Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2019, т. 16, № 3, 7–18

УДК 511.72

М. В. Працьовитий, Д. М. Карвацький

Інститут математики НАН України, Київ;
karvatsky@imath.kiev.ua

Властивості множини неповних сум одного ряду, члени якого утворюють узагальнену послідовність Фібоначчі

In this paper we study properties of one positive series, whose terms are elements of generalized Fibonacci sequence satisfying condition $u_{n+2} = \frac{u_{n+1}}{4} + \frac{u_n}{8}$. We prove that the set of incomplete sums of this series is a nowhere dense set of positive Lebesgue measure.

У статті вивчаються властивості одного ряду, члени якого утворюють узагальнену послідовність Фібоначчі, для якої виконується умова $u_{n+2} = \frac{u_{n+1}}{4} + \frac{u_n}{8}$. Доведено, що множина неповних сум такого ряду є ніде не щільною множиною додатної міри Лебега.

1. Вступ

Класична послідовність Фібоначчі та її узагальнення мають широке застосування у різних розділах математики. Зокрема, вони використовувалися для представлення дійсних чисел [7, 9], дослідження стохастичних випадкових величин [6], вивчення об'єктів зі складною локальною будовою [4, 8].

Означення 1. *Послідовність дійсних чисел* $(u_n) \equiv (u_n)_{n=1}^{\infty}$, *яка має властивість*

$$u_{n+2} = pu_{n+1} + su_n, \tag{1}$$

де u_1, u_2, p, s *— фіксовані дійсні числа, називатимемо* узагальненою послідовністю Фібоначчі.

Узагальнена послідовність Фібоначчі є чотирьохпараметричним об'єктом, оскільки з (1) зрозуміло, що вираз її загального члена залежить від параметрів u_1, u_2, p, s. Тривіальним прикладом узагальненої послідовності Фібоначчі є $(0) = (0, 0, 0, \ldots)$ — нуль-послідовність. Очевидно, що коли $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ — узагальнена послідовність Фібоначчі, то $(u_n)_{n=m}^{\infty}$ — теж узагальнена послідовність Фібоначчі. Прикладами узагальнених послідовностей Фібоначчі є:

1. класична послідовність Фібоначчі ($u_1 = 0, u_2 = p = s = 1$);
2. довільна геометрична прогресія ($s = 0$);
3. послідовність чисел Люка ($u_1 = 2, u_2 = p = s = 1$);
4. послідовність чисел Якобсталя ($u_1 = s = 2, u_2 = p = 1$);
5. послідовність чисел Пелля ($u_1 = u_2 = p = 1, s = 2$).

Теорема 1. *Для загального члена узагальненої послідовності Фібоначчі має місце рівність*

$$u_n = \left[\begin{array}{ll} \dfrac{\Phi^{n-1}\left(u_2 - u_1\Psi\right) - \Psi^{n-1}\left(u_2 - u_1\Phi\right)}{\Phi - \Psi} & \text{при} \;\; \Phi \neq \Psi, \\ \Phi^{n-1}\left(u_1 + (n-1)\left(\dfrac{u_2}{\Phi} - u_1\right)\right) & \text{при} \;\; \Phi = \Psi, \end{array} \right.$$

де

$$\Phi = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4s}}{2} \quad \text{та} \quad \Psi = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4s}}{2}.$$

2. Про один частковий випадок

Розглянемо одну узагальнену послідовність Фібоначчі для якої початкові параметри мають наступні значення: $u_1 = 0, u_2 = \frac{3}{4}$, $p = \frac{1}{4}$, $s = \frac{1}{8}$. Для членів такої послідовності буде виконуватися рівність

$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1}}{4} + \frac{u_n}{8}, \forall n \in N.$$

З іншого боку, загальний член такої послідовності, враховуючи Теорему 1, можна записати наступним чином

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{-1}{4}\right)^{n-1}.$$

Ряд, що складається з елементів послідовності (u_n), тобто має вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{-1}{4}\right)^{n-1}\right], \tag{2}$$

буде збіжним рядом, що володіє нетривіальними властивостями (співвідношеннями між членами та залишками ряду).

Теорема 2. *Для ряду* (2) *справедлива наступна рівність*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \frac{u_1(1-p) + u_2}{1-p-s} = \frac{6}{5}.$$

Теорема 3. *Для залишків ряду* (2) *справедлива наступна рівність*

$$r_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} u_n = \frac{u_{k+1} + s u_k}{1-p-s} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{5}\left(\frac{-1}{4}\right)^{n-1}.$$

Доведення. Використовуючи теорему 1, можна записати наступне

$$r_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} u_n = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{\Phi^{n-1}\left(u_2 - u_1\Psi\right) - \Psi^{n-1}\left(u_2 - u_1\Phi\right)}{\Phi - \Psi}.$$

Врахувавши початкові параметри $p = \frac{1}{4}, s = \frac{1}{8}, u_1 = 0, u_2 = \frac{3}{4}$ можна визначити, що $\Phi = \frac{1}{2}$ та $\Psi = -\frac{1}{4}$. Число r_k є сумою залишків двох рядів, члени яких є елементами збіжних геометричних прогресій зі знаменниками Φ та Ψ відповідно, звідки отримаємо

$$r_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{(u_2 - u_1\Psi)}{\Phi - \Psi}\Phi^{n-1} - \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{(u_2 - u_1\Phi)}{\Phi - \Psi}\Psi^{n-1} =$$

$$= \frac{(u_2 - u_1\Psi)\Phi^k}{(\Phi - \Psi)(1 - \Phi)} - \frac{(u_2 - u_1\Phi)\Psi^k}{(\Phi - \Psi)(1 - \Psi)} =$$

$$= \frac{u_{k+1} + \Phi\Psi u_k}{(1 - \Psi)(1 - \Phi)}.$$

Врахувавши, що $\Phi \cdot \Psi = -s$ та $\Phi + \Psi = p$, останню рівність можна записати наступним чином

$$r_k = \frac{u_{k+1} + \Phi\Psi u_k}{1 - (\Psi + \Phi) + \Phi\Psi}) = \frac{u_{k+1} + su_k}{1 - p - s} == \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{5}\left(\frac{-1}{4}\right)^{n-1}.$$

Теорема 4. *Для членів та залишків ряду* (2) *справедливі наступні нерівності*

$$\left[\begin{array}{ll} u_n < r_n, & \text{якщо } \; n - \text{непарне}, \\ u_n > r_n, & \text{якщо } \; n - \text{парне}. \end{array}\right.$$

Доведення. Використовуючи теореми 1 та 3 для непарного номера n справедливою буде нерівність

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = r_n.$$

В свою чергу для парного номера n виконується нерівність

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = r_n.$$

Наслідок 5. *Справедливі наступні рівності*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} \quad \text{та} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{r_n} = 1.$$

3. Властивості множини неповних сум

Означення 2. *Якщо* $M \in 2^N$, *або іншими словами* $M \subseteq N$ *(*N *— множина натуральних чисел), то число*

$$x = x\,(M) = \sum_{n \in M} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n u_n, \tag{3}$$

де

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, \textit{при} \;\; n \in M, \\ 0, \textit{при} \;\; n \notin M, \end{cases}$$

називається неповною сумою ряду.

З робіт [2] та [5] відомо, що множина неповних сум довільного збіжного знакододатного ряду є однією з трьох типів: скінченним об'єднанням відрізків, множиною канторівського типу або канторвалом.

У роботі [9] вивчалися тополого-метричні та фрактальні властивості множини неповних сум збіжних додатних рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \sum_{n=3}^{\infty} p a_{n-1} + s a_{n-2}, \;\; a_1, a_2, p, s \in R^+, \tag{4}$$

члени яких утворювали узагальнену послідовність Фібоначчі з додатними початковими параметрами.

Теорема 6 ([9]). *Якщо для ряду* (4) *виконується система нерівностей*

$$\begin{cases} 0 < p < 1, \\ \max\{0, \frac{1}{4} - \frac{p}{2}\} < s < 1 - p, \end{cases} \tag{5}$$

то ряд збігається, а множина його неповних сум являє собою скінченне об'єднання відрізків.

Теорема 7 ([9]). *Якщо для ряду* (4) *виконується система нерівностей*

$$\begin{cases} 0 < p < \frac{1}{2}, \\ 0 < s < \frac{1}{4} - \frac{p}{2}, \end{cases} \tag{6}$$

то ряд буде збігатися, а множина його неповних сум буде:

1. *досконалою;*
2. *ніде не щільною;*
3. *нульової міри Лебега;*
4. *розмірності Гаусдорфа-Безиковича*

$$\alpha_0 = -\log_\Phi 2.$$

Залишається відкритим питання про тип та властивості множини неповних сум ряду при умові $s = \frac{1}{4} - \frac{p}{2}$ $(u_1^2 + u_2^2 \neq 0)$, оскільки наявні на сьогоднішній день результати та методи дослідження не дають відповіді на це питання.

Означення 3. Циліндром *k-ого рангу з основою $c_1 c_2 \ldots c_k$, де $c_i \in \{0, 1\}$, називається множина $\Delta'_{c_1 c_2 \ldots c_k}$, яка містить всі неповні суми ряду* (2) *виду*

$$\sum_{n=1}^{k} c_n u_n + \sum_{n=k+1}^{\infty} \varepsilon_n u_n, \ \ де \ \ \varepsilon_n \in \{0, 1\}.$$

Означення 4. Циліндричним відрізком *рангу* k *з основою $c_1 c_2 \ldots c_k$ називається відрізок*

$$\Delta_{c_1 c_2 \ldots c_k} = \left[\inf \Delta'_{c_1 c_2 \ldots c_k}, \sup \Delta'_{c_1 c_2 \ldots c_k}\right] = \left[\sum_{n=1}^{k} c_n u_n, r_k + \sum_{n=1}^{k} c_n u_n\right].$$

В залежності від (u_n) і набору $c_1 c_2 \ldots c_k$ можливі випадки, коли $\Delta'_{c_1 c_2 \ldots c_k}$ і $\Delta_{c_1 c_2 \ldots c_k}$ співпадають та не співпадають, але завжди $\Delta'_{c_1 c_2 \ldots c_k} \subset \Delta_{c_1 c_2 \ldots c_k}$. Тополого-метричні властивості множини неповних сум ряду суттєво залежать від його властивостей, зокрема, від швидкості збіжності та від співвідношення між членами та залишками ряду ($a_n > r_n$ чи $a_n \leq r_n$).

Лема 8. *Циліндричні множини, що відповідають ряду* (2) *мають наступні властивості:*

1. $\Delta_{c_1c_2\ldots c_k} = \left[\sum\limits_{i=1}^{k} c_i u_i, \sum\limits_{i=1}^{k} c_i u_i + r_k\right]$;
2. $|\Delta_{c_1c_2\ldots c_k}| = r_k \to 0, for\ k \to \infty$;
3. $\Delta_{c_1c_2\ldots c_k} \subset \Delta_{c_1c_2\ldots c_k0} \bigcup \Delta_{c_1c_2\ldots c_k1}$,
   $\Delta'_{c_1c_2\ldots c_k} = \Delta'_{c_1c_2\ldots c_k0} \bigcup \Delta'_{c_1c_2\ldots c_k1}$;
4. $\inf \Delta_{c_1c_2\ldots c_k} = \inf \Delta_{c_1c_2\ldots c_k0} < \inf \Delta_{c_1c_2\ldots c_k1}$,
   $\sup \Delta_{c_1c_2\ldots c_k} = \sup \Delta_{c_1c_2\ldots c_k1} > \sup \Delta_{c_1c_2\ldots c_k0}$;
5. $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \Delta_{c_1c_2\ldots c_k} = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \Delta'_{c_1c_2\ldots c_k} \equiv \Delta_{c_1c_2\ldots c_k\ldots} = x \subset [0, r]$;
6. $\dfrac{|\Delta_{c_1c_2\ldots c_kc}|}{|\Delta_{c_1c_2\ldots c_k}|} = \dfrac{r_{k+1}}{r_{k+1} + u_{k+1}} = \dfrac{1}{\delta_{k+1} + 1}$, *де* $\delta_{k+1} = \dfrac{u_{k+1}}{r_{k+1}}$;
7. $\Delta_{c_1c_2\ldots c_k} = \Delta_{s_1s_2\ldots s_k} \leftrightarrow c_i = s_i, i = \overline{1, k}$;
8. $O^{k+1}_{c_1\ldots c_k}(1, 0) = \Delta_{c_1c_2\ldots c_k1} \bigcap \Delta_{c_1c_2\ldots c_k0} =$
   $$= \begin{cases} \left[\sum\limits_{n=1}^{k} c_n u_n + u_{n+1}, \sum\limits_{n=1}^{k} c_n u_n + r_{n+1}\right], & \text{якщо } k \text{ -парне}, \\ \emptyset, & \text{якщо } k \text{ -непарне}; \end{cases}$$
9. *Для довільного парного номера* k *виконується*
   $\Delta_{c_1c_2\ldots c_k1} \bigcap \Delta_{c_1c_2\ldots c_k0} = \Delta_{c_1c_2\ldots c_k10} \bigcap \Delta_{c_1c_2\ldots c_k01}$;
10. $G^{k+1}_{c_1\ldots c_k}(1, 0) = \Delta_{c_1c_2\ldots c_k} \setminus \left(\Delta_{c_1c_2\ldots c_k1} \bigcup \Delta_{c_1c_2\ldots c_k0}\right) =$
    $$= \begin{cases} \left(\sum\limits_{n=1}^{k} c_n u_n + r_{n+1}, \sum\limits_{n=1}^{k} c_n u_n + u_{n+1}\right), & \text{якщо } k\text{-непарне}, \\ \emptyset, & \text{якщо } k\text{-парне}; \end{cases}$$
11. *Для довільного натурального* $k > 2$ *виконується*
    $G^{k+2}_{c_1\ldots c_k}(01, 00) \bigcap G^{k+2}_{c_1\ldots c_k}(10, 11) = \emptyset$;
12. *Для довільного натурального* $k > 2$ *виконується*
    $\left(G^{k+2}_{c_1\ldots c_k}(01, 00) \bigcup G^{k+2}_{c_1\ldots c_k}(10, 11)\right) \bigcap O^{k+1}_{c_1\ldots c_k}(1, 0) = \emptyset$.

Лема 9. *Для довільного непарного номера n, справедлива наступна нерівність:*

$$u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{2n-2}<u_n<u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{2n-1}.$$

Доведення. Враховуючи теореми 1 та 3, можна записати наступне

$$u_n+u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{2n-2}+u_{2n-1}=r_n-r_{2n-1}=$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{5}\left(\frac{-1}{4}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2}-\frac{1}{5}\left(\frac{-1}{4}\right)^{2n-2}=$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n-2}>$$
$$>\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=u_n.$$

З іншого боку

$$u_n+u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{2n-3}+u_{2n-2}=r_n-r_{2n-2}=$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{5}\left(\frac{-1}{4}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-3}-\frac{1}{5}\left(\frac{-1}{4}\right)^{2n-3}=$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}-2\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n-3}<$$
$$<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=u_n.$$

Лема 10. *Для довільного перетину циліндрів непарного рангу справедливі наступні твердження*

$$O^n_{c_1\ldots c_{n-1}}(0,1)=\Delta_{c_1\ldots c_{n-1}0\underbrace{1\ldots1}_{m}}\bigcap\Delta_{c_1\ldots c_{n-1}1\underbrace{0\ldots0}_{m}}\ \textit{при}\ m\le n-2,$$

$$O^n_{c_1\ldots c_{n-1}}(0,1)\ne\Delta_{c_1\ldots c_{n-1}0\underbrace{1\ldots1}_{m}}\bigcap\Delta_{c_1\ldots c_{n-1}1\underbrace{0\ldots0}_{m}}\ \textit{при}\ m>n-2.$$

Доведення. Враховуючи лему 9 та властивості циліндричних множин легко довести, що для $m \leq n-2$

$$\max \Delta_{c_1 \ldots c_{n-1} 1 \underbrace{0 \ldots 0}_{n-2}} > \max O^{n}_{c_1 \ldots c_{n-1}}(0,1),$$

$$\min \Delta_{c_1 \ldots c_{n-1} 0 \underbrace{1 \ldots 1}_{n-2}} < \min O^{n}_{c_1 \ldots c_{n-1}}(0,1).$$

З іншого боку для $m > n-2$ матимемо

$$\max \Delta_{c_1 \ldots c_{n-1} 1 \underbrace{0 \ldots 0}_{n-1}} < \max O^{n}_{c_1 \ldots c_{n-1}}(0,1),$$

$$\min \Delta_{c_1 \ldots c_{n-1} 0 \underbrace{1 \ldots 1}_{n-1}} > \min O^{n}_{c_1 \ldots c_{n-1}}(0,1).$$

Це і доводить правильність теореми.

Лема 11. *Для довільного непорожнього $O^{n+1}_{c_1 \ldots c_n}(0,1)$ існує натуральне число m та набір $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_m$, де $\alpha_i \in \{0,1\}$, $\beta_i \in \{0,1\}$, $i = \overline{1,m}$, такі що*

$$G^{n+m+1}_{c_1 \ldots c_n 1 \alpha_1 \ldots \alpha_m}(0,1) \bigcap G^{n+m+1}_{c_1 \ldots c_n 0 \beta_1 \ldots \beta_m}(0,1) \in O^{n+1}_{c_1 \ldots c_n}(0,1).$$

Доведення. Покажемо, що існує натуральне число m та набір цифр $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_m$, де $\alpha_i \in \{0,1\}$, $\beta_i \in \{0,1\}$, $i = \overline{1,m}$ такі, що

$$\min G^{n+m+1}_{c_1 \ldots c_n 0 \beta_1 \ldots \beta_m} < \min G^{n+m+1}_{c_1 \ldots c_n 1 \alpha_1 \ldots \alpha_m} < \max G^{n+m+1}_{c_1 \ldots c_n 0 \beta_1 \ldots \beta_m} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < u_{n+1} + \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i - \beta_i) u_{n+1+i} < u_{n+m+2} - r_{n+m+2}.$$

Оскільки $u_{n+1} < r_{n+1}$, то враховуючи лему 9, ми можемо знайти $\widetilde{m}$ ($\widetilde{m} > n+1$) таке, що

$$u_{n+1} - u_{n+2} - u_{n+3} - \cdots - u_{n+\widetilde{m}} < 0.$$

Враховуючи, що $u_{n+m+2}-r_{n+m+2}>0$ ми бачимо, що існує набір $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_m$, де $\alpha_i \in \{0,1\}$ та $\beta_i \in \{0,1\}$, $i=\overline{1,m}$ такий, що

$$0 < u_{n+1} + \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i - \beta_i) u_{n+1+i} < u_{n+m+2} - r_{n+m+2}.$$

Наслідок 12. *(лема 9, 10, 11) Будь-який перетин циліндрів непарного рангу* $O^{n+1}_{c_1c_2c_3\ldots c_n}(0,1)$ *повністю не може належати множині неповних сум ряду* (2).

Теорема 13. *Множина неповних сум ряду* (2) *є досконалою ніде не щільною множиною додатної міри Лебега.*

Доведення. Легко довести, що множина неповних сум збіжного додатного ряду є досконалою (замкненою, без ізольованих точок). Позначимо через G суму довжин усіх щілин, що утворюються між циліндрами парних рангів. Очевидно, що міра Лебега множини неповних сум ряду (2) буде більшою за

$$L(\Delta') \geq r - G = \sum_{n=1}^{\infty} u_n - G.$$

Враховуючи, що довжина дір, які утворюються на парних місцях дорівнює $(u_{2n}-r_{2n})$ можна записати наступне

$$r - G = r - 2\cdot(u_2 - r_2) - 2^3\cdot(u_4 - r_4) - \cdots - 2^{2n-1}\cdot(u_{2n} - r_{2n}) - \cdots =$$

$$= r - 2\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{4} - 2^3\cdot\frac{6}{5}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3 - 2^5\cdot\frac{6}{5}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^5 - \cdots - 2^{2n-1}\cdot\frac{6}{5}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{2n-1} - \cdots =$$

$$= \frac{6}{5}\cdot\left(1 - 2\cdot\frac{1}{4} - 2^3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3 - \cdots - 2^{2n-1}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{2n-1} - \ldots\right) =$$

$$= \frac{6}{5}\cdot\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right) = \frac{6}{5}\cdot\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{5}.$$

Таким чином, міра Лебега множини неповних сум ряду є не меншою від числа $\frac{2}{5}$.

Доведемо тепер ніде не щільність множини Δ'. Припустимо, що існує деякий відрізок $[a, b]$, що належить множині неповних сум Δ'. Очевидно, що можна підібрати набір чисел $c_1, c_2, \ldots, c_k$ для якого

$$a < \sum_{n=1}^{k} c_n u_n < b, \quad \max\{u_k, r_k\} < b - \sum_{n=1}^{k} c_n u_n.$$

Іншими словами, існує циліндричний відрізок $k-$ого рангу $\Delta_{c_1 \ldots c_k}$, який буде належати відрізку $[a, b]$.

Якщо k є парним числом, то з властивостей циліндричних множин слідує, що $G^{k+1}_{c_1 \ldots c_k}(0,1) \subset \Delta_{c_1 \ldots c_k}$. Тобто, існує деяка діра (gap) $G^{k+1}_{c_1 \ldots c_k}(0,1)$, яка належить відрізку $[a, b]$. Ми прийшли до суперечності.

Якщо k є непарним числом, то з властивостей циліндричних множин слідує, що існує $O^{k+1}_{c_1 \ldots c_k}(0,1) \subset \Delta_{c_1 \ldots c_k} \subset [a, b]$. Враховуючи наслідок 12, перетин $O^{k+1}_{c_1 \ldots c_k}(0,1)$ не може повністю належати множині неповних сум ряду. Приходимо до суперечності.

Література

[1] *Jessen B., Wintner A.* Distribution functions and Rieman Zeta-function // Trans. Amer. Math. Soc. – 1935. – Vol. 38, № 1. – P. 48-88.

[2] *Guthrie J. A., Nymann J. E.* The topological structure of the set of subsums of an infinite series // Colloq. Math. – 1988. – Vol. 55, № 2. – P. 323-327.

[3] *Levy P.* Sur les series dont les termes sont des variables independantes // Studia math. – 1931. – Vol. 3, № 1. – P. 119-155.

[4] *Pratsyovitiy M. V., Karvatskiy D. M.* Jacobsthal-Lucas series and their applications // Algebra and discrete mathematics. – 2017. – Vol. 24, № 1. P. 169-180.

[5] *Prus-Wisniowski F.* Beyond the sets of subsums // 2013. – 37p. (avaible in http://atom.math.uni.lodz.pl)

[6] *Pratsiovytyi M.V., Feshchenko O.Yu.* Topological, metric and fractal properties of probability distributions on the set of incomplete sums of positive series // Theory of Stochastic Processes. – 2007. – T. 13 (29), № 1-2. – P. 205-224.

[7] *Василенко Н.М.* Фібоначчієві подання дійсних чисел // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. – К.: НПУ імені М. П. Драгоманова. – 2006.– № 9. – С. 190-203.

[8] *Карвацький Д. М.* Властивості розподілу випадкової неповної суми збіжного знакододатного ряду, члени якого утворюють узагальнену постідовність Фібоначчі // Буковинський математичний журнал. – Т. 3, № 1. – Чернівці: Чернівецький національний університет. – 2015. – С. 52-59.

[9] *Карвацький Д. М.* Зображення дійсних чисел нескінченно малими знакододатними узагальненими послідовностями Фібоначчі // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. – К.: НПУ імені М. П. Драгоманова. – № 15 (1). – 2013. – С. 56-74.

[10] *Карвацький Д. М., Василенко Н. М.* Математичні структури у просторах узагальнених послідовностей Фібоначчі // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – К.: НПУ імені М. П. Драгоманова. – 2012.– №13(1). – С.118-128.

[11] *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженні сингулярних розподілів // К.: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова. – 1998. – 296 с.