Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 308–314

УДК 517.912:512.816

# Симетрійна редукція диференціальних рівнянь в частинних похідних з двома незалежними змінними

***І.М. ЦИФРА***

*Інститут геофізики НАН України, Київ*
*Інститут математики Університету в Білостоці, Польща*
*E-mail: tsyfra@igph.kiev.ua, tsyfra@math.uwb.edu.pl*

Вивчається симетрійна редукція рівнянь в частинних похідних з двома незалежними змінними за допомогою операторів симетрії Лі–Беклунда нелінійних звичайних диференціальних рівнянь. Метод редукції застосовується до нелінійних диференціальних рівнянь еволюційного та хвильового типу.

The symmetry reduction of nonlinear partial differential equations with two independent variables is studied. The method is based on the Lie–Bäcklund symmetry operators of nonlinear ordinary differential equations. The reduction method is applied to partial differential equations of evolution and wave types.

**1. Вступ.**Одним з ефективних методів побудови розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь математичної фізики є метод симетрійної редукції, що дає можливість зводити диференціальне рівняння з частинними похідними до звичайного диференціального рівняння. В роботах [1–3, 5, 6] запропоновано підходи, які узагальнюють класичний метод С. Лі і суттєво розширюють його можливості при побудові розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними. Серед цих методів слід відзначити метод умовної інваріантності [1–5] та метод антиредукції [6, 7]. За допомогою цих методів побудовані широкі класи нових розв'язків в явному вигляді багатьох нелінійних рівнянь математичної фізики. Для побудови анзаців, за допомогою яких проводиться редукція вихідного рівняння до звичайного рівняння або системи звичайних диференціальних рівнянь можуть використовуватись інфінітезимальні оператори точкових перетворень як класичної так і умовної симетрії, а також оператори Лі–Беклунда. В роботі [8] запропоновано метод редукції нелінійних еволюційних рівнянь, що базується на симетрії Лі–Беклунда звичайних лінійних однорідних диференціальних рівнянь і дає теоретико-групове обгрунтування методу "нелінійного розділення змінних". В [9] цей метод узагальнюється на нелінійні звичайні диференціальні рівняння і показується, що його можна застосовувати не тільки до рівнянь еволюційного типу, а й взагалі кажучи, до довільного диференціального рівняння з частинними похідними. У даній статті теорема 1 з [9] використовується для редукції і побудови часткових розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь з двома незалежними змінними.

**2. Симетрії Лі–Беклунда звичайних диференціальних рівнянь і редукція рівнянь з частинними похідними.** Розглянемо диференціальне рівняння

$$U(x_1, x_2, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}, \ldots, \underset{k}{u}) = 0, \tag{1}$$

де $x = (x_1, x_2)$, $u = u(x) \in C^k(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^1)$, а символом $\underset{k}{u}$ позначено набір всіх часткових похідних $k$-го порядку по змінним $x_1$, $x_2$. Розглянемо також звичайне диференціальне рівняння загального вигляду

$$H\left(x_1, x_2, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^m}\right) = 0, \tag{2}$$

де $H$ є довільною гладкою функцією своїх аргументів, яке не обов'язково має бути лінійним (як, наприклад, в [8])). Припустимо, що існує загальний розв'язок рівняння (2) і він може бути записаний в такому вигляді

$$u = F(x_1, x_2, C_1, \ldots, C_m),$$

де $C_1, \ldots, C_m$ є довільними функціями від змінної $x_2$, а $F$ є деяка гладка функція своїх аргументів. Справедливим є твердження про симетрійну редукцію [9] а саме: якщо рівняння (2) є інваріантним (в класичному сенсі) відносно оператора

$$Q = U(x_1, x_2, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}, \ldots, \underset{k}{u})\partial_u,$$

то рівняння (1) за допомогою анзацу

$$u = F(x_1, x_2, \varphi_1(x_2), \ldots, \varphi_m(x_2)) \tag{3}$$

редукується в загальному випадку до системи $k_1$ рівнянь для $m$ невідомих функцій $\varphi_1(x_2), \dots, \varphi_m(x_2)$, причому $k_1 \leq m$.

**Зауваження.** В цьому підході змінна $x_2$ є параметричною змінною, подібно як в методі оберненої задачі розсіювання.

Далі розглянемо застосування цього методу на кількох прикладах.

1. Розглянемо нелінійне еволюційне рівняння вигляду

$$u_t = f(u)u_{xx} + a(u), \tag{4}$$

де $f(u)$, $a(u)$ – деякі гладкі функції. Розглянемо також нелінійне звичайне диференціальне рівняння

$$u_{xx} = h(u), \tag{5}$$

де $h(u)$ є також деякою гладкою функцією. Виявляється, що рівняння (5) є інваріантним відносно групи Лі–Беклунда з інфінітезимальним оператором

$$Q = (u_t - f(u)u_{xx} - a(u))\partial_u,$$

тільки тоді, коли $h(u)$ є лінійною функцією, тобто $h(u) = \alpha u + \beta$, $\alpha, \beta = \mathrm{const}$. Нехай $h = -u$. Тоді $f(u) = \left(A + \frac{a(u)}{u}\right)$, де $A = \mathrm{const}$, для довільної функції $a(u)$. Отже анзац

$$u = \varphi_1(t)\sin x + \varphi_2(t)\cos x, \tag{6}$$

де $\varphi_1$, $\varphi_2$ є довільними функціями від змінної $t$, що задовольняє рівняння

$$u_{xx} = -u,$$

редукує нелінійне еволюційне рівняння

$$u_t = \left(A + \frac{a(u)}{u}\right)u_{xx} + a(u) \tag{7}$$

до системи двох звичайних диференціальних рівнянь

$$\varphi_1' = -A\varphi_1, \quad \varphi_2' = -A\varphi_2. \tag{8}$$

З (8), (6) легко отримати розв'язок рівняння (7) у вигляді

$$u = (k_1 \sin x + k_2 \cos x)e^{-At},$$

де $k_1, k_2 = \mathrm{const}$, для довільної функції $a(u)$.

2. Далі знайдемо оператори симетрії Лі–Беклунда нелінійного звичайного диференціального рівняння, що має вигляд

$$uu_{xx} = 3u_x^2 - 3uu_x + u^2. \tag{9}$$

За допомогою інфінітезимального методу [10] знаходимо оператори симетрії рівняння (9), що мають вигляд

$$Q_1 = [u_{xx} + (\lambda - 3u^2)u^{-3}(u - u_x)^2 + 3(u - u_x)]\partial_u, \quad Q_2 = u_t\partial_u,$$

де $\lambda$ – довільна дійсна стала. Тоді, як випливає з теореми 1 з [9] відповідний анзац

$$u = \varphi_2(t)e^x(\varphi_1(t) + 2e^x)^{-1/2},$$

що породжується рівнянням (9), редукує рівняння

$$u_t = u_{xx} + (\lambda - 3u^2)u^{-3}(u - u_x)^2 + 3(u - u_x) \tag{10}$$

до системи двох звичайних диференціальних рівнянь в такому вигляді

$$\varphi_2' = \varphi_2, \quad \varphi_1' = -\frac{-2\lambda}{\varphi_2^2}.$$

Інтегруючи цю систему отримуємо частковий розв'язок рівняння (10) у вигляді

$$u(t,x) = C_1 e^t \left(\frac{\lambda}{C_1^2}e^{-2t} + 2e^x + C_2\right)^{-1/2},$$

де $C_1, C_2 = \mathrm{const}$.

3. На наступному прикладі покажемо, як цей метод застосовується до диференціальних рівнянь, що не є рівняннями еволюційного типу. Для цього розглянемо оператори симетрії Лі–Беклунда звичайного диференціального рівняння

$$u_{xx} = u_x^3. \tag{11}$$

Оператор Лі–Беклунда класичної симетрії рівняння (11) має такий вигляд

$$Q_1 = u_{xt} u_x^{-3} u_t \partial_u.$$

Крім того ми побудували однопараметричну групу інваріантності контактних перетворень, що задається генератором

$$Q_2 = \left[ G\left(u + \frac{1}{u_x}\right) u_x + H\left(u + \frac{1}{u_x}\right)\right] \partial_u,$$

де $F$ і $H$ є довільними гладкими функціями від однієї змінної. З рівняння (11) отримуємо анзац

$$u = \varphi_2(t) - \sqrt{\varphi_1(t) - 2x}, \qquad (12)$$

який повинен редукувати рівняння

$$u_{xt} = \frac{u_x^3}{u_t}\left(G u_x + H\right). \qquad (13)$$

Справді підставляючи (12) в рівняння (13) отримуємо систему двох звичайних диференціальних рівнянь у вигляді

$$\varphi_1' \varphi_2' = -2H(\varphi_2), \quad (\varphi_1')^2 = 4G(\varphi_2)$$

при довільних функціях $G$, $H$.

4. В попередніх прикладах ми будували оператори симетрії звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, тому отримані анзаци містили дві невідомі функції, а відповідна редукована система була системою двох звичайних диференціальних рівнянь. Згідно з теоремою 1 [9] число рівнянь в редукованій системі не може бути більше двох. Покажемо на простому прикладі, що існують такі рівняння, що анзац з двома невідомими функціями редукує досліджуване рівняння до одного звичайного диференціального рівняння. Оскільки отримана система є недовизначеною, то в цьому випадку існує можливість побудови розв'язку з однією довільною функцією. Розглянемо звичайне диференціальне рівняння

$$u_{x_1 x_1} = u_{x_1}. \qquad (14)$$

Це рівняння допускає оператори симетрії

$$Q_1 = u_{x_1 x_2} \partial_u, \quad Q_2 = u_{x_1} F(u_{x_1} - u) \partial_u,$$

де $F$ є довільною гладкою функцією однієї змінної. Відповідний анзац

$$u = -\varphi_1(x_2) + e^{x_1}\varphi_2(x_2),$$

що породжується рівнянням (14), редукує рівняння

$$u_{x_1x_2} = u_{x_1}F(u_{x_1} - u) \tag{15}$$

до одного звичайного диференціального рівняння

$$\varphi_2' = \varphi_2 F(\varphi_1(x_2)). \tag{16}$$

Інтегруючи рівняння (16) знаходимо частковий розв'язок нелінійного рівняння (15) у вигляді

$$u = -\varphi_1(x_2) + Ce^{x_1 + \int F(\varphi_1(x_2))dx_2},$$

де $C$ – довільна стала, що містить довільну функцію $\varphi_1(x_2)$.

**3. Висновки.** Таким чином вищі симетрії Лі–Беклунда нелінійних звичайних диференціальних рівнянь дозволяють провести симетрійну редукцію досліджуваних рівнянь в частинних похідних з двома незалежними змінними до системи звичайних диференціальних рівнянь. У цій роботі ми розглядали звичайні диференціальні рівняння другого порядку. Відповідно збудовані анзаци містять дві невідомі функції. Максимальне число рівнянь в редукованій системі визначається порядком звичайного диференціального рівняння, а його оператори симетрії визначають вигляд диференціального рівняння, до якого може застосовуватись метод редукції. Ефективність цього методу виразно проявляється при застосуванні до нелінійних диференціальних рівнянь, які не допускають оператори вищих симетрій в класичному сенсі і не є "інтегровними". Однак, виявляється, що цей метод можна успішно також застосовувати до рівняння Кортевега–де Фріза вигляду

$$u_t = u_{xxx} + uu_x + \alpha(t)(xu_x + 2u) + \beta(t)u_x,$$

де $\alpha(t)$, $\beta(t)$ – довільні гладкі функції змінної $t$. Метод є загальним в тому сенсі, що його можна застосовувати не тільки в двовимірному просторі, а довільному скінченовимірному, і не тільки до рівнянь еволюційного типу (див. рівняння (13), (15)). Тим не менше слід зауважити, що при дослідженні еволюційних рівнянь сам метод і відповідні обчислення суттєво спрощуються. Треба також відмітити, що цей підхід легко узагальнюється на оператори Лі–Беклунда умовної симетрії звичайних диференціальних рівнянь.

[1] Фущич В.И. О симметрии и точных решениях многомерных нелинейных волновых уравнений // Укр. мат. журн. – 1987 – **37**, № 1 – С. 116–123.

[2] Fushchich W.I., Tsifra I.M. On a reduction and solutions of the nonlinear wave equations with broken symmetry // J. Phys. A: Math. Gen. – 1987. – **20**. – L45–L48.

[3] Фущич В.И., Серов Н.И. Условная инвариатность нелинейных уравнений акустики // Докл. АН УССР. – 1988. – № 10 – С. 28–33.

[4] Zhdanov R.Z., Tsyfra I.M., Popovych R.O. A precise definition of reduction of partial differential equations // J. Math. Anal. Appl. – 1999. – **238**. – P. 101–123.

[5] Fushchych W. Ansatz'95 // J. Nonlinear Math. Phys. – 1995. – **2**. – P. 216–235.

[6] Fushchych W., Zhdanov R. Antireduction and exact solutions of nonlinear heat equations // J. Nonlinear Math. Phys. – 1994. – **1**. – P. 60–64

[7] Zhdanov R. Conditional Lie–Bäcklund symmetry and reduction of evolution equations // J. Phys. A: Math. Gen. – 1995. – **28**. – P. 3841–3850.

[8] Svirshchevskii S.R. Lie–Bäcklund symmetries of linear ODEs and generalised seperation of variables in nonlinear equations // Phys. Lett. A. – 1995. – **199**. – P. 344–348 .

[9] Tsyfra I.M. Symmetry reduction of nonlinear differential equations // Proceedings of Institute of Mathematics, Kyiv. – 2004. – **50**, Part 1. – P. 266–270.

[10] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. — Москва: Мир, 1989. — 639 с.