_0) = I_{n^2},$$

тобто матриця $F_0^T \otimes F_0^T$ ортогональна. Домножимо зліва (35) на дану ортогональну матрицю отримаємо

$$(F_0^T \otimes F_0^T)(\breve{F})^T \gamma = (F_0^T \otimes F_0^T - I_n \otimes I_n)\gamma = -\breve{F}\gamma = 0,$$

звідки $(\breve{F})^T \gamma = \gamma^T \breve{F} = 0$. Аналогічно неперервному випадку домножимо обидві частини рівнянь (32) на ненульовий транспонований вектор γ^T і отримаємо нульові тотожності тоді і тільки тоді, коли рівняння мають розв'язки.

Таким чином, вільні параметри матриць $P_{i-1},\ i = 1, 2, \ldots$ можна визначати з необхідних та достатніх умов розв'язності i-х рівнянь, а саме з рівностей

$$(\gamma, \xi_i) = 0. \tag{36}$$

Оскільки вектор γ має довільні сталі, то для обчислення значень вільних параметрів матриці P_{i-1} в скалярному добутку (γ, ξ_i) прирівнюємо до нуля коефіцієнти при цих довільних сталих і, з утвореної системи рівнянь, знаходимо значення параметрів.

Укажемо на те, що вектор γ можна сформувати з розкладу (31)

$$\gamma = [P_{\delta,1*}, \ldots, P_{\delta,n*}], \ \ P_\delta = \delta_1 I_n + \delta_2 F_0 + \ldots + \delta_n F_0^{n-1}, \tag{37}$$

де δ_i, $i = \overline{1,n}$ — довільні сталі. Якщо число довільних сталих зменшити, задовольнивши симетричність $P_\delta = P_\delta^T$, то рівність (36) не в усіх випадках буде визначати розв'язність i-го рівняння (32).

Перше рівняння системи (30) нелінійне відносно матриці P_0. Підставивши в праву частину першого рівняння розклад для P_0, отримаємо

$$D_1 = F_1^T \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j F_0^j F_0 + F_0^T \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j F_0^j F_1 - \\ - F_0^T \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j F_0^j G M_0 G^T \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j F_0^j F_0 + Q_0$$

або [14]

$$D_1 = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j (F_1^T F_0^j F_0 + F_0^T F_0^j F_1) - \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_j \alpha_l F_0^T F_0^j G M_0 G^T F_0^l F_0 + Q_0,$$

тобто в коефіцієнти при довільних сталих вектора γ рівняння (36) $(i = 1)$ параметри $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$ входитимуть в нелінійній формі. Для інших рівнянь вільні параметри відповідних матриць в коефіцієнти входять лінійно.

Перейдемо до обчислення матриці P_i з вільними параметрами. Аналогічно неперервним системам за допомогою лівих елементарних операцій над многочленними матрицями $\breve{F}$ можна звести до верхнього трикутного вигляду. Нехай верхня трикутна матриця виходить з матриці $\breve{F}$ за допомогою лівих елементарних операцій, які відповідають матрицям $S_1, S_2, \ldots, S_l$. Тоді за допомогою матриці перетворення

$S = S_l S_{l-1} \cdots S_1$ переходимо до спрощеної системи рівнянь

$$S\check{F}\theta_i = S\xi_i, \quad i = 1, 2, \dots . \tag{38}$$

З рівнянь (38) вектор θ_i знаходиться достатньо просто шляхом обчислення невідомих елементів знизу вгору. Симетричність матриці P_i узгоджуємо за допомогою частини з n вільних параметрів.

Алгоритм обчислення матриці-розв'язку рівняння Ріккаті (24) аналогічний алгоритму для неперервних систем, але в дискретному випадку можна отримати тільки наближений розв'язок.

Приклад 3.1. Побудуємо оптимальний регулятор для системи (19) – (22) з такими матрицями

$$F_0 = \begin{bmatrix} -\frac{2\sqrt{15}}{15} & -\frac{\sqrt{10}}{5} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{15}}{15} & -\frac{\sqrt{10}}{10} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{15}}{15} & -\frac{\sqrt{10}}{10} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{15}}{5} & -\frac{\sqrt{10}}{5} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ F_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \ Q_0 = I_4, \ R = I_2, \ H \in \mathbb{R}_{2\times 4}.$$

Матриця F_0 має різні власні значення $\lambda_{1,2} = .9210727584 \pm$ $\pm .3893905156i$, $\lambda_{3,4} = -.9838321405 \pm .1790930460i$, тому для пошуку оптимального регулятора можна застосувати підхід, наведений вище. Зобразимо нульове наближення у вигляді розкладу $P_0 = \alpha_0 I_n + \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_1^2 + \alpha_3 F_1^3$ і з рівності $P_0^T = P_0$ знаходимо залежність між вільними параметрами $\alpha_1 = -2/15\sqrt{30}\alpha_3 - \alpha_3 -$ $-2/5\sqrt{5}\alpha_3$, $\alpha_2 = -1/2\sqrt{2}\alpha_3 + 2/15\sqrt{15}\alpha_3 + 1/10\sqrt{10}\alpha_3$. З рівняння (34) знаходимо вектор γ. Через громіздкість в явному вигляді його не наводимо. Обчислюємо матрицю D_1, формуємо вектор ξ_1 і в скалярному добутку (γ, ξ_1) прирівнюємо до нуля коефіцієнти при довільних сталих. Отримуємо наступні незалежні рівняння для визначення параметрів α_0, α_3:

$$\begin{aligned} 15.61984500\alpha_0 - 22.39958669\alpha_3^2 - 6.701970448\alpha_0^2 + 11.44058324+ \\ +37.93586151\alpha_3 - 30.16610332\alpha_0\alpha_3 = 0, \\ -7.201572752\alpha_3^2 + 5.654225979\alpha_0 + 4. - .6399412480\alpha_3- \\ -2.\alpha_0^2 - .7628360030\alpha_0\alpha_3 = 0. \end{aligned} \tag{39}$$

З системи нелінійних рівнянь (39) знаходимо один із розв'язків: $\alpha_0 = 3.459052383$, $\alpha_3 = -.2412704158$ і за розкладом (31) будуємо матрицю

$$P_0 = \begin{bmatrix} 3.240153334 & -0.214888563 & -0.062295754 & 0.326184800 \\ -0.214888563 & 3.336743538 & -0.246900352 & -0.29189035 \\ -0.062295754 & -0.246900352 & 3.830544242 & -0.13929754 \\ 0.326184800 & -0.291890349 & -0.139297540 & 3.489336348 \end{bmatrix},$$

власні значення якої дорівнюють $\lambda_{1,2} = 3.014597169$, $\lambda_{3,4} = = 3.933791563$, тобто $P_0 > 0$.

Далі з першого рівняння системи (30) знаходимо перше наближення матриці-розв'язку P

$$P_1 = \begin{bmatrix} 22.34733765 & 5.365413683 & -0.395008501 & -1.113513221 \\ 5.365413683 & 6.999809995 & 11.05559507 & -17.51995097 \\ -0.395008501 & 11.05559507 & -6.999809995 & -1.789541488 \\ -1.113513221 & -17.51995097 & -1.789541488 & 16.94572418 \end{bmatrix}.$$

Наприклад, при $\varepsilon = .1$ маємо $P > 0$, $Q > 0$ і оптимальний регулятор

$$H = (\varepsilon G^T(P_0 + \varepsilon P_1)G + R)^{-1} G^T(P_0 + \varepsilon P_1)(F_0 + \varepsilon F_1)$$

такий:

$$H = \begin{bmatrix} -1.299181545 & -0.5012362228 & -1.766854996 & -1.807127737 \\ 2.870457236 & -1.880327207 & -0.189222113 & 0.7717162978 \end{bmatrix},$$

а матриця замкненої системи має вигляд

$$F_0 + \varepsilon(F_1 - GH) =$$

$$= \begin{bmatrix} -0.516397779 & -0.732455532 & 0.0 & 0.677350269 \\ 0.071719265 & -0.266104144 & -0.730421281 & -0.396637496 \\ -0.258198890 & -0.116227766 & 0.707106781 & -0.677350269 \\ 0.587550946 & -0.444422811 & -0.281077789 & -0.0771716298 \end{bmatrix},$$

власні значення якої $\lambda_{1,2} = .7917173248 \pm .3386625833i$, $\lambda_{3,4} = -.8680007107 \pm .2163971358i$ за модулем менші одиниці.

Таким чином, система (19)–(22) за допомогою знайденого оптимального регулятора стабілізована з точністю до першого наближення.

[1] *Понтрягин Л.С., В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко* Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1961. — 384 с.

[2] *Politi A., Oppo G.L., and Badii R.* Coexistence of conservative and dissipative behavior in reversible dynamical systems // Phys. Rev. A — Vol. 33, 4055. — 1986.

[3] *Кузнецов А.П., Савин Д.В.*Консервативные и почти консервативные осцилляторы и их модели. //Материалы XIII зимней школы по СВЧ электронике и радиофизике. — Саратов: Издательство ГосУНЦ «Колледж», 2006. — С.85-86.

[4] *Новицький В. В.* Дослідження майже консервативних систем. //Зб. наукових праць відділу прикладного нелінійного аналізу ННК "ІПСА"НТУУ "КПІ".Вип.1 — ТОВ "Спринт-сервис". 2013. №1.— С.112-119.

[5] *Тетерятник О. В.* Дослідження двох звязаних керованих осциляторів / Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2013. 10, №3.— С.191-200.

[6] *Тетерятник О. В.* Аналітичний вираз оптимального керування для системи двох зв'язаних керованих майже консервативних осциляторів // Зб. праць Ін-ту математики НАН України.— 2014. т.11, №5.— С.231-239.

[7] *Новицкий В.В., Хуан Чень* Оптимальное управление почти консервативными системами.//Зб. праць Ін-ту математики НАН України.— 2004. т.1, № 2.— С.152-157.

[8] *Зінчук М.О., Новицький В.В.* Оптимальне керування неперервними майже консервативними системами.// Зб. праць Ін-ту математики НАН України.— 2006. т.3, №1.— С. 75-89.

[9] *Зінчук М.О., Новицький В.В.* Оптимальне керування дискретними майже консервативними системами.// Зб. праць Ін-ту математики НАН України.— 2008. т.5, №2.— С.124-140.

[10] *Barnett S., Cameron R.G.* Introduction to Mathematical Control Theory, Second Edition.— Oxford: Clarendon press. 1985.— 404 p.

[11] *Ларин В.Б.* О слабом управлении слабодемпфированными системами. //Прикл. математика и механика.— 1978. т. 42. вып.6.— С. 1000-1006.

[12] *Прасолов В.В.* Задачи и теоремы линейной алгебры.— М.: Наука. 1996.— 304 с.

[13] *Ланкастер П.* Теория матриц.— М.: Наука, 1978.— 280с.

[14] *Кнут Д.* Искусство программирования для ЭВМ. Т1. Основные алгоритмы.— М.: Мир, 1976.— 736с.

[15] *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц.— М.: Наука. 1988.— 552с.

[16] *Ларин В.Б., Науменко К.И.* Слабое дискретное управление слабодемпфированными системами. В кн. Навигация и управление движением механических систем.— Киев, 1980.— С.90-100.

[17] *Стрейц В.* Метод пространства состояний в теории дискретных линейных систем управления.— М.: Наука, 1985.— 296с.