Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2019, т. 16, № 3, 148–161

УДК 517.927

М.П. Мороз

НПУ імені М.П. Драгоманова, Київ; moroznik22@gmail.com

Числові характеристики випадкової величини, пов'язаної з представленням дійсних чисел рядами Остроградського-Серпінського-Пірса

It is known that any irrational number $x \in (0;1) \setminus \mathbb{Q} \equiv \Omega$ has a unique Ostrogradsky-Sierpinski-Pierce expansion:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_1(x) \cdot \ldots \cdot q_n(x)},$$

where $q_n(x) \in \mathbb{N}$, $q_{n+1}(x) > q_n(x)$, for all $n \in \mathbb{N}$. To represent an irrational number $x \in \Omega$ by Ostrogradsky-Serpinsky-Pierce expansion we have calculated numerical characteristics of the random variable

$$\xi(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n(X)},$$

where X is uniform distribution on Ω. A new method for calculating the mathematical expectation is proposed, which differs from the method described in [4], and we have calculated variance $D\xi$. We consider the random variables ξ_n as a generalization of the function ξ and we have calculated mathematical expectations $M\xi_n$ of them.

Відомо, що будь-яке ірраціональне число $x \in (0;1) \setminus \mathbb{Q} \equiv \Omega$ єдиним чином розкладається в ряд Остроградського-Серпінського-Пірса:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_1(x) \cdot \ldots \cdot q_n(x)},$$

де $q_n(x) \in \mathbb{N}$, $q_{n+1}(x) > q_n(x)$, для кожного $n \in \mathbb{N}$. Для зображення ірраціонального числа $x \in \Omega$ рядом Остроградського-Серпінського-Пірса обчислюються числові характеристики випадкової величини

$$\xi(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n(X)},$$

де X – рівномірно розподілена на Ω випадкова величина. Запропоновано новий спосіб обчислення математичного сподівання $M\xi$, відмінний від способу, що описаний в [4], та знайдено дисперсію $D\xi$. Також розглянуто випадкові величини ξ_n як узагальнення функції ξ та обчислено їхні математичні сподівання $M\xi_n$

1. Основний об'єкт дослідження та постановка задачі

Нехай $x \in \Omega = (0;1) \setminus \mathbb{Q}$. Тоді x єдиним чином можна представити у вигляді ряду Остроградського-Серпінського-Пірса:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{q_1(x) \cdot \ldots \cdot q_n(x)},$$

де $q_n(x) \in \mathbb{N}$, $q_{n+1}(x) > q_n(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Таким чином $q_n(x)$ є функцією від аргумента $x \in \Omega$, яка може набувати зчисленну кількість значень при кожному $n \in \mathbb{N}$.

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \lambda)$ – ймовірнісний простір, де $\mathcal{F}$ – σ-алгебра вимірних за Лебегом підмножин множини Ω, λ – міра Лебега. Тоді $q_n(x)$ – дискретна випадкова величина (вимірна функція) для кожного $n \in \mathbb{N}$.

На множині збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n(x)}$ визначимо функцію

$$\xi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n(x)},$$

яка є нашим основним об'єктом дослідження. В даній роботі ми доводимо, що функція $\xi(x)$ визначена (набуває скінченних значень) майже скрізь на $[0;1]$ та є випадковою величиною, обчислюємо її математичне сподівання та дисперсію, розглядємо випадкові величини ξ_n як узагальнення функції ξ та обчислюємо їхні математичні сподівання $M\xi_n$.

Зауваження 1. *Задача про знаходження математичного сподівання випадкової величини ξ була розв'язана в роботі [4]. Проте в цій роботі не висвітлено питання вимірності функції ξ, що є принциповим для наступного дослідження цієї функції. В даній роботі ми доводимо вимірність ξ та пропонуємо свій спосіб обчислення математичного сподівання $M\xi$, відмінний від запропонованого в роботі [4].*

2. Основні відомості про ряди Остроградського-Серпінського-Пірса та зображення ними дійсних чисел

Означення 1. *Рядом Остроградського-Серпінського-Пірса називається знакозмінний ряд виду*

$$\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_1 q_2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{q_1 q_2 \ldots q_n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{q_1 q_2 \ldots q_n},$$

де $q_n \in \mathbb{N}$, $q_{n+1} > q_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 1. *[1, с.22, с.144] Сума кожного ряду Остроградського-Серпінського-Пірса є ірраціональним числом з $(0;1)$. Будь-яке ірраціональне число x з $(0;1)$ можна* *єдиним чином представити у вигляді ряду Остроградського-Серпінського-Пірса, тобто існує єдина строго зростаюча послідовність натуральних чисел $(q_n(x))$ така, що*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{q_1(x) \cdot \ldots \cdot q_n(x)} \equiv \Delta^O_{q_1(x)\ldots q_n(x)\ldots}.$$

Скорочений (символічний) запис $\Delta^O_{q_1(x)\ldots q_n(x)\ldots}$ називається Δ^O-зображенням числа x, при цьому натуральне число $q_n(x)$ називається n-ною Δ^O-цифрою числа x. Кожна Δ^O-цифра є коректно означеною функцією числа, що представляється у вигляді ряду Остроградського-Серпінського-Пірса в силу єдиності такого представлення.

Означення 2. *Циліндром $\Delta^O_{c_1c_2\ldots c_m}$ рангу m з основою $c_1c_2\ldots c_m$, що породжений представленням чисел рядами Остроградського-Серпінського-Пірса, називається множина всіх чисел виду $\Delta^O_{c_1c_2\ldots c_m \alpha_{m+1}\alpha_{m+2}\ldots}$.*

Відомо [1], що різні Δ^O-циліндри або не перетинаються, або один з них є власною підмножиною іншого. При цьому $\varnothing \neq \Delta^O_{a_1a_2\ldots a_m} \subset \Delta^O_{b_1b_2\ldots b_n}$ тоді і тільки тоді, коли $n < m$ та $a_i = b_i$ $\forall i = 1, 2, ..., n$. Для міри Лебега Δ^O-циліндрів має місце співвідношення

$$\lambda\left(\Delta^O_{c_1c_2\ldots c_m}\right) = \frac{1}{c_1\ldots c_m\,(c_m+1)}.$$

3. Функція $\xi(x)$ як випадкова величина

Нехай маємо ймовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F}, \lambda)$, функція $q_n(x)$: $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ — n-на Δ^O-цифра числа x.

Теорема 2. *Функція $\frac{1}{q_n(x)}$ є випадковою величиною для* $\forall n \in \mathbb{N}$.

Доведення. Враховуючи припущення, що передують теоремі, лишилося показати, що функція $\frac{1}{q_n(x)}$ є вимірною, тобто що множина $\{x : \frac{1}{q_n(x)} \leq a\} \in \mathcal{F}$ для $\forall a \in \mathbb{R}$. Зрозуміло, що $\frac{1}{q_n(x)}$ може набувати тільки зліченну кількість значень, причому $0 < \frac{1}{q_n(x)} \leq 1$. Якщо $a \leq 0$, то $\{x : \frac{1}{q_n(x)} \leq a\} = \varnothing \in \mathcal{F}$. Якщо $a \geq 1$, то $\{x : \frac{1}{q_n(x)} \leq a\} = \Omega \in \mathcal{F}$.

Нехай $0 < a < 1$. Тоді функція $\frac{1}{q_n(x)}$ набуває зліченну кількість значень, що не перевищують a, а саме значень з множини $\{\frac{1}{k}, \frac{1}{k+1}, ...\}$, де $k \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ та $\frac{1}{k} \leq a < \frac{1}{k-1}$. Тоді

$$\{x : \frac{1}{q_n(x)} \leq a\} = \bigcup_{p=0}^{\infty}\{x : \frac{1}{q_n(x)} = \frac{1}{k+p}\} = \bigcup_{p=0}^{\infty}\{x : q_n(x) = k+p\} =$$

$$= \bigcup_{p=0}^{\infty}\left(\bigcup_{c_1<...<c_{n-1}<k+p} \Delta^O_{c_1...c_{n-1}(k+p)}\right).$$

Зрозуміло, що $\bigcup\limits_{c_1<...<c_{n-1}<k+p} \Delta^O_{c_1...c_{n-1}(k+p)}$ є скінченним об'єднанням циліндрів, кожен з яких є вимірною за Лебегом множиною. Тому $\bigcup\limits_{c_1<...<c_{n-1}<k+p} \Delta^O_{c_1...c_{n-1}(k+p)}$ теж вимірна множина. Звідси отримуємо, що й множина $\{x : \frac{1}{q_n(x)} \leq a\}$ є вимірною за Лебегом.

Отже, $\{x : \frac{1}{q_n(x)} \leq a\} \in \mathcal{F}, \forall a \in \mathbb{R}$, а тому функція $\frac{1}{q_n(x)}$ є випадковою величиною для кожного $n \in \mathbb{N}$. Теорему доведено.

Надалі нам знадобиться наступна теорема, яка має місце для інтеграла Лебега.

Теорема 3. *[2, с.303](Теорема Б. Леві) Нехай дано вимірний простір з мірою $(A, \mathcal{A}, \mu)$ та послідовність інтегровних функцій $f_n(x) : A \to \mathbb{R}$ таких, що*

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots \leq f_n(x) \leq \ldots$$

та $\exists K \in \mathbb{R} : \int\limits_A f_n(x)\, d\mu \leq K$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Тоді майже скрізь на A існує границя

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

причому функція $f(x)$ інтегровна на A та

$$\int\limits_A f_n(x)\,d\mu \to \int\limits_A f(x)\,d\mu.$$

Наслідок 4. *[2, с.305] Якщо $\psi_n(x) \geq 0$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_A \psi_n(x)\,d\mu <$ $+\infty$, то майже скрізь на A сходиться ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\psi_n(x)$ та* $\int\limits_A \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\psi_n(x)\right)d\mu = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_A \psi_n(x)\,d\mu.$

Нехай $B(k,t) = \sum\limits_{k<q_1<\ldots<q_m<k+t}\dfrac{1}{q_1\ldots q_m}$, де $t \in \mathbb{N}$, k – невід'ємне ціле число, а сума обчислюється по всеможливим послідовностям натуральних чисел $(q_i)_{i=1}^m$ таким, що $k < q_1 < \ldots < q_m < k+t$. При цьому кількість m елементів таких послідовностей набуває всеможливих допустимих значень.

Теорема 5. $B(k,t) = \sum\limits_{k<q_1<\ldots<q_m<k+t}\dfrac{1}{q_1\ldots q_m} = \dfrac{t-1}{k+1}.$

Доведення. Для доведення цієї рівності скористаємося методом математичної індукції. Нехай k – фіксоване ціле невід'ємне число, а t – довільне натуральне число.

Якщо $t=1$, то $B(k,1) = 0 = \dfrac{t-1}{k+1}$, оскільки в цьому випадку між k та $k+t$ не існує жодного натурального числа.

Якщо $t=2$, то $B(k,2) = \dfrac{1}{k+1} = \dfrac{t-1}{k+1}$.

Якщо $t=3$, то $B(k,3) = \dfrac{1}{k+1} + \dfrac{1}{k+2} + \dfrac{1}{(k+1)(k+2)} =$
$= \dfrac{2}{k+1} = \dfrac{t-1}{k+1}$.

Як бачимо, для перших трьох натуральних t твердження, яке ми доводимо, виконується. Припустимо, що при $t = s$ має місце рівність $B(k, s) = \dfrac{s-1}{k+1}$. Тоді при $t = s+1$ отримаємо

$$\begin{aligned} B(k, s+1) &= B(k, s) + \frac{1}{k+s} + B(k, s) \cdot \frac{1}{k+s} = \\ &= \frac{s-1}{k+1} + \frac{1}{k+s} + \frac{s-1}{k+1} \cdot \frac{1}{k+s} = \frac{s}{k+1} = \frac{t-1}{k+1}. \end{aligned}$$

Отже, в силу принципу математичної індукції, $B(k, t) = \dfrac{t-1}{k+1}$ для кожного натурального t та кожного невід'ємного цілого k.

Теорема 6. *Ряд* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n(x)}$ *збігається майже скрізь (в сенсі міри Лебега) на множині* Ω.

Доведення. Розглянемо ймовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F}, \lambda)$.

Покажемо, що ряд $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega} \frac{1}{q_k(x)}\, d\lambda$ є збіжним.

$$\int\limits_{\Omega} \frac{1}{q_1(x)}\, d\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{i} \cdot \lambda(\Delta_i^O) \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{i} \cdot \frac{1}{i(i+1)} \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2(i+1)};$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} \int\limits_{\Omega} \frac{1}{q_k(x)}\, d\lambda &= \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{q_k=k}^{\infty} \left(\frac{1}{q_k} \cdot \sum_{0<q_1<\ldots<q_k} \frac{1}{q_1 \ldots q_{k-1} q_k (q_k+1)} \right) = \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{q_k=k}^{\infty} \left(\frac{1}{q_k^2(q_k+1)} \cdot \sum_{0<q_1<\ldots<q_k} \frac{1}{q_1 \ldots q_{k-1}} \right) = \\ &= \sum_{q_k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{q_k^2(q_k+1)} \cdot \sum_{0<q_1<\ldots<q_k} \frac{1}{q_1 \ldots q_{k-1}} \right). \end{aligned}$$

В останньому рядку попередньої формули число k як порядковий номер цифри q_k не є фіксованим. Тому згідно з попередніми позначеннями та теоремою 5

$$\sum_{0<q_1<\ldots<q_k} \frac{1}{q_1 \ldots q_{k-1}} = B(0, q_k) = q_k - 1.$$

Таким чином

$$\sum_{k=2}^{\infty} \int\limits_{\Omega} \frac{1}{q_k(x)} \, d\lambda = \sum_{q_k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{q_k^2(q_k+1)} \cdot B(0, q_k) \right) =$$

$$= \sum_{q_k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{q_k^2(q_k+1)} \cdot (q_k - 1) \right) = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{i-1}{i^2(i+1)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i-1}{i^2(i+1)}.$$

Остаточно отримуємо, що

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Omega} \frac{1}{q_k(x)} \, d\lambda = \int_{\Omega} \frac{1}{q_1(x)} \, d\lambda + \sum_{k=2}^{\infty} \int_{\Omega} \frac{1}{q_k(x)} \, d\lambda =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2(i+1)} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i-1}{i^2(i+1)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{i^2(i+1)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} = 1.$$

Отже, згідно з наслідком з теореми Б. Леві, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{q_n(x)}$ збігається майже скрізь на множині Ω, тобто міра Лебега підмножини Ω, на якій цей ряд розбігається, рівна 0. При цьому

$$\int\limits_{\Omega} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n(x)} \right) d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega} \frac{1}{q_n(x)} \, d\lambda = 1.$$

Теорему доведено.

Позначимо через T підмножину множини Ω, на якій ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{q_n(x)}$ розбігається. Згідно з попередньою теоремою, $\lambda(T) = 0$.

Розглянемо множину $\Omega^* = \Omega \backslash T$, $\lambda(\Omega^*) = \lambda(\Omega) = 1$. Нехай $\mathcal{F}^*$ – σ-алгебра підмножин множини Ω^*, вимірних за Лебегом. Таким чином маємо, що $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, \lambda)$ – ймовірнісний простір.

Розглянемо функцію $\xi : \Omega^* \to \mathbb{R}$ таку, що

$$\xi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n(x)}.$$

Використовуючи попередні результати, бачимо, що функція $\xi(x)$ є вимірною, оскільки є границею послідовності вимірних функцій, що монотонно зростає в кожній точці області визначення [3, с.133].

4. Числові характеристики випадкової величини ξ

Теорема 7. *Математичне сподівання $M\xi$ випадкової величини ξ дорівнює 1.*

Доведення. Оскільки $M\xi = \int\limits_{\Omega^*} \xi(x)\, d\lambda$, то, враховуючи проміжні результати, одержані при доведенні теореми 4, отримуємо, що

$$M\xi = \int\limits_{\Omega^*} \xi(x)\, d\lambda = \int\limits_{\Omega^*} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n(x)} \right) d\lambda = \int\limits_{\Omega} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n(x)} \right) d\lambda = 1.$$

Теорему доведено.

Теорема 8. *Дисперсія $D\xi$ випадкової величини ξ дорівнює $2 - \zeta(2)$, де $\zeta(2)$ – значення ζ-функція Рімана в точці 2.*

Доведення. Оскільки має місце формула $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$, то

$$D\xi = M\xi^2 - 1.$$

Бачимо, що обчислення дисперсії зводиться до обчислення математичного сподівання випадкової величини ξ^2.

$$(\xi(x))^2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n(x)}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n^2(x)} + 2 \cdot \sum_{\substack{k,m\in\mathbb{N}\\ k<m}} \frac{1}{q_k(x)q_m(x)}.$$

Кожна з двох сум в останній рівності є вимірною функцією, яка приймає на Ω^* тільки скінченні значення, а тому вони є випадковими величинами. При цьому кожен доданок, що входить до цих сум, також є випадковою величиною. Тому

$$M\xi^2 = \sum_{n=1}^{\infty} M\frac{1}{q_n^2} + 2 \cdot \sum_{\substack{k,m\in\mathbb{N}\\ k<m}} M\frac{1}{q_k q_m}.$$

Знайдемо значення суми $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M\frac{1}{q_n^2}$:

$$M\frac{1}{q_1^2} = \sum_{q_1=1}^{\infty}\left(\frac{1}{q_1^2}\cdot\lambda\left(\Delta^O_{q_1}\right)\right) = \sum_{q_1=1}^{\infty}\left(\frac{1}{q_1^2}\cdot\frac{1}{q_1(q_1+1)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3(n+1)}.$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} M\frac{1}{q_n^2} &= \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{q_n=n}^{\infty}\left(\frac{1}{q_n^2}\cdot\sum_{0<q_1<\ldots<q_{n-1}<q_n}\lambda(\Delta^O_{q_1\ldots q_{n-1}q_n})\right) = \\
&= \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{q_n=n}^{\infty}\left(\frac{1}{q_n^2}\cdot\sum_{0<q_1<\ldots<q_n}\frac{1}{q_1\ldots q_{n-1}q_n(q_n+1)}\right) = \\
&= \sum_{q_n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{q_n^3(q_n+1)}\cdot\sum_{0<q_1<\ldots<q_n}\frac{1}{q_1\ldots q_{n-1}}\right) = \\
&= \sum_{q_n=2}^{\infty}\frac{q_n-1}{q_n^3(q_n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n^3(n+1)}.
\end{aligned}$$

Таким чином отримуємо, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} M\frac{1}{q_n^2} = M\frac{1}{q_1} + \sum_{n=2}^{\infty} M\frac{1}{q_n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^3(n+1)} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \zeta(2) - 1.$$

Тепер знайдемо значення суми $\sum\limits_{\substack{k,m\in\mathbb{N}\\ k<m}} M\frac{1}{q_k q_m}$:

$$\sum_{\substack{k,m\in\mathbb{N}\\ k<m}} M\frac{1}{q_k q_m} = \sum_{q_1<\ldots<q_k<\ldots<q_m} \left(\frac{1}{q_k q_m}\cdot\lambda\left(\Delta^{O}_{q_1\ldots q_k\ldots q_m}\right)\right) =$$
$$= \sum_{q_1<\ldots<q_k<\ldots<q_m} \frac{1}{q_1\ldots q_{k-1}q_k^2 q_{k+1}\ldots q_{m-1}q_m^2(q_m+1)} =$$
$$= \sum_{q_k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{q_k^2}\cdot\left(1+\sum_{q_1<\ldots<q_k}\frac{1}{q_1\ldots q_{k-1}}\right)\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\sum_{q_k<\ldots<q_m}\frac{1}{q_{k+1}\ldots q_{m-1}q_m^2(q_m+1)}\right) =$$
$$= \sum_{q_k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{q_k}\cdot\sum_{q_m=q_k+1}^{\infty}\left(\frac{1}{q_m^2(q_m+1)}\cdot\right.\right.$$
$$\left.\left.\cdot\left(1+\sum_{q_k<\ldots<q_m}\frac{1}{q_{k+1}\ldots q_{m-1}}\right)\right)\right)$$

В сумі $1+\sum\limits_{q_1<\ldots<q_k}\frac{1}{q_1\ldots q_{k-1}}$ перший доданок відповідає випадку, коли перед елементом q_k не міститься жодних інших елементів, тобто коли $k=1$. Наступні доданки (вони знаходяться під знаком суми) відповідають випадкам, коли перед q_k міститься

принаймні один елемент. При доведенні теореми 4 було показано, що $\sum\limits_{q_1<\ldots<q_k} \dfrac{1}{q_1 \ldots q_{k-1}} = q_k - 1.$

В сумі $1+\sum\limits_{q_k<\ldots<q_m} \dfrac{1}{q_{k+1} \ldots q_{m-1}}$ перший доданок відповідає випадку, коли між елементами q_k та q_m не міститься жодного елемента. Наступні доданки (вони знахордяться під знаком суми) відповідають випадкам, коли між q_k та q_m міститься принаймні один елемент.

Тоді ми отримуємо наступні рівності:

$$\sum_{\substack{k,m\in\mathbb{N}\\k<m}} M\frac{1}{q_kq_m} = \sum_{q_k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{q_k}\cdot\sum_{q_m=q_k+1}^{\infty}\left(\frac{1}{q_m^2(q_m+1)}\cdot\left(1+\frac{q_m-q_k-1}{q_k+1}\right)\right)\right) =$$

$$= \sum_{q_k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{q_k}\cdot\sum_{q_m=q_k+1}^{\infty}\left(\frac{1}{q_m^2(q_m+1)}\cdot\frac{q_m}{q_k+1}\right)\right) =$$

$$= \sum_{q_k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{q_k(q_k+1)}\cdot\sum_{q_m=q_k+1}^{\infty}\frac{1}{q_m(q_m+1)}\right) =$$

$$= \sum_{q_k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{q_k(q_k+1)}\cdot\frac{1}{q_k+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)^2} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2} = 1 - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 2-\zeta(2).$$

Остаточно отримуємо, що

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} M\frac{1}{q_n^2} + 2\cdot\sum_{\substack{k,m\in\mathbb{N}\\k<m}} M\frac{1}{q_kq_m} - 1 =$$

$$= \zeta(2) - 1 + 2\cdot(2-\zeta(2)) - 1 = 2-\zeta(2).$$

Теорему доведено.

5. Узагальнення випадкової величини ξ

Розглянемо випадкову величину $\xi_n : \Omega^* \to \mathbb{R}$ таку, що

$$\xi_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q_k(x) + n},$$

де n – деяке фіксоване ціле невід'ємне число. Вона є узагальненням випадкової величини ξ. Зрозуміло, що для довільного $x \in \Omega^*$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q_k(x)+n}$ збігається, оскільки збігається ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q_k(x)}$.

Знайдемо математичне сподівання $M\xi_n$.

Провівши аналогічні міркування до тих, що використані при доведенні теорем 4 та 5 (ми їх тут опускаємо), отримуємо, що

$$M\xi_n = \int\limits_{\Omega^*} \xi_n(x)\, d\lambda = \int\limits_{\Omega^*} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q_k(x) + n} \right) d\lambda = \int\limits_{\Omega} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q_k(x) + n} \right) d\lambda =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega} \frac{1}{q_k(x) + n}\, d\lambda = \int\limits_{\Omega} \frac{1}{q_1(x) + n}\, d\lambda + \sum_{k=2}^{\infty} \int\limits_{\Omega} \frac{1}{q_k(x) + n}\, d\lambda =$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)(i+n)} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i-1}{i(i+1)(i+n)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i+1)(i+n)}.$$

При $n = 0$ отримуємо, що $\xi_0 = \xi$, а тому $M\xi = M\xi_0 = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i+1)i} = 1$, що узгоджується з теоремою 5.

При $n = 1$ отримуємо, що $M\xi_1 = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i+1)^2} = \zeta(2) - 1$.

При $n \geq 2$ отримуємо, що

$$
\begin{aligned}
M\xi_n &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i+1)(i+n)} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{n-1}{(i+1)(i+n)} = \\
&= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i+n-i-1}{(i+1)(i+n)} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i+n} \right) = \\
&= \frac{1}{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \right) = \frac{H\,(n) - 1}{n-1},
\end{aligned}
$$

де $H\,(n) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ – n-не гармонічне число.

Література

[1] Барановський О.М., Працьовитий М.В., Торбін Г.М. *Ряди Остроградського-Серпінського-Пірса та їхні застосування*, Наукова Думка, Київ, 2013.

[2] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* – М.:Наука, 1976. – 542 с.

[3] Смирнов В.И. *Курс высшей математики*, Т. 5, Наука, Москва, 1974.

[4] Shallit J.O. *Metric theory of Pierce expansions*, Fibonacci Quart, **24** (1986), no. 1, 2–40.