Збірник праць Інституту математики НАН України 2016, т. 13, № 3, 146–157

УДК 517.521

Про одне узагальнення системи функцій Радемахера та Уолша

М. В. Працьовитий[1]***, Ю. П. Маслова***[2]

[1] *Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова; prats4444@gmail.com;*
[2] *Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова; julia0609mas@gmail.com*

In the paper, we propose generalizations of the Rademacher and Walsh functions. They are based on Q_2-representation of real numbers generalizing classic binary representation of numbers $x \in [0;1]$. We study integral properties of these functions. In particular, we prove that generalized Rademacher functions form an orthogonal system of functions. For any generalized Walsh function, its analytic expression is found.

В работе предлагаются обобщения функций Радемахера и Уолша, которые основываются на Q_2–изображениях действительных чисел, что является обобщением классического двоичного представления чисел $x \in [0;1]$. Исследуются интегральные свойства этих функций, в частности доказано, что обобщенные функции Радемахера образуют ортогональную систему функций. Для каждой обобщенной функции Уолша найдено ее аналитическое выражение.

1 Вступ

Класична теорія рядів Фур'є пов'язана з розкладами функцій за синусоїдальними гармоніками. Альтернативною теорією розкладів функцій у ряди за ортонормованою системою функцій є теорія рядів Уолша. Система функцій Уолша, що являють собою "прямокутні"хвилі, була введена у 1923 році американським математиком Дж. Уолшем [10]. Як виявилось, у теорії передачі сигналів такі хвилі мають суттєві переваги. Існує не лише глибокий паралелізм між теорією рядів Уолша і класичною теорією тригонометричних рядів, але й принципові відмінності. Система функцій Уолша, будучи одним з найпростіших прикладів повної ортонормованої системи, цікава з точки зору теорії загальних ортогональних рядів. За останні півстоліття з'явилось чимало робіт, пов'язані з застосуваннями функцій і рядів Уолша в обчислювальній математиці, у теорії кодування, у цифровій обробці сигналів тощо. Сьогодні функціям, рядам та перетворенням Уолша, а також їх застосуванням та узагальненням присвячена велика кількість статей та монографій, однією з яких є [5].

У даній роботі, застосовуючи Q_2-зображення [6,7], що є узагальненням класичного двійкового [8], ми отримуємо узагальнення функцій Радемахера [9] і функцій Уолша з використанням Пеллі, при цьому зосереджуємо свою увагу на найпростіших властивостях цих об'єктів.

2 Функція Радемахера і ряди Уолша

Ми використовуватимемо двійкове представлення та зображення дійсних чисел:

$$[0;1) \ni x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n 2^{-n} \equiv \triangle^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}, \;\; \alpha_n \in \{0;1\} \equiv A_2, \tag{1}$$

і йому відповідні двійкові циліндри (півввідрізки):

$$\Delta^2_{c_1\ldots c_m} \equiv \left[\sum_{i=1}^{n} c_i 2^{-i}; \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{n} c_i 2^{-i}\right) = \{x : \alpha_n(x) = c_n, \;\; n = \overline{1,m}\}. \tag{2}$$

Остання множина називається двійковим циліндром рангу m з основою $c_1c_2\ldots c_m$. При цьому для чисел, що мають два зображення, використовується лише те, що має період (0).

Нагадаємо, що функціями Радемахера $r_k(x)$ називаються функції з періодом 1, визначені на піввідрізку $[0;1)$ наступним чином

$$r_0^*(x) = \begin{cases} 1 \;\; \text{при} \;\; x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \;\Leftrightarrow\; x \in \Delta^2_0; \\ -1 \;\; \text{при} \;\; x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \;\Leftrightarrow\; x \in \Delta^2_1, \end{cases}$$

$$r_k^*(x) \equiv r_0^*\left(\{2^k x\}\right) = r_0^*\left(2^k x\right), \;\; k = 0,1,2,\ldots,$$

де $\{2^k x\}$ – дробова частина числа $2^k x$.

Зауважимо, що інколи функціям Радемахера дають наступне означення:

$$r_k^*(x) = sign \sin 2^{k+1}\pi x,$$

де

$$signt = \begin{cases} 1 \quad \text{при} \quad t > 0, \\ 0 \quad \text{при} \quad t = 0, \\ -1 \quad \text{при} \quad t < 0, \end{cases}$$

яким у даній роботі ми користуватись не будемо.

Функції Уолша є всеможливими добутками функції Радемахера.

Нижче ми пропонуємо одне з узагальнень функцій Радемахера та Уолша, яке ґрунтується на узагальненні класичного двійкового зображення дійсних чисел, і будемо їх розглядати визначеними на $[0; 1)$.

3 Узагальнення функцій Радемахера

Нехай $A_2 = \{0; 1\}$ – алфавіт двійкової системи числення, $L = A_2 \times A_2 \times \ldots \times A_2 \times \ldots$ – простір послідовностей 0 та 1, елементи якого позначатимемо $\bar{x} = (x_n), \bar{y} = (y_n)$.

Множина L відносно бінарної операції $\oplus$, означеної рівностями

$$\bar{z} = \bar{x} \oplus \bar{y} = (x_n \oplus y_n) = (z_n),$$

де $x_n \oplus y_n = z_n = \begin{cases} 0, \text{ коли } x_n + y_n = 0 \text{ або } 2, \\ 1, \text{ коли } x_n + y_n = 1; \end{cases}$
утворює комутативну групу.

Множину L можна різними способами метризувати. У даній ситуації найприроднішою є метрика:

$$\rho\,(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n \oplus y_n}{2^n}.$$

Іншу метрику ми наведемо нижче.

Якщо q_0 – фіксоване число з інтервалу (0;1), $q_1 = 1 - q_0, \beta_0 = 0, \beta_1 = q_0$, то для будь-якого числа $x \in [0; 1]$ існує послідовність $(\alpha_n) \in L$ така, що

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\beta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j} \right) \equiv \Delta^{q_0^{-1}}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}. \qquad (3)$$

Ряд (3) називається Q_2-*представленням числа* x, а його символічний запис $\Delta^{q_0^{-1}}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ – Q_2-*зображенням* [9].

Зауважимо, що рівність (3) стає рівністю (1) при $q_0 = \dfrac{1}{2}$. Тому Q_2-зображення є узагальненням класичного двійкового зображення.

Існує злічення множина чисел, які мають два Q_2-зображення. Це числа виду $\Delta^{q_0^{-1}}_{c_1\ldots c_m 1(0)} = \Delta^{q_0^{-1}}_{c_1\ldots c_m 0(1)}$. Домовившись не використовувати останнє зображення, отримуємо єдиність Q_2-зображення. Тоді k-та Q_2-цифра $\alpha_k = \alpha_k(x)$ є функцією числа, що зображується.

Циліндром для Q_2-зображення рангу m з основою $c_1\ldots c_m$ називається множина

$$\Delta^{q_0^{-1}}_{c_1\ldots c_m} = \{x : \alpha_i(x) = c_i,\ i = \overline{1,m}\}.$$

Після зробленої вище домовленості про єдиність Q_2-зображення числа циліндр є півврізком $\left[\Delta^{q_0^{-1}}_{c_1\ldots c_{m-1}c_m(0)}; \Delta^{q_0^{-1}}_{c_1\ldots c_{m-1}[c_m+1](0)}\right)$, який має довжину

$$\left|\Delta^{q_0^{-1}}_{c_1\ldots c_m}\right| = \prod_{j=1}^{m} q_{c_j} = q_0^{N_0} q_1^{N_1}, \quad \text{де} \quad N_i = \sharp\{j : c_j = i, j = \overline{1,m}\},\ i \in A_2.$$

Q_2-зображення може бути використане для метризації простору L, а саме:

$$\rho_0\left(\bar{x}, \bar{y}\right) = z_1 q_{1-z_1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(z_k q_{1-z_k}\prod_{j=1}^{k-1} q_{z_j}\right) \equiv \Delta^{q_0^{-1}}_{z_1 z_2\ldots z_n\ldots}, \quad \text{де} \quad \bar{z} = \bar{x} \oplus \bar{y}.$$

Означення 3.1. *На півврізку [0;1) означимо послідовність функцій*

$$(r_n)_{n=0}^{\infty}:$$

$$r_0(x) \equiv (-1)^{\alpha_1(x)} \cdot 2q_{1-\alpha_1(x)} =$$

$$= \begin{cases} 2q_1, & \textit{якщо} \;\; x \in [0; q_0) = \Delta^{q_0^{-1}}_0 \;\Leftrightarrow\; \alpha_1(x) = 0; \\ -2q_0, & \textit{якщо} \;\; x \in [q_0; 1) = \Delta^{q_0^{-1}}_1 \;\Leftrightarrow\; \alpha_1(x) = 1; \end{cases}$$

$$r_n(x) \equiv r_0\left(\Delta^{q_0^{-1}}_{\alpha_{n+1}(x)\alpha_{n+2}(x)\ldots}\right),\ n \in N.$$

Функції r_n є узагальненням функцій Радемахера і співпадають з ними при $q_0 = \frac{1}{2}$.

Зауваження 3.1. *Функція r_n набуває лише двох значень $2q_1$ і $-2q_0$, причому на кожному циліндрі рангу n вона є сталою, а отже, є сталою на кожному з циліндрів рангу $m > n$. Наприклад, при $q_0 = \frac{1}{3}$ графіки функцій r_0 і r_1 відповідно мають вигляд:*

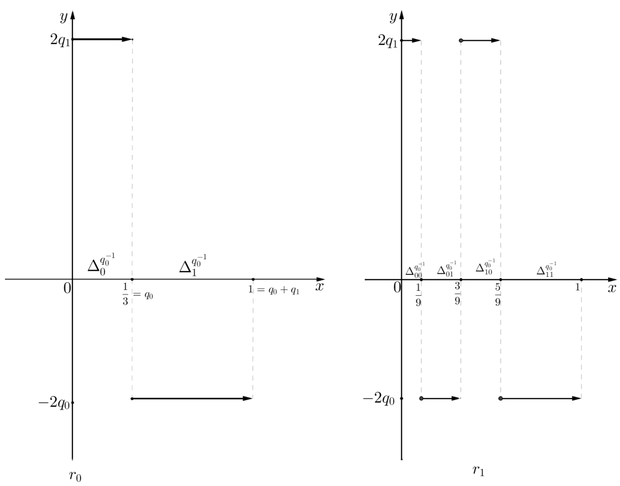

Рис 1

Теорема 3.1. *Для узагальнення r_n функції Радемахера r_n^* має місце рівність:*

$$\int\limits_{x\in\Delta^{q_0^{-1}}_{c_1\ldots c_n}} r_n(x)dx = 0 \tag{4}$$

при довільному наборі $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ з 0 та 1.

Доведення. Справді,

$$\begin{aligned}\int\limits_{x\in\Delta^{q_0^{-1}}_{c_1\ldots c_n}} r_n(x)dx &= \int\limits_{x\in\Delta^{q_0^{-1}}_{c_1\ldots c_n}} r_0\left(\Delta^{q_0^{-1}}_{\alpha_{n+1}(x)\alpha_{n+2}(x)\ldots}\right)dx = \\ &= \int\limits_{x\in\Delta^{q_0^{-1}}_{c_1\ldots c_n 0}} r_0\left(\Delta^{q_0^{-1}}_{\alpha_{n+1}(x)\alpha_{n+2}(x)\ldots}\right)dx + \\ &+ \int\limits_{x\in\Delta^{q_0^{-1}}_{c_1\ldots c_n 1}} r_0\left(\Delta^{q_0^{-1}}_{\alpha_{n+1}(x)\alpha_{n+2}(x)\ldots}\right)dx = \\ &= 2q_1|\Delta^{q_0^{-1}}_{c_1\ldots c_n 0}| - 2q_0|\Delta^{q_0^{-1}}_{c_1\ldots c_n 1}| = \\ &= 2\left(q_1q_0 - q_0q_1\right)\prod_{i=1}^{n} q_{c_i} = 0,\end{aligned}$$

що й вимагалось довести. □

Наслідок 3.1. *Має місце рівність*

$$\int\limits_0^1 r_n(x)dx = 0.$$

Справді, рівність (4) є наслідком адитивної властивості інтеграла:

$$\int\limits_0^1 r_n(x)dx = \sum_{c_1\in A_2}\ldots\sum_{c_n\in A_2}\int\limits_{x\in\Delta^{q_0^{-1}}_{c_1\ldots c_n}} r_n(x)dx.$$

Теорема 3.2. *Система функцій Радемахера є ортогональною, а саме:*

$$\int\limits_0^1 r_n(x)r_m(x)dx = \begin{cases}0, & \text{якщо} \quad n\neq m,\\ 4q_0q_1, & \text{якщо} \quad n=m.\end{cases}$$

Доведення. Не порушуючи загальності, вважатимемо, що $n<m$. То-

ді

$$r_n(x)r_m(x) = r_0\left(\Delta^{q_0^{-1}}_{\alpha_{n+1}(x)\ldots}\right) r_0\left(\Delta^{q_0^{-1}}_{\alpha_{m+1}(x)\ldots}\right) =$$
$$= \begin{cases} 4q_0^2, & \text{якщо } x \in \Delta^{q_0^{-1}}_{c_1\ldots c_{n-1}0c_{n+1}\ldots c_{m-1}0}, \\ -4q_0q_1, & \text{якщо } x \in \Delta^{q_0^{-1}}_{c_1\ldots c_{n-1}0c_{n+1}\ldots c_{m-1}1}, \\ -4q_1q_0, & \text{якщо } x \in \Delta^{q_0^{-1}}_{c_1\ldots c_{n-1}1c_{n+1}\ldots c_{m-1}0}, \\ 4q_1^2, & \text{якщо } x \in \Delta^{q_0^{-1}}_{c_1\ldots c_{n-1}1c_{n+1}\ldots c_{m-1}1} \end{cases}$$

при довільному наборі $(c_1, \ldots, c_{n-1}, c_{n+1}, \ldots, c_{m-1})$ нулів та одиниць. Тому, враховуючи попереднє зауваження, для

$$I = \int\limits_{\Delta^{q_0^{-1}}_{c_1\ldots c_{n-1}ic_{n+1}\ldots c_{m-1}c_m}} r_n(x)r_m(x)dx$$

маємо:

$$I = \int\limits_{\Delta^{q_0^{-1}}_{c_1\ldots c_{n-1}ic_{n+1}\ldots c_{m-1}0}} r_n(x)r_m(x)dx +$$
$$+ \int\limits_{\Delta^{q_0^{-1}}_{c_1\ldots c_{n-1}ic_{n+1}\ldots c_{m-1}1}} r_n(x)r_m(x)dx =$$
$$= \pm\left(4q_{1-i}q_1|\Delta^{q_0^{-1}}_{c_1\ldots c_{n-1}ic_{n+1}\ldots c_{m-1}0}| - 4q_{1-i}q_0|\Delta^{q_0^{-1}}_{c_1\ldots c_{n-1}ic_{n+1}\ldots c_{m-1}1}|\right) =$$
$$= \pm 4q_{1-i}q_i(q_1q_0 - q_0q_1)\prod_{n\neq j=1}^{m-1} q_{c_j} = 0.$$

А отже, враховуючи адитивну властивість інтеграла, маємо

$$\int\limits_0^1 r_n(x)r_m(x)dx = 0.$$

При $n = m$ маємо

$$r_n(x)r_m(x) = r_n^2(x) = r_0^2\left(\Delta^{q_0^{-1}}_{\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\ldots}\right) =$$
$$= \begin{cases} 4q_1^2, & \text{якщо } x \in \Delta^{q_0^{-1}}_{c_1\ldots c_n0}, \\ 4q_0^2, & \text{якщо } x \in \Delta^{q_0^{-1}}_{c_1\ldots c_n1}, \end{cases}$$

для довільного набору $(c_1, _2 \ldots, c_n) \in A_2^n$.

Тоді

$$\int\limits_0^1 r_n^2(x)dx = 4q_1^2 \sum_{c_1 \in A_2} \ldots \sum_{c_2 \in A_2} |\Delta^{q_0^{-1}}_{c_1 \ldots c_n 0}| + \\ + 4q_0^2 \sum_{c_1 \in A_2} \ldots \sum_{c_2 \in A_2} |\Delta^{q_0^{-1}}_{c_1 \ldots c_n 1}| = \\ = \left(4q_1^2 q_0 + 4q_0^2 q_1\right) \sum_{c_1 \in A_2} \ldots \sum_{c_2 \in A_2} |\Delta^{q_0^{-1}}_{c_1 \ldots c_n}| = \\ = 4q_1 q_0 \cdot 1 = 4q_0 q_1.$$

Теорему доведено. □

4 Узагальнення функцій Уолша

Систему (послідовність) узагальнених функцій Уолша $\{\omega_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ ми побудуємо з використанням традиційної нумерації Пеллі. Покладемо $\omega_0(x) \equiv 1$. Для означення функції $\omega_n(x)$ число n представляється у двійковій системі числення:

$$n = 2^k + \varepsilon_{k-1} 2^{k-1} + \ldots + \varepsilon_1 2^1 + \varepsilon_0, \ \varepsilon_i \in A_2.$$

Звідки можна бачити, що $2^k \leq n < 2^{k+1}$, де $k = k(n)$. Тепер означуємо функцію ω_n рівністю:

$$\omega_n(x) \equiv \prod_{i=0}^{k} r_i^{\varepsilon_i}(x) = r_k(x) \prod_{i=0}^{k-1} r_i^{\varepsilon_i}(x).$$

Наприклад, для $n = 1 = 1 \cdot 2^0$ маємо $\omega_1(x) = r_0(x)$;
для $n = 2 = 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = (10)_2$ маємо

$$\omega_2(x) = r_0^{\varepsilon_0}(x) r_1^{\varepsilon_1}(x) = r_1(x);$$

для $n = 4 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = (100)_2$ маємо $\varepsilon_0 = 0 = \varepsilon_1$ і

$$\omega_4(x) = r_0^{\varepsilon_0}(x) r_1^{\varepsilon_1}(x) r_2^{\varepsilon_2}(x) = r_2(x).$$

Більше того,

$$\omega_{2^k} = r_0^0(x) r_1^0(x) \ldots r_{k-1}^0(x) r_k^1(x) = r_k(x) = r_0\left(\Delta^{q_0^{-1}}_{\alpha_{k+1}(x)\alpha_{k+2}(x)\ldots}\right).$$

Оскільки $2^k - 1 = 2^{k-1} + 2^{k-2} + \ldots + 2^1 + 1$, то $\omega_{2^k-1}(x) = r_0(x) r_1(x) \ldots r_{k-1}(x)$. Для $n = 5 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (101)_2$ отримуємо

$$\begin{aligned}\omega_5(x) &= r_0^1(x) r_1^0(x) r_2^1(x) = r_0(x) r_2(x) = \\ &= r_0\left(\Delta^{q_0^{-1}}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots}\right) r_0\left(\Delta^{q_0^{-1}}_{\alpha_3(x)\alpha_4(x)\ldots}\right) = \\ &= (-1)^{\alpha_1(x)+\alpha_3(x)} 2^2 q_{1-\alpha_1(x)} q_{1-\alpha_3(x)}.\end{aligned}$$

Зауваживши, що при $2^k \leq n < 2^{k+1}$ виконується $n - 2^k = \sum\limits_{i=0}^{k-1} \varepsilon_i 2^i$ і тому маємо

$$\omega_n(x) = r_k(x) \omega_{n-2^k}(x).$$

Зокрема,

$$r_k(x) = \omega_{2^k}(x).$$

Зауваження 4.1. *Узагальнення функцій Уолша, як і самі функції Уолша, у точках розриву неперервні справа. Але класичні функції Уолша набувають лише двох значень 1 і -1, що не збереглося для щойно введеного їх узагальнення.*

Теорема 4.1. *Якщо $2^k \leq n < 2^{k+1}$, тобто*

$$n = 2^k + \varepsilon_{k-1} 2^{k-1} + \ldots + \varepsilon_1 2 + \varepsilon_0 2^0,$$

то узагальнена функція Уолша

$$\omega_n(x) = r_k(x) r_{k-1}^{\varepsilon_{k-1}}(x) \ldots r_0^{\varepsilon_0}(x)$$

на кожному циліндрі $(k+1)$-го рангу є сталою, причому на циліндрі $\Delta^{q_0^{-1}}_{c_1 c_2 \ldots c_k c_{k+1}}$ вона набуває значення

$$\omega_n(x) = (-1)^c 2^s q_0^c q_1^{s-c}, \tag{5}$$

де $s = 1 + \varepsilon_{k-1} + \ldots + \varepsilon_1 + \varepsilon_0$–кількість цифр "1"у зображенні числа n,
$c = \varepsilon_0 c_1 + \varepsilon_1 c_2 + \ldots + \varepsilon_{k-1} c_k + c_{k+1}$ – кількість j таких, що $\varepsilon_j = 1 = c_{j+1}$ серед $0, 1, \ldots, k$.

Доведення. Оскільки

$$r_i^{\varepsilon_i}(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad \varepsilon_i = 0, \\ r_i(x), & \text{якщо} \quad \varepsilon_i = 1, \end{cases}$$

то

$$r_i^{\varepsilon_i}(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad \varepsilon_i = 0, \\ 2q_1, & \text{якщо} \;\; c_{i+1} = 0 \, \wedge \, \varepsilon_i = 1, \\ -2q_0, & \text{якщо} \;\; c_{i+1} = 1 \, \wedge \, \varepsilon_i = 1. \end{cases}$$

Тоді при $\varepsilon_i = 1$

$$r_i^{\varepsilon_i}(x) = \begin{cases} 2q_1, & \text{якщо} \;\; x \in \Delta^{q_0^{-1}}_{c_1 \ldots c_i 0}, \\ -2q_1, & \text{якщо} \;\; x \in \Delta^{q_0^{-1}}_{c_1 \ldots c_i 1}, \end{cases}$$

а, отже, для $x \in \Delta^{q_0^{-1}}_{c_1 \ldots c_i c_{i+1}}$

$$r_i^{\varepsilon_i}(x) = (-1)^{\varepsilon_i \varepsilon_{i+1}} \cdot 2^{\varepsilon_i} q_0^{\varepsilon_i c_{i+1}} q_1^{\varepsilon_i - \varepsilon_i c_{i+1}}.$$

Тому для $x \in \Delta^{q_0^{-1}}_{c_1 \ldots c_i \ldots c_j}$ при $i < j$ маємо

$$r_i^{\varepsilon_i}(x) r_j^{\varepsilon_j}(x) = (-1)^{\varepsilon_i c_{i+1} + \varepsilon_j c_{j+1}} 2^{\varepsilon_i + \varepsilon_j} \cdot \\ \cdot q_0^{\varepsilon_i c_{i+1} + \varepsilon_j c_{j+1}} q_1^{(\varepsilon_i + \varepsilon_j) - (\varepsilon_i c_{i+1} + \varepsilon_j c_{j+1})}.$$

Звідки і слідує рівність (5). □

Теорема 4.2. *Для узагальненої функції Уолша ω_n при $2^k \leq n < 2^{k+1}$, тобто*

$$n = 2^k + \varepsilon_{k-1} 2^{k-1} + \ldots + \varepsilon_1 2 + \varepsilon_0 2^0$$

і кожного циліндра $\Delta^{q_0^{-1}}_{c_1 \ldots c_k c_{k+1}}$ має місце рівність

$$\int\limits_{x \in \Delta^{q_0^{-1}}_{c_1 \ldots c_k c_{k+1}}} \omega_n(x) dx = 0 = \int\limits_0^1 \omega_n(x) dx. \tag{6}$$

Доведення. Оскільки

$$\int\limits_{x\in\Delta^{q_0^{-1}}_{c_1\ldots c_k c_{k+1}}} \omega_n(x)dx = \int\limits_{x\in\Delta^{q_0^{-1}}_{c_1\ldots c_k 0}} \omega_n(x)dx + \int\limits_{x\in\Delta^{q_0^{-1}}_{c_1\ldots c_k 1}} \omega_n(x)dx,$$

то, враховуючи попередню теорему, маємо

$$\int\limits_{x\in\Delta^{q_0^{-1}}_{c_1\ldots c_k c_{k+1}}} \omega_n(x)dx = (-1)^c 2^s q_0^c q_1^{s-c}\cdot|\Delta^{q_0^{-1}}_{c_1\ldots c_k 0}| +$$

$$+ (-1)^{c+1} 2^s q_0^{c+1} q_1^{s-c-1}\cdot|\Delta^{q_0^{-1}}_{c_1\ldots c_k 1}| =$$

$$= \left((-1)^c 2^s q_0^c q_1^{s-c-1}\prod_{j=1}^{k} q_{c_j}\right)(q_1q_0 - q_0q_1) = 0.$$

Друга з рівності (6) є наслідком першої та адитивної властивості інтеграла. □

Зауваження 4.2. *Якщо $n < m$, $\left(1\varepsilon'_{k-1}\varepsilon'_{k-2}\ldots\varepsilon'_1\varepsilon'_0\right)_2$ – двійкове зображення числа n, а $(1\varepsilon_{m-1}\varepsilon_{m-2}\ldots\varepsilon_1\varepsilon_0)_2$ – двійкове зображення числа m і при цьому $\varepsilon_j\varepsilon'_i = 0$ для всіх $j \le k-1$, то очевидно, що добуток $\omega_n\omega_m$ функцій Уолша є функцією Уолша з номером $l = (1\varepsilon_{m-1}\ldots\varepsilon_{k+1}1\delta_{k-1}\delta_{k-1}\ldots\delta_1\delta_0)_2$, де $\delta_j = \varepsilon'_j + \varepsilon_j$, $j = \overline{1, k-1}$. Для таких n і m*

$$\int_0^1 \omega_n(x)\omega_m(x) = 0.$$

[1] *Беспалов М. С.* Перестановки системы Уолша, сохраняющие константы Лебега // Матем. заметки. – 2000. – том **68**. – выпуск **1**, С. 36–48.

[2] *Беспалов М. С.* Собственные подпространства дискретного преобразования Уолша // Пробл. передачи информ. – 2010. – том **46**, выпуск **3**, С. 60–79.

[3] *Беспалов М. С.* Явный вид ядра Дирихле для рядов и преобразований Уолша // Матем. сб. – 2005. – том **196**, номер **7**, С. 3–26.

[4] *Беспалов М. С., Скляренко В. А.* Функции Уолша и их приложения. – Владимир: Изд-во ВлГУ, 2012. — 35 с.

[5] *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша: теория и применение. – М.: Наука, 1987. – 344 с.

[6] *Працевитый Н. В.* Случайные величины с независимыми Q_2-символами // Асимптотические методы в исследовании стохастических моделей. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. – С. 92–102.

[7] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – К.: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. – 296 с.

[8] *Працьовитий М. В.* Геометрія класичного двійкового зображення дійсних чисел. – К.: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2012. – 68 с.

[9] *Rademacher H.* Einige Sätze *ü*ber Reihen von allgemeinen Orthogonal funktionen. – // Math. Ann. – 1922. – **87**. – P.112-138.

[10] *Walsh J. L.* A closed set of normal orthogonal funktions // Amer. J. Math. – 1923. – **45.** – P. 5–24.