Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, том 12, № 1, 8–21

УДК 517.98

Е.Н. Ашурова, В.Л. Островський

(Інститут математики НАН України, Київ)

Про зображення “all but two” алгебр

work1991@ukr.net, vo@imath.kiev.ua

In this paper, we study representations of the $*$-algebra generated by two projections $P_1 \perp P_2$ and n more projections $Q_1 + \cdots + Q_n = I$.

У даній роботі ми вивчаємо зображення $*$-алгебри, породженої двома проекторами $P_1 \perp P_2$ та ще n проекторами $Q_1 + \cdots + Q_n = I$.

Вступ

У ряді робіт з теорії інтегральних операторів (див, наприклад, [1] та наведену там бібліографію) вивчаються властивості C^*-алгебри, породженої наборами отропроекторів $P, Q_1, \ldots, Q_n$ у деякому гільбертовому просторі H, які задовольняють співвідношення $Q_1 + \cdots + Q_n = I$, а також більш загальними наборами, ортопроекторів $P_1, \ldots, P_m, Q_1, \ldots, Q_n$ в H, які задовольняють співвідношення

$$P_j \perp P_k, \quad k \neq j, \qquad Q_1 + \cdots + Q_n = I \tag{1}$$

(див. [2, 3]). У наведених роботах вивчались властивості C^*-алгебри, породженої незвідними наборами ортопроекторів, для яких образ проектора P чи образи проекторів $P_1, \ldots, P_m$ є одновимірними просторами. Саме такі набори виникають у конкретних реалізаціях локальних алгебр, пов'язаних з операторами Тепліца з кусково гладенькими символами. Зокрема, показано, що відповідна C^*-алгебра вкладається в алгебру неперервних матричнозначних функцій на певній множині параметрів. У випадку $m = 1$ множина параметрів $c_1, \ldots, c_n$, що індексують незвідні зображення, є симплексом

$$c_1 + \cdots + c_n = 1, \quad c_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

і розклад довільного зображення на незвідні задається спектральним розкладом відповідного комутативного набору самоспряжиних операторів $C_1, \ldots, C_n$.

Проте при $m \geq 2$ подібного опису множини, що параметризує незвідні зображення, наведено не було. Дослідженню питання про параметризацію незвідних зображень таких алгебр у випадку $m = 2$ присвячено дану роботу.

Зручним інструментом дослідження наборів ортопроекторів у гільбертовому просторі є операторна матриця Грама (див. [4]). У першому розділі викладено конструкцію операторної матриці Грама та її основні властивості, що використовуються у подальшому.

Другий розділ присвячено вивченню загальних властивостей наборів ортопроекторів з умовами (1) при $m = 2$. Зокрема, показано, що за умови, що кожна пара проекторів (P_j, Q_k), $j = 1, 2$, $k = 1 \ldots, n$, знаходиться у загальному положенні, задача опису з точністю до унітарної еквівалентності наборів (1), $m = 2$, еквівалентна до задачі опису блочних 2×2 додатних самоспряжених матриць $A_1, \ldots, A_n$ з умовою

$$A_1 + \cdots + A_n = I.$$

Ця умова є природним аналогом умови (2) у випадку $m = 1$.

Відомо, що навіть у випадку $m = 1$, $n \geq 3$, задача опису наборів ортопроекторів з умовами (1) з точністю до унітарної еквівалентності є надзвичайно складною ($*$-дикою). У третьому розділі досліджуються набори з додатковими комутаційними співвідношеннями, які еквівалентні умові, що у незвідному зображенні образи ортопроекторів P_1, P_2 одновимірні. У цьому випадку задача опису незвідних наборів є ручною. Основний результат розділу — теорема 4, яка описує комутативний набір нормальних операторів, спектральний розклад яких дає розклад набору на незвідні набори.

1. Попередні відомості

Нагадаємо конструкцію операторної матриці Грама (див. [4]) та її властивості, що будуть потрібні для подальшого викладу.

Нехай H — сепарабельний гільбертів простір та $P_1, \ldots, P_n$ — набір ортопроекторів у H. Нехай $H_j = \operatorname{Im} P_j$, $j = 1, \ldots, n$.

Позначимо $T_j\colon H_j \to H$ ізометричні вкладення, такі що $T_jT_j^* = P_j$, $T_j^*T_j = I_{H_j}$. Розглянемо простір

$$\mathcal{H} = H_1 \oplus \cdots \oplus H_n \tag{3}$$

і оператор $J = (T_1, \dots, T_n)\colon \mathcal{H} \to H$.

Означення 1. *Оператор $G = J^*J\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ називають операторною матрицею Грама системи підпросторів $(H; H_1, \dots, H_n)$.*

Блочні елементи оператора G у розкладі (3) мають вигляд $(T_j^*T_k)_{j,k=1}^n$. У випадку, коли усі проектори P_j одновимірні, маємо $H_j = \mathbb{C}\langle e_j\rangle$, $\|e_j\| = 1$ і G — звичайна матриця Грама системи векторів $(e_1, \dots, e_n)$.

Операторна матриця Грама G системи підпросторів $(H; H_1, \dots, H_n)$ має наступні властивості:

1. $G = G^*$, $G \geq 0$;
2. Діагональні елементи G — одиничні оператори, $G_{jj} = I_{H_j}$, $j = 1, \dots, n$;
3. $G_{jk} = 0 \Leftrightarrow H_j \perp H_k$.

У просторі $\mathcal{H}$ розглянемо проектори $Q_1, \dots, Q_n$ на компоненти ортогональної суми, $\operatorname{Im} Q_j = H_j$, $j = 1, \dots, n$. Тоді $Q_1 + \cdots + Q_n = I$ і $Q_jGQ_j = Q_j$.

Твердження 1 ([4])**.** *Нехай $G \geq 0$ — невід'ємний оператор у деякому гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, і нехай $Q_1, \dots, Q_n$ — ортопроектори в $\mathcal{H}$, для яких $Q_1 + \cdots + Q_n = I$, та $Q_jGQ_j = Q_j$, $j = 1, \dots, n$. Тоді G є операторною матрицею Грама деякого набору проекторів $P_1, \dots, P_n$.*

Теорема 1 ([4])**.** *Набори $(P_1, \dots, P_n)$ і $(P_1', \dots, P_n')$ унітарно еквівалентні тоді і тільки тоді, коли набори $(G, Q_1, \dots, Q_n)$ і $(G', Q_1', \dots, Q_n')$ унітарно еквівалентні.*

Теорема 2. *Нехай для набору ортопроекторів $(P_1, \dots, P_n)$ лінійна оболонка їх образів щільна у просторі H. Набір $(P_1, \dots, P_n)$ в H незвідний тоді і тільки тоді, коли набір $(G, Q_1, \dots, Q_n)$ в $\mathcal{H}$ незвідний.*

Доведення. Нехай оператор K в H комутує з усіма проекторами $P_1, \dots, P_n$, тобто $KP_i = P_iK$, $i = 1, \dots, n$. Розглянемо оператори

$K_i = T_i^* K T_i$ і позначимо через $\mathcal{K}$ оператор у $\mathcal{H}$, що має вигляд $\mathcal{K} = \mathrm{diag}(K_1, \ldots, K_n)$.

Оскільки у розкладі (3) $Q_j = \mathrm{diag}(0, \ldots, I_j, \ldots, 0)$, $j = 1, \ldots, n$, то $Q_i \mathcal{K} = \mathcal{K} Q_i$. Покажемо, що $G\mathcal{K} = \mathcal{K}G$. Оскільки блочні елементи матриці Грама мають вигляд $(T_j^* T_k)_{j,k=1}^n$, то рівність $G\mathcal{K} = \mathcal{K}G$ рівносильна виконанню умов $K_j T_j^* T_k = T_j^* T_k K_k$, $j, k = 1, \ldots, n$. Справді,

$$\begin{aligned} K_j T_j^* T_k &= T_j^* K T_j T_j^* T_k = T_j^* K P_j T_k = T_j^* P_j K T_k \\ &= T_j^* T_j T_j^* K T_k = T_j^* K T_k, \\ T_j^* T_k K_k &= T_j^* T_k T_k^* K T_k = T_j^* P_k K T_k = T_j^* K P_k T_k \\ &= T_j^* K T_k T_k^* T_k = T_j^* K T_k. \end{aligned}$$

Якщо набір $(G, Q_1, \ldots, Q_n)$ незвідний, то за лемою Шура $\mathcal{K} = \lambda I$, і $T_j^* K T_j = \lambda I_{H_j}$. Отже, $Kf = \lambda f$ для векторів f з лінійної оболонки образів проекторів $P_1, \ldots, P_n$. Але якщо лінійна оболонка підпросторів H_j, $j = 1, \ldots, n$, щільна в H, то $K = \lambda I$, і набір проекторів $(P_1, \ldots, P_n)$ незвідний.

Покажемо тепер, що з незвідності набору $(P_1, \ldots, P_n)$ випливає незвідність набору $(G, Q_1, \ldots, Q_n)$. Нехай оператор $\mathcal{K}$ у $\mathcal{H}$ комутує з $Q_1, \ldots, Q_n, G$. Розглянемо простір $H' = \overline{\mathrm{Im}\, G}$ та оператор вкладення $T \colon H' \to \tilde{H}$, тоді $T^* T = I_{H'}$, TT^* — проектор на замикання образу G в $\mathcal{H}$. Оператори $P_j' = T^* \sqrt{G} Q_j \sqrt{G} T$ є ортопроекторами, причому за умови $\overline{\sum_{j=1}^n H_j} = H$ набір проекторів $(P_j')_{j=1}^n$ в H' унітарно еквівалентний початковому набору $(P_j)_{j=1}^n$ в H (див. [4]).

Розглянемо оператор $K' = T^* \mathcal{K} T$, $K' \colon H' \to H'$. Покажемо, що K' комутує з $(P_j')_{j=1}^n$. Справді, оскільки $G = TT^* G = GTT^*$,

$$\begin{aligned} K' P_j' &= T^* \mathcal{K} TT^* \sqrt{G} Q_j \sqrt{G} T = T^* \mathcal{K} \sqrt{G} Q_j \sqrt{G} T \\ &= T^* \sqrt{G} Q_j \sqrt{G} \mathcal{K} T = T^* \sqrt{G} Q_j \sqrt{G} TT^* \mathcal{K} T = P_j' K'. \end{aligned}$$

Нехай набір $(P_1, \ldots, P_n)$ незвідний, тоді унітарно еквівалентний до нього набір $(P_1', \ldots, P_n')$ теж незвідний, і за лемою Шура $K' = \lambda I$. Оскільки $G = GTT^*$, маємо

$$\mathcal{K} G = \mathcal{K} GTT^* = G \mathcal{K} TT^* = GTT^* \mathcal{K} TT^* = GTK'T^* = \lambda G,$$

тоді, оскільки для довільного $j = 1, \ldots, n$ виконується $Q_j \mathcal{K} = \mathcal{K} Q_j$ та $Q_j G Q_j = Q_j$, отримаємо

$$Q_j \mathcal{K} Q_j = Q_j \mathcal{K} Q_j G Q_j = Q_j \mathcal{K} G Q_j = \lambda Q_j G Q_j = \lambda Q_j.$$

Оскільки $\mathcal{K}$ коммутує з Q_j, то $Q_j \mathcal{K} Q_k = 0$ при $j \neq k$. Тоді

$$\mathcal{K} = \sum_{j=1}^{n} Q_j \tilde{K} Q_j = \lambda \sum_{j=1}^{n} Q_j = \lambda I,$$

отже, набір $(G, Q_1, \ldots, Q_n)$ незвідний. □

2. Матриця Грама для "all but two" набору проекторів

Нехай H — сепарабельний гільбертів простір. У даній роботі ми вивчаємо задачу опису з точністю до унітарної еквівалентності наборів проекторів $Q_1, \ldots, Q_n, P_1, P_2$, таких, що

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i = I, \quad P_1 \perp P_2. \tag{4}$$

Розглянемо ізометричні вкладення $S_j \colon \operatorname{Im} Q_j \to H$, $j = 1, \ldots, n$, для них маємо $S_j^* S_j = I_{\operatorname{Im} Q_j}$ та $S_j S_j^* = Q_j$. Аналогічно, розглянемо ізометричні вкладення $T_i \colon \operatorname{Im} P_i \to H$, $i = 1, 2$, для яких $T_i^* T_i = I_{\operatorname{Im} T_i}$, $T_i T_i^* = P_i$.

Оскільки $P_1 \perp P_2$, $Q_i \perp Q_j$, $i \neq j$, то $T_1^* T_2 = 0$, $T_2^* T_1 = 0$, $S_i^* S_j = 0, i \neq j$. Отже, блочне представлення матриці Грама для набору проекторів $P_1, P_2, Q_1, \ldots, Q_n$ має вигляд:

$$G = \begin{pmatrix} I & 0 & T_1^* S_1 & \ldots & T_1^* S_n \\ 0 & I & T_2^* S_1 & \ldots & T_2^* S_n \\ S_1^* T_1 & S_1^* T_2 & I & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_n^* T_1 & S_n^* T_2 & 0 & \ldots & I \end{pmatrix}.$$

Позначимо $H_1 = \operatorname{Im} P_1$, $H_2 = \operatorname{Im} P_2$, $H_0 = H_1 \oplus H_2$ і проектори P_1' та P_2' у H_0 на підпростори H_1 та H_2. Зауважимо, що оператор

$$T_0 = (T_1, T_2) \colon H_1 \oplus H_2 \to H$$

є ізометричним вкладенням H_0 в H, причому

$$P_i' = T_0^* P_i T_0, \quad i = 1, 2, \tag{5}$$

тобто проектори P'_i є звуженнями проекторів P_i на підпростір H_0.

Розглянемо оператори

$$\begin{aligned} B_j &= \begin{pmatrix} T_1^* S_j \\ T_2^* S_j \end{pmatrix} : \operatorname{Im} P_j \to H_0, \\ A_j &= B_j B_j^* \colon H_0 \to H_0, \quad j = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{6}$$

Наступні твердження встановлюють зв'язок між наборами $(P_1, P_2, Q_1, \ldots, Q_n)$ в H та наборами $(P'_1, P'_2, A_1, \ldots, A_n)$ в H_0.

Твердження 2. *Набір операторів $(P'_1, P'_2, A_1, \ldots, A_n)$ в H_0 має такі властивості.*

1. $P'_1 + P'_2 = I_{H_0}$, $A_1 + \cdots + A_n = I_{H_0}$;

2. *Якщо набори ортопроекторів $(P_1, P_2, Q_1, \ldots, Q_n)$ та $(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{Q}_1, \ldots, \tilde{Q}_n)$ унітарно еквівалентні, то відповідні набори операторів $(P'_1, P'_2, A_1, \ldots, A_n)$ та $(\tilde{P}'_1, \tilde{P}'_2, \tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_n)$ унітарно еквівалентні.*

Доведення. 1. Справді, $P'_1 + P'_2 = I_{H_0}$ за побудовою. Також маємо

$$\begin{aligned} A_1 + \cdots + A_n &= B_1 B_1^* + \cdots + B_n B_n^* \\ &= \begin{pmatrix} T_1^*(S_1 S_1^* + \cdots + S_n S_n^*) T_1 & T_1^*(S_1 S_1^* + \cdots + S_n S_n^*) T_2 \\ T_2^*(S_1 S_1^* + \cdots + S_n S_n^*) T_1 & T_2^*(S_1 S_1^* + \cdots + S_n S_n^*) T_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} T_1^*(Q_1 + \ldots + Q_n) T_1 & T_1^*(Q_1 + \ldots + Q_n) T_2 \\ T_2^*(Q_1 + \ldots + Q_n) T_1 & T_2^*(Q_1 + \ldots + Q_n) T_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} T_1^* T_1 & T_1^* T_2 \\ T_2^* T_1 & T_2^* T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = I_{H_0}. \end{aligned}$$

2. Нехай набір проекторів $(P_1, P_2, Q_1, \ldots, Q_n)$ у H унітарно еквівалентний набору проекторів $(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{Q}_1, \ldots, \tilde{Q}_n)$ у $\tilde{H}$, тобто існує унітарний оператор $U \colon H \to \tilde{H}$ такий, що $\tilde{P}_i = U P_i U^*$, $\tilde{Q}_j = U Q_j U^*$, $i = 1, 2$; $j = 1, \ldots, n$. Нехай G та $\tilde{G}$ — відповідні матриці Грама. Тоді існує блочно діагональна унітарна матриця $\mathcal{U} = \operatorname{diag}(V_1, V_2, U_1, \ldots, U_n)$, яка

сплітає G та $\tilde G$, $\tilde G = \mathcal{U} G \mathcal{U}^*$. Тоді

$$B_j = \begin{pmatrix} T_1^* S_j \\ T_2^* S_j \end{pmatrix}, \quad \tilde B_j = \begin{pmatrix} \tilde T_1^* \tilde S_j \\ \tilde T_2^* \tilde S_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 T_1^* S_j U_j^* \\ V_2 T_2^* S_j U_j^* \end{pmatrix},$$
$$A_j = B_j B_j^* = \begin{pmatrix} T_1^* S_j S_j^* T_1 & T_1^* S_j S_j^* T_2 \\ T_2^* S_j S_j^* T_1 & T_2^* S_j S_j^* T_2 \end{pmatrix},$$
$$\tilde A_j = \tilde B_j \tilde B_j^* = \begin{pmatrix} V_1 T_1^* S_j S_j^* T_1 V_1^* & V_1 T_1^* S_j S_j^* T_2 V_2^* \\ V_2 T_2^* S_j S_j^* T_1 V_1^* & V_2 T_2^* S_j S_j^* T_2 V_2^* \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Отже, $\tilde A_j = \left(\begin{smallmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{smallmatrix}\right) A_j \left(\begin{smallmatrix} V_1^* & 0 \\ 0 & V_2^* \end{smallmatrix}\right) = V A_j V^*$, $j = 1, \dots, n$, $V = \left(\begin{smallmatrix} V_1^* & 0 \\ 0 & V_2^* \end{smallmatrix}\right)$. Оскільки проектори P_1', P_2', $\tilde P_1'$, $\tilde P_2'$ мають блочно діагональний вигляд, то також маємо $\tilde P_1' = V P_1' V^*$, $\tilde P_2' = V P_2' V^*$. □

Зауваження 1. *Обернене до п.2 твердження невірне: неважко навести приклади унітарно нееквівалентних наборів* $(P_1, P_2, Q_1, \dots, Q_n)$ *та* $(\tilde P_1, \tilde P_2, \tilde Q_1, \dots, \tilde Q_n)$, *які породжують один і той же набір* $(P_1', P_2', A_1, \dots, A_n)$.

Справді, нехай проектори $(P_1, P_2, Q_1, \dots, Q_n)$ *в* H *задовольняють* (4) *і породжують згідно* (5) *та* (6) *набір* $(P_1', P_2', A_1, \dots, A_n)$. *Візьмемо довільний простір* $\hat H$ *та довільний ортогональний розклад одиниці* $\hat Q_1 + \dots + \hat Q_n = I$ *в* $\hat H$. *Покладемо*

$$\tilde H = H \oplus \hat H, \quad \tilde Q_j = Q_j \oplus \hat Q_j, \quad \tilde P_i = P_i \oplus 0, \quad j = 1, \dots, n, \ i = 1, 2.$$

Тоді набір $(\tilde P_1, \tilde P_2, \tilde Q_1, \dots, \tilde Q_n)$ *задовольняє* (4), *породжує той самий набір* $(P_1', P_2', A_1, \dots, A_n)$, *проте у випадку скінченновимірного* H *завідомо не унітарно еквівалентний до набору* $(P_1, P_2, Q_1, \dots, Q_n)$.

Покажемо, що за певних додаткових умов є взаємно однозначна відповідність між "all but two" наборами ортопроекторів та наборами блочних 2×2 невід'ємних матриць з одиничною сумою.

Нагадаємо, що підпростори $E \subset H$ і $K \subset H$ (проектори на підпростори $E \subset H$ і $K \subset H$) знаходяться у загальному положенні, якщо $E \cap K = 0$, $E \cap K^\perp = 0$, $E^\perp \cap K = 0$.

Теорема 3. *Нехай* $P_1, P_2, Q_1, \dots, Q_n$ — *набір ортопроекторів в* H, *що задовольняють* (4), $A_1, \dots, A_n$ — *невід'ємні самоспряжені оператори, побудовані згідно* (6), *і нехай кожна з пар проекторів* $(P_0 = P_1 + P_2, Q_j)$, $j = 1, \dots, n$, *знаходяться у загальному положенні.*

Тоді розмірність усіх проекторів Q_j однакова і дорівнює розмірності проектора P_0, $\dim \operatorname{Im} P_0 = \dim \operatorname{Im} Q_j$, $j = 1, \dots, n$, причому $\ker A_j = 0$, тобто оператор A_j має (взагалі кажучи, необмежений) обернений.

Навпаки, нехай у деякому просторі H_0 задано проектори P_1', P_2', та невід'ємні самоспряжені оператори $A_1, \dots, A_n$, для яких

$$P_1' + P_2' = I, \quad A_1 + \dots + A_n = I, \quad \ker A_j = 0, \qquad j = 1, \dots, n.$$

Тоді існує единий з точністю до унітарної еквівалентності набір ортопроекторів $P_1, P_2, Q_1, \dots, Q_n$, що задовольняють (4), *для якого кожна з пар проекторів $(P_0 = P_1 + P_2, Q_j)$, $j = 1, \dots, n$, знаходяться у загальному положенні, і який задає проектори P_1', P_2', та оператори $A_1, \dots, A_n$ формулами* (5) *та* (6).

Доведення. Для фіксованого j розглянемо пару проекторів (P_0, Q_j). За спектральною теоремою для пари проекторів

$$\begin{aligned} H &= H_{00} \oplus H_{01} \oplus H_{10} \oplus H_{11} \oplus (H_+ \oplus H_+) \\ P_0 &= 0 \oplus 0 \oplus I \oplus I \oplus \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ Q_j &= 0 \oplus I \oplus 0 \oplus I \oplus \begin{pmatrix} C^2 & CS \\ CS & S^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

де C — самоспряжений оператор в H_+, $0 < C < I$, $S = \sqrt{1 - C^2}$. Оскільки проектори P_0 і Q_j знаходяться у загальному положенні, то $H_{01} = H_{10} = H_{11} = 0$, отже $H = H_{00} \oplus (H_+ \oplus H_+)$ і проектори P_0 і Q_j мають вигляд:

$$P_0 = 0 \oplus \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \oplus I \oplus 0, \quad Q_j = 0 \oplus \begin{pmatrix} C^2 & CS \\ CS & S^2 \end{pmatrix},$$

причому образи цих проекторів ізоморфні H_+, оскільки $\ker C = 0$.

Покажемо, що $\ker A_j = 0$. Позначимо $H_0 = \operatorname{Im} P_0$, і розглянемо ізометричне вкладення $T_0 = (T_1, T_2)\colon H_0 \to H$, тоді $B_j^* = (S_j^* T_1, S_j^* T_2) = S_j^* T_0$. Оскільки $A_j = B_j B_j^* = T_0^* Q_j T_0$ і у розкладі $H = H_{00} \oplus H_+ \oplus H_+$ маємо блочне представлення $T_0^* = (0, I, 0)$, в результаті отримаємо $A_j = C^2$, $\ker C = 0$. Звідси, зокрема, випливає, що $\ker B_j^* = 0$. Подібними міркуваннями можна також показати, що $\ker B_j = 0$, тобто оператор B_j оборотний.

Для набору операторів $(P_1, P_2, Q_1, \ldots, Q_n)$ матриця Грама у просторі $H_0^{\oplus n+1}$ має вигляд:

$$G = \begin{pmatrix} I & B_1 & \ldots & B_n \\ B_1^* & I & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ B_n^* & 0 & & I \end{pmatrix}.$$

Оскільки оператор B_j має обернений, то в полярному розкладі $B_j = A_j U_j$, $A_j \geq 0$, оператор U_j — унітарний. Розглянемо унітарну матрицю $U = \operatorname{diag}(I, U_1, U_2, \ldots, U_n)$. Тоді за теоремою 1

$$UGU^* = \begin{pmatrix} I & \sqrt{A_1} & \ldots & \sqrt{A_n} \\ \sqrt{A_1^*} & I & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sqrt{A_n^*} & 0 & \ldots & I \end{pmatrix}.$$

є матрицею Грама унітарно еквівалентного набору ортопроекторів, тобто вихідний набір $(P_1, P_2, Q_1, \ldots, Q_n)$ однозначно з точністю до унітарної еквівалентності визначається операторами $P_1', P_2', A_1, \ldots, A_n$ в H_0.

Нехай тепер у деякому просторі H_0 задано проектори P_1', P_2', та невід'ємні самоспряжені оператори $A_1, \ldots, A_n$, для яких

$$P_1' + P_2' = I, \quad A_1 + \cdots + A_n = I, \quad \ker A_j = 0, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

У просторі $H_0^{\oplus n+1}$ розглянемо оператор G, блочна структура якого має вигляд

$$G = \begin{pmatrix} I & \sqrt{A_1} & \ldots & \sqrt{A_n} \\ \sqrt{A_1} & I & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ \sqrt{A_n} & 0 & & I \end{pmatrix}.$$

Неважко помітити, що $G \geq 0$. Справді, безпосередня перевірка з врахуванням умови $\sum_{j=1}^n A_j = I$ показує, що вектори виду $(\pm x, \sqrt{A_1}x, \ldots, \sqrt{A_n}x)$, $x \in H_0$, є власними векторами оператора G з власними значеннями 0 та 2, а для довільного вектора x, ортогонального до векторів такого виду, маємо $x = (0, x_1, \ldots, x_n)$, $\sum_{j=1}^n \sqrt{A_j} x_j = 0$, і $Gx = x$. Таким чином, спектр G складається з точок 0, 1, 2.

За твердженням 1 G є матрицею Грама деякого набору $(P_0, Q_1, \dots, Q_n)$, причому розклад $I = P_1' + P_2'$ задає розклад в ортогональну суму $P_0 = P_1 + P_2$. Проектори P_0 та Q_j знаходяться у загальному положенні, оскільки $\ker A_j \neq 0$, $j = 1, \dots, n$. □

Зауваження 2. *Нехай набір проекторів $P_1, P_2, Q_1, \dots, Q_n$ задовольняє (4), причому проектори $P_0 = P_1 + P_2$ та Q_j знаходяться у загальному положенні, $j = 1, \dots, n$. Тоді набір операторів*

$$P_j Q_k P_l, \quad j, l = 1, 2, \; k = 1, \dots, n,$$

дозволяє відновити початковий набір $P_1, P_2, Q_1, \dots, Q_n$ з точністю до унітарної еквівалентності.

Доведення. Розглянемо ізометричні вкладення $S_k \colon \operatorname{Im} Q_k \to H$, $T_j \colon \operatorname{Im} P_j \to H$, тоді $Q_k = S_k S_k^*$, $P_j = T_j T_j^*$ та оператори $P_j Q_k P_l$ мають вигляд

$$P_j Q_k P_l = T_j T_j^* S_k S_k^* T_l T_l^* = T_j (T_j^* Q_k T_l) T_l^*.$$

Зауважимо, що вирази в дужках є матричними блоками оператора A_k. Оскільки оператори $A_k \geq 0$ невироджені, $\operatorname{Im} P_j Q_k P_j = \operatorname{Im} P_j$, отже, $P_j Q_k P_j$ однозначно визначають проектори P_1, P_2 і відповідні вкладення T_1. T_2. Тоді (j, l)-й матричний блок оператора A_k має вигляд $T_j^* P_j Q_k P_l T_l$, тобто оператори A_k, $k = 1, \dots, n$, однозначно визначаються набором $P_j Q_k P_l$, $j, l = 1, 2$, $k = 1, \dots, n$. За операторами A_j можна відновити матрицю Грама G, а отже, можна відновити з точністю до унітарної еквівалентності проектори $Q_1, \dots, Q_n, P_1, P_2$. □

3. Незвідні зображення

Нехай Λ — множина усіх мультиіндексів

$$\alpha = (j_1, k_1, j_2, \dots, k_{l-1}, j_l, k_l, j_1),$$
$$j_s = 1, 2; \; k_s = 1, \dots, n; \; s = 1, \dots, l; \; l = 0, 1, \dots .$$

Розглянемо набір операторів C_α, $\alpha \in \Lambda$:

$$C_\alpha = P_{j_1} Q_{k_1} P_{j_2} \dots Q_{k_{l-1}} P_{j_l} Q_{k_l} P_{j_1}, \tag{7}$$

Позначимо $\Lambda_i \subset \Lambda$ підмножину індексів, що починаються та закінчуються на i, $i = 1, 2$, тоді $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$.

Твердження 3. *У незвідному зображенні образи проекторів* P_1, P_2 *одновимірні тоді і тільки тоді, коли оператори* C_α, $\alpha \in \Lambda$, *утворюють комутативний набір.*

Доведення. Необхідність. Нехай $\dim(\operatorname{Im} P_1) = \dim(\operatorname{Im} P_2) = 1$. Оскільки для $\alpha \in \Lambda_{j_1}$, $\beta \in \Lambda_{j_2}$ маємо $\operatorname{Im} C_\alpha \subset \operatorname{Im} P_{j_1}$, $\operatorname{Im} C_\beta \subset \operatorname{Im} P_{j_2}$, то $C_\alpha = c_\alpha P_{j_1}$, $C_\beta = c_\beta P_{j_2}$, $c_\alpha, c_\beta \in \mathbb{C}$ і $C_\alpha C_\beta = C_\beta C_\alpha$ внаслідок комутування проекторів P_1, P_2.

Достатність. Нехай при $j = 1, 2$ виконуються умови $C_\alpha C_\beta = C_\beta C_\alpha$ для всіх $\alpha, \beta \in \Lambda_j$. Покажемо, що $\dim(\operatorname{Im} P_j) = 1$. Безпосередньо з означення маємо $C_\alpha^* C_\alpha = C_\alpha C_\alpha^*$, тобто C_α, $\alpha \in \Lambda$ — зліченний комутативний набір нормальних операторів.

Позначимо $H_j = \operatorname{Im} P_j$, $T_j \colon H_j \to H$, як і раніше, відповідне ізометричне вкладення. Оскільки $\operatorname{Im} C_\alpha \subset \operatorname{Im} P_j$, $\alpha \in \Lambda_j$, то $T_j^* C_\alpha T_j$, $\alpha \in \Lambda_j$ — комутативний набір нормальних операторів в H_j. Нехай $E(\Delta)$ є сумісний розклад одиниці цього комутативного набору, і нехай Δ — борелівська множина, для якої $E(\Delta) \neq 0$.

Розглянемо підпростір $E(\Delta)H_j = H_j^0 \subseteq H_j$. Тоді підпростір $\overline{\operatorname{Pol}(Q_k, P_j)H_j^0} = H^0 \subset H$ інваріантний відносно дії проекторів P_1, P_2, $Q_1, \ldots, Q_n$. Оскільки набір P_1, P_2, $Q_1, \ldots, Q_n$ є незвідним, то $H^0 = H$ і оскільки довільний вектор H_0 лежить в $P_0 H^0$, то маємо також $H_j^0 = H_j$, тобто $E(\Delta) = I$.

Таким чином, для будь-якої борелівської множини Δ, для якої $E(\Delta) \neq 0$ маємо $E(\Delta) = I$, звідси випливає, що існує єдина точка x_0, така що $E(x_0) = I$. Тоді оператори $T_j^* C_\alpha T_j$, $\alpha \in \Lambda_j$ є скалярними операторами в H_j, і для довільного $f \in H_j$ підпростір $\overline{\operatorname{Pol}(Q_k, P_j)f} \subset H$ є інваріантним підпростором, і тому співпадає з усім H. З іншого боку, проекція $\overline{\operatorname{Pol}(Q_k, P_j)f}$ на H_j — одновимірний підпростір, породжений f, тобто $\dim H_j = 1$. □

Зауваження 3. *З попереднього доведення випливає, що у випадку незвідного комутативного набору* C_α, $\alpha \in \lambda$, *для довільного* $\alpha \in \Lambda_j$, $j = 1, 2$, *маємо*

$$C_\alpha = c_\alpha P_j, \quad c_\alpha \in \mathbb{C}.$$

Таким чином, у цьому випадку кожний незвідний набір проекторів P_1, P_2, $Q_1, \ldots, Q_n$, *що задовольняють* (4), *визначає набір чисел* c_α, $\alpha \in \Lambda$.

Природно виникає питання, чи можна за набором c_α, $\alpha \in \Lambda$ відновити набір проекторів P_1, P_2, $Q_1, \dots, Q_n$. Наступна теорема показує, що це так, причому достатньо задати деякий скінченний набір чисел c_α, $\alpha \in \Lambda$.

Теорема 4. *Нехай набір ортопроекторів P_1, P_2, Q_1, $\dots$, Q_n, що задовольняють умови (4) незвідний та виконуються умови:*

i) $P_1 \neq 0$, $P_2 \neq 0$;

ii) при кожному $j = 1, \dots, n$ пара проекторів $P_0 = P_1 + P_2$ та Q_j знаходяться у загальному положенні;

iii) оператори C_α, $\alpha \in \Lambda$, що визначаються формулою (7) утворюють комутативний набір.

Тоді $C_\alpha = c_\alpha P_j$, $c_\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \Lambda_j$, і набір чисел

$$c_\alpha, \quad \alpha \in \{(j,k,j), (1,k,2,l,1) \mid j = 1,2; k,l = 1,\dots,n\},$$

визначає проектори P_1, P_2, Q_1, $\dots$, Q_n однозначно з точністю до унітарної еквівалентності.

Доведення. За твердженням 3 у незвідному зображенні простори H_1, H_2 одновимірні, тому оператори $A_1, \dots, A_n$, визначені (6), є звичайними додатними матрицями у $\mathbb{C}^2$,

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{11}^j & a_{12}^j \\ a_{21}^j & a_{22}^j \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, n,$$

причому набір матриць $U^* A_k U$, $k = 1, \dots, n$, де U — діагональна унітарна матриця, визначає унітарно еквівалентний набір (4).

Зауважимо, що принаймні одне з чисел a_{12}^j відмінне від нуля. Справді, якщо усі $a_{12}^j = 0$, $j = 1, \dots, n$, то підпростір, породжений $\{H_1, Q_k H_1, k = 1, \dots, n\}$, буде інваріантним підпростором, який ортогональний до H_2.

Перенумеровуючи при потребі проектори $Q_1, \dots, Q_n$, забезпечимо, щоб виконувалась умова $a_{12}^1 \neq 0$, і вибираючи належним чином діагональну унітарну матрицю, вважатимемо, що $a_{12}^1 > 0$.

З (6) маємо

$$a_{jj}^k = T_j^* Q_k T_j = T_j^* C_{jkj} T_j = c_{jkj}, \quad j = 1,2;\ k = 1, \dots, n.$$

Оскільки $a_{12}^1 \geq 0$, маємо

$$a_{12}^1 = T_1^* Q_1 T_2 = \sqrt{T_1^* Q_1 T_2 T_2^* Q_1 T_1} = T_1^* \sqrt{P_1 Q_1 P_2 Q_1 P_1} T_1 = \sqrt{c_{11211}}.$$

Оскільки

$$a_{12}^1 a_{21}^k = T_1^* Q_1 T_2 T_2^* Q_k T_1 = T_1^* Q_1 P_2 Q_k T_1 = T_1^* P_1 Q_1 P_2 Q_k P_1 T_1 = c_{112k1},$$

маємо

$$a_{12}^k = \bar{a}_{21}^k = \frac{\bar{c}_{112k1}}{\sqrt{c_{11211}}}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Таким чином, ми знайшли матриці $A_1, \dots, A_n$. Задаючи у $H_0 = \mathbb{C}^2$

$$P_1' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

за теоремою 3 отримаємо потрібний розв'язок (4). □

Зауваження 4. *Розмірність простору незвідного зображення, що задовольняє умови теореми, дорівнює $2n$, для того, щоб задати зображення, слід задати, з точністю до діагональної унітарної еквівалентності, n 2×2 невід'ємних матриць, сума яких є одиничною матрицею. Для цього потрібно задати $2n - 1$ дійсних та $n - 2$ комплексних чисел.*

У формулюванні теореми фігурує $2n + n^2$ чисел, з яких $3n$ є дійсними. Разом з тим, у доведенні теореми використовуються лише числа c_{jkj} (дійсні, $2n$ штук), та c_{112k1} (одне додатне, $n-1$ коплексні). Зрозуміло, що умова $A_1 + \dots + A_n = I$ дозволяє відповідно зменшити кількість чисел.

Остаточно, для однозначного визначення набору проекторів, що задовольняють умови теореми, досить задати числа

$$c_{jkj}, c_{1l2k1}, \quad j = 1, 2; \ k = 1, \dots, n - 1,$$

де $1 \le l \le n$ — деяке число, при якому $c_{1l2l1} \ne 0$.

Зауваження 5. *У випадку all but one наборів (лише один проектор P_1), незвідний набір задається числами $0 < c_1, \dots, c_n < 1$ з умовою $c_1 + \dots + c_n = 1$. Для випадку двох проекторів P_1, P_2 таких простих умов на числа c_α, які б забезпечували існування набору проекторів (4) немає: ці числа визначають матричні елементи операторів $A_1, \dots, A_n$, для яких повинна виконуватись умова $A_1 + \dots + A_n = I$.*

Автори висловлюють щиру вдячність М.Л.Василевському та Ю.С.Самойленку за змістовні дискусії щодо предмету статті та добру увагу.

Література

[1] *N. Vasilevski.* Commutative algebras of Toeplitz operators on the Bergman space. // Series: Operator Theory: Advances and Applicationsю — 2008ю — Vol. 185. — 417 p.

[2] *Yu. I. Karlovich, Luis V. Pessoa.* Algebras Generated by the Bergman and Anti-Bergman Projections and by Multiplications by Piecewise Continuous Functions. // Integral Equations and Operator Theory. — 2005. — vol. 52, no 2. — 219–270.

[3] *Yu. I. Karlovich, Luis V. Pessoa.* C *-Algebras of Bergman Type Operators with Piecewise Continuous Coefficients. // Integral Equations and Operator Theory. — 2007. — vol. 57, no 4. — 521–565.

[4] *А. В. Стрелец, И. С. Фещенко.* О системах подпространств гильбертова пространства, удовлетворяющих условиям на углы между каждой парой подпространств // Алгебра и анализ. — 2012. — Т. 24, № 5. — 181–214.