Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 301–307

УДК 519.46

Про класифікацію низькорозмірних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи Пуанкаре $P(1,4)$

В.М. ФЕДОРЧУК †‡, ***В.І. ФЕДОРЧУК*** ‡

† *Ін-т математики, Педаг. акад. ім. Комісії Нар. Освіти, Краків*
E-mail: fedorchuk@ap.krakow.pl

‡ *Ін-т прикл. проблем механіки і математики*
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів
E-mail: vasfed@gmail.com, volfed@gmail.com

Проведено повну класифікацію всіх неспряжених підалгебр алгебри Лі групи Пуанкаре $P(1,4)$ розмірності ≤ 3.

The complete classification of all non-conjugate subalgebras of dimensions ≤ 3 of the Lie algebra of Poincaré group $P(1,4)$ is performed.

1. Вступ. Добре відомо, що неспряжені підгрупи груп Лі точкових перетворень широко використовуються при розв'язуванні різних задач математики, теоретичної та математичної фізики, механіки, газової динаміки тощо (див., наприклад, [1–6]). Виявилося однак, що можливості вищезгаданих застосувань, а також результати отримані внаслідок цього, суттєвим чином залежать від структурних властивостей неспряжених підгруп груп Лі точкових перетворень. Тому вивчення структурних властивостей неспряжених підгруп груп Лі точкових перетворень (неспряжених підалгебр алгебр Лі груп Лі точкових перетворень) є важливим з різних точок зору. Одним із способів вивчення структурних властивостей неспряжених підалгебр алгебр Лі є класифікація цих підалгебр в класи ізоморфних підалгебр. З розв'язанням цієї класифікаційної задачі тісно пов'язане розв'язування інших важливих задач. Так, наприклад, задача про побудову повної множини нееквівалентних реалізацій [7] дійсних низькорозмірних алгебр Лі і задача про опис всіх інваріантних операторів (узагальнених операторів Казіміра) [8] для дійсних низькорозмірних алгебр Лі базуються на класифікації цих алгебр Лі [9,10].

Всі можливі комплексні алгебри Лі розмірності ≤ 4 були описані ще С. Лі [1]. Повна класифікація дійсних структур алгебр Лі розмірності ≤ 5 отримана Г.М. Мубаракзяновим [9, 10]. В [11] неспряжені підалгебри алгебри Лі групи Пуанкаре $P(1,3)$ прокласифіковані в класи ізоморфних. Для кожного такого класу підалгебр знайдені всі інваріантні функції від групових генераторів. В [8] всі інваріантні функції від групових генераторів (узагальнені оператори Казіміра) знайдені для всіх дійсних алгебр Лі розмірності ≤ 5 і для всіх дійсних нільпотентних алгебр Лі розмірності 6.

Ця робота присв'ячена класифікації низькорозмірних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи Пуанкаре $P(1,4)$ в класи ізоморфних підалгебр. Група $P(1,4)$ є групою поворотів і зсувів п'ятивимірного простору Мінковського $M(1,4)$. Вона широко використовується при розгляді різних питань теоретичної і математичної фізики (див., наприклад, [4, 12, 13]). Підгрупова структура групи $P(1,4)$ вивчена в роботах [14–18]. В основу нашої роботи покладено повний список неспряжених (з точністю до $P(1,4)$-спряженості) підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$, який можна знайти в [5]. На даний час, використовуючи класифікацію отриману Г.М. Мубаракзяновим [9, 10], проведено класифікацію всіх неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$ розмірності ≤ 3, а також, більшості неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$ розмірностей 4 і 5. Для представлення отриманих результатів потрібно розглянути алгебру Лі групи $P(1,4)$.

2. Алгебра Лі групи $\boldsymbol{P(1,4)}$. Алгебра Лі групи $P(1,4)$ задається 15 базисними елементами $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$ $(\mu, \nu = 0,1,2,3,4)$ і P'_μ $(\mu = 0,1,2,3,4)$, які задовольняють комутаційним співвідношенням

$$\begin{aligned}
&\left[P'_\mu, P'_\nu\right] = 0, \quad \left[M'_{\mu\nu}, P'_\sigma\right] = g_{\mu\sigma} P'_\nu - g_{\nu\sigma} P'_\mu, \\
&\left[M'_{\mu\nu}, M'_{\rho\sigma}\right] = g_{\mu\rho} M'_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma} M'_{\mu\rho} - g_{\nu\rho} M'_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma} M'_{\nu\rho},
\end{aligned}$$

де $g_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 0,1,2,3,4)$ – метричний тензор з компонентами $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = -g_{44} = 1$, $g_{\mu\nu} = 0$, якщо $\mu \neq \nu$. Тут і всюди надалі $M'_{\mu\nu} = iM_{\mu\nu}$.

Надалі перейдемо від $M'_{\mu\nu}$ і P'_μ до таких лінійних комбінацій:

$$\begin{aligned}
&G = M'_{40}, \quad L_1 = M'_{32}, \quad L_2 = -M'_{31}, \quad L_3 = M'_{21}, \\
&P_a = M'_{4a} - M'_{a0}, \quad C_a = M'_{4a} + M'_{a0} \quad (a = 1,2,3), \\
&X_0 = \tfrac{1}{2}\left(P'_0 - P'_4\right), \quad X_k = P'_k \quad (k = 1,2,3), \quad X_4 = \tfrac{1}{2}\left(P'_0 + P'_4\right).
\end{aligned}$$

3. Класифікація одновимірних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$. Відомо, що є тільки один тип дійсних алгебр Лі розмірності один [9]. Ми позначатимемо його A_1 [11]. Оскільки всі одновимірні алгебри Лі є ізоморфними, то вони будуть типу A_1. Нижче приводимо результати класифікації одновимірних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$:

$$
\begin{gathered}
\langle G\rangle;\ \langle L_3+eG,\, e>0\rangle;\ \langle P_3+C_3+2L_3\rangle;\ \langle P_3+C_3+eL_3,\, e>2\rangle;\\
\langle P_3+C_3+2L_3+\alpha(X_0+X_4),\, \alpha<0\rangle;\ \langle P_3+X_0\rangle;\ \langle P_3+X_1\rangle;\\
\langle L_3-P_3+\alpha_0X_0,\, \alpha_0<0\rangle;\ \langle L_3+\tilde{d}(X_0+X_4),\, \tilde{d}<0\rangle;\\
\langle G+cX_1,\, c<0\rangle;\ \langle L_3+eG+\kappa_3X_3,\, e>0,\, \kappa_3<0\rangle;\\
\langle P_3\rangle;\ \langle L_3-P_3\rangle;\ \langle L_3\rangle;\ \langle X_0+X_4\rangle;\ \langle X_0-X_4\rangle;\ \langle X_4\rangle;\\
\langle P_3+C_3+eL_3+\alpha(X_0+X_4),\, e>2,\, \alpha<0\rangle;\\
\langle L_3+\alpha X_3,\, \alpha<0\rangle;\ \langle L_3-X_4\rangle.
\end{gathered}
$$

4. Класифікація двовимірних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$. Існує два різні типи дійсних двовимірних алгебр Лі: розкладний $A_1\oplus A_1\equiv 2A_1$ і нерозкладний A_2 [9]. Алгебри Лі типу $2A_1$ – абелеві. Базисні елементи (e_1 і e_2) алгебр Лі типу A_2 задовольняють комутаційні співвідношення: $[e_1,e_2]=e_2$ [8]. Алгебри Лі типу A_2 є розв'язними [8, 9]. Нижче приводимо результати класифікації двовимірних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$.

Алгебри Лі типу $2A_1$:

$$
\begin{gathered}
\langle G,L_3\rangle;\ \langle G,X_1\rangle;\ \langle L_3+eG,X_3,\, e>0\rangle;\ \langle P_3+C_3,L_3\rangle;\\
\langle P_3+C_3+2L_3,X_0+X_4\rangle;\ \langle P_3+C_3+eL_3,X_0+X_4,\, e>2\rangle;\\
\langle P_1,P_2\rangle;\ \langle L_3,P_3\rangle;\ \langle P_3,X_1\rangle;\ \langle P_3,X_4\rangle;\ \langle L_3-P_3,X_4\rangle;\langle L_3,X_4\rangle;\\
\langle L_3,X_0+X_4\rangle;\ \langle L_3,X_0-X_4\rangle;\ \langle X_0+X_4,X_0-X_4\rangle;\ \langle X_1,X_4\rangle;\\
\langle X_1,X_0-X_4\rangle;\ \langle L_3-X_4,P_3+hX_0,\, h>0\rangle;\langle L_3-X_4,P_3\rangle;\\
\langle L_3,P_3+X_0\rangle;\ \langle G+aX_3,L_3,\, a<0\rangle;\ \langle G,L_3+dX_3,\, d<0\rangle;\\
\langle P_3+X_0,X_1\rangle;\ \langle P_3+X_2,X_1\rangle;\ \langle P_3+X_0,X_4\rangle;\ \langle P_3+X_1,X_4\rangle;\\
\langle L_3+d_3X_3,X_0+X_4,\, d_3<0\rangle;\ \langle L_3+d_3X_3,X_0-X_4,d_3<0\rangle;\\
\langle L_3+d_4X_4,X_0-X_4,d_4<0\rangle;\ \langle L_3+\alpha(X_0+X_4),X_4,\, \alpha<0\rangle;\\
\langle G+a_2X_2,X_1,\, a_2<0\rangle;\ \langle L_3-P_3+\alpha_0X_0,X_4,\, \alpha_0<0\rangle;\\
\langle P_1+X_3,P_2\rangle;\ \langle P_1,P_2+X_2\rangle;\ \langle L_3+a_3X_3,X_4,\, a_3<0\rangle;
\end{gathered}
$$

$$\langle L_3+\alpha(X_0+X_4), P_3+C_3+\beta(X_0+X_4),\ \alpha<0,\ \beta<0\rangle;$$
$$\langle P_1+X_3, P_2+\gamma X_2,\ \gamma>0\rangle;\ \langle P_1, P_2+X_2+\beta X_3,\ \beta>0\rangle;$$
$$\langle P_3+C_3, L_3+d(X_0+X_4),\ d<0\rangle;\ \langle L_3-X_4, X_3\rangle;$$
$$\langle P_1+X_3, P_2+\gamma X_2+\beta X_3,\ \gamma>0,\ \beta>0\rangle;$$
$$\langle G+\alpha X_3, L_3+\beta X_3,\ \alpha<0,\ \beta<0\rangle.$$

Алгебри Лі типу A_2:

$$\langle -G, P_3\rangle;\ \langle -G-\tfrac{1}{d}L_3, P_3,\ d>0\rangle;\ \langle -G-\tfrac{1}{e}L_3, X_4,\ e>0\rangle;$$
$$\langle -G-aX_1, P_3,\ a<0\rangle;\ \langle -G-cX_1, X_4,\ c<0\rangle;\ \langle -G, X_4\rangle;$$
$$\langle -\left(G+\tfrac{1}{e}L_3+\tfrac{\kappa_3}{e}X_3\right), X_4,\ e>0,\ \kappa_3<0\rangle.$$

5. Класифікація тривимірних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $\boldsymbol{P(1,4)}$. Утворюючи прямі суми одновимірних алгебр Лі типу A_1 з алгебрами Лі розмірності два, отримуємо два типи алгебр Лі розмірності три: $3A_1$, $A_2\oplus A_1$. Крім того, існує 9 типів дійсних нерозкладних алгебр Лі $A_{3.1},\ldots,A_{3.9}$ (див. [8, 9]), два з яких залежать від параметрів (тобто складають континууми алгебр Лі). Надалі символ $A^a_{r.j}$ означатиме j-у алгебру Лі вимірності r (a – неперервний параметр від якого залежить алгебра). При заданні конкретної алгебри Лі ми виписуватимемо тільки відмінні від нуля комутаційні співвідношення. Нижче приводимо результати класифікації тривимірних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$.

Алгебри Лі типу $3A_1$:

$$\langle G, L_3, X_3\rangle;\ \langle G, X_1, X_2\rangle;\ \langle P_3+C_3, L_3, X_0+X_4\rangle;$$
$$\langle P_1, P_2, P_3\rangle;\ \langle P_1, P_2, X_3\rangle;\ \langle P_1, P_2, X_4\rangle;\ \langle L_3, P_3, X_4\rangle;$$
$$\langle P_3, X_1, X_2\rangle;\ \langle P_3, X_1, X_4\rangle;\ \langle L_3, X_0, X_4\rangle;\ \langle L_3, X_3, X_4\rangle;$$
$$\langle L_3, X_3, X_0-X_4\rangle;\ \langle X_0+X_4, X_1, X_0-X_4\rangle;\ \langle X_4, X_1, X_2\rangle;$$
$$\langle X_1, X_2, X_0-X_4\rangle;\ \langle L_3, P_3+X_0, X_4\rangle;\ \langle P_3+X_0, X_1, X_2\rangle;$$
$$\langle G+a_3X_3, X_1, X_2, a_3<0\rangle;\ \langle L_3+d_3X_3, X_0, X_4,\ d_3<0\rangle;$$
$$\langle L_3+\tilde d_4X_4, X_3, X_0+X_4,\ \tilde d_4<0\rangle;\ \langle P_1, P_2+X_2, X_3\rangle;$$
$$\langle L_3+\alpha(X_0+X_4), X_3, X_4,\ \alpha<0\rangle;\ \langle P_1, P_2+X_2, X_4\rangle;$$
$$\langle P_1+X_3, P_2, X_4\rangle;\ \langle P_1, P_2+\alpha X_2, P_3+\gamma X_3,\ \alpha>0\rangle;$$
$$\langle P_1+\gamma X_3, P_2+X_2+\delta X_3, X_4,\ \gamma>0\rangle;$$
$$\langle P_3+X_0, X_1, X_4\rangle; \langle P_3+X_2, X_1, X_4\rangle;$$

$\langle P_1, P_2 + X_2 + \delta X_3, X_4,\ \delta > 0\rangle$.

Алгебри Лі типу $A_2 \oplus A_1$:

$\langle -G - aX_3, X_4,\ a < 0\rangle \oplus \langle L_3\rangle$; $\langle -G, X_4\rangle \oplus \langle L_3 + dX_3,\ d < 0\rangle$;
$\langle -G, P_3\rangle \oplus \langle L_3\rangle$; $\langle -G, X_4\rangle \oplus \langle L_3\rangle$; $\langle -G, P_3\rangle \oplus \langle X_1\rangle$;
$\langle -G, X_4\rangle \oplus \langle X_1\rangle$; $\langle -G - \frac{1}{e}L_3, X_3,\ e > 0\rangle \oplus \langle X_4\rangle$;
$\langle -G - aX_3, X_4,\ a < 0\rangle \oplus \langle L_3 + dX_3,\ d < 0\rangle$;
$\langle -G - a_2X_2, P_3,\ a_2 < 0\rangle \oplus \langle X_1\rangle$;
$\langle -G - \tilde{a}_2X_2, X_4,\ \tilde{a}_2 < 0\rangle \oplus \langle X_1\rangle$.

Алгебри Лі типу $A_{3.1}$ ($[e_2, e_3] = e_1$, нільпотентна):

$\langle -4X_4, P_1 + X_2 + \gamma X_3, P_2 - X_1 + \mu X_2 + \delta X_3,\ \mu > 0,\ \gamma > 0\rangle$;
$\langle -2X_4, L_3 - P_3, X_3\rangle$; $\langle -2dX_4, L_3 + dX_3, P_3 + X_0,\ d < 0\rangle$;
$\langle 2X_4, P_3 + X_1, X_3\rangle$; $\langle -2X_4, L_3 - P_3 + \alpha_0X_0, X_3,\ \alpha_0 < 0\rangle$;
$\langle -2dX_4, L_3 + dX_3, P_3,\ d < 0\rangle$; $\langle 2X_4, P_3 + X_0, X_3\rangle$;
$\langle -4X_4, P_1 + X_2, P_2 - X_1 + \mu X_2 + \delta X_3,\ \delta > 0\rangle$;
$\langle 2X_4, P_3, X_3\rangle$; $\langle 2bX_4, P_3, X_1 + bX_3,\ b > 0\rangle$;
$\langle -4X_4, P_1 + X_2, P_2 - X_1 + \mu X_2,\ \mu > 0\rangle$;
$\langle -4X_4, P_1 + X_2 + \beta X_3, P_2 - X_1,\ \beta > 0\rangle$;
$\langle 2bX_4, P_3 + X_2, X_1 + bX_3,\ b > 0\rangle$;
$\langle 2bX_4, P_3 + X_0, X_1 + bX_3,\ b > 0\rangle$; $\langle -4X_4, P_1 + X_2, P_2 - X_1\rangle$.

Алгебри Лі типу $A_{3.2}$ ($[e_1, e_3] = e_1$, $[e_2, e_3] = e_1 + e_2$, розв'язна):

$\langle 2a_3X_4, P_3, G + a_1X_1 + a_3X_3,\ a_1 < 0,\ a_3 < 0\rangle$;
$\langle 2\frac{\alpha_3}{d}X_4, P_3, G + \frac{1}{d}L_3 + \frac{\alpha_3}{d}X_3,\ d > 0,\ \alpha_3 < 0\rangle$;
$\langle 2a_3X_4, P_3, G + a_3X_3,\ a_3 < 0\rangle$.

Алгебри Лі типу $A_{3.3}$ ($[e_1, e_3] = e_1$, $[e_2, e_3] = e_2$, розв'язна):

$\langle P_1, P_2, G + a_3X_3,\ a_3 < 0\rangle$; $\langle P_3, X_4, G + a_1X_1,\ a_1 < 0\rangle$;
$\langle P_1, P_2, G\rangle$; $\langle P_3, X_4, G\rangle$; $\langle P_3, X_4, G + \frac{1}{d}L_3,\ d > 0\rangle$.

Алгебри Лі типу $A_{3.4}$ ($[e_1, e_3] = e_1$, $[e_2, e_3] = -e_2$, розв'язна):

$\langle X_0, X_4, -G - \frac{1}{e}L_3 - \frac{\kappa_3}{e}X_3,\ e > 0,\ \kappa_3 < 0\rangle$;

$\langle X_0, X_4, -G\rangle$; $\langle X_0, X_4, -G - \frac{1}{e}L_3,\ e > 0\rangle$;
$\langle X_0, X_4, -G - cX_1,\ c < 0\rangle$.

Алгебри Лі типу $A_{3.6}$ ($[e_1, e_3] = -e_2$, $[e_2, e_3] = e_1$, розв'язна):

$\langle P_1, P_2, L_3 + d_3X_3,\ d_3 < 0\rangle$; $\langle -P_1 - X_1, P_2 + X_2, P_3 - L_3\rangle$;
$\langle -P_1, P_2, -L_3\rangle$; $\langle -P_1, P_2, P_3 - L_3\rangle$; $\langle -X_1, X_2, P_3 - L_3\rangle$;
$\langle X_1, X_2, L_3 + \frac{1}{e}\left(P_3 + C_3\right) + \frac{\alpha}{e}(X_0 + X_4),\ e > 2,\ \alpha < 0\rangle$;
$\langle X_1, X_2, L_3 + \frac{1}{2}\left(P_3 + C_3\right) + \frac{\alpha}{2}(X_0 + X_4),\ \alpha < 0\rangle$;
$\langle X_3, X_0 - X_4, -\frac{1}{2}\left(P_3 + C_3\right) - \frac{e}{2}L_3,\ e > 0\rangle$;
$\langle X_1, X_2, L_3 + eG + \kappa_3X_3,\ e > 0,\ \kappa_3 < 0\rangle$;
$\langle X_1, X_2, L_3 + eG,\ e > 0\rangle$; $\langle X_1, X_2, L_3\rangle$; $\langle -P_1, P_2, X_4 - L_3\rangle$;
$\langle X_1, X_2, L_3 - X_4\rangle$; $\langle X_1, -X_2, -L_3 - \frac{1}{e}\left(P_3 + C_3\right),\ e > 2\rangle$;
$\langle -X_1, X_2, -L_3 - \tilde{d}(X_0 + X_4),\ \tilde{d} < 0\rangle$;
$\langle X_1, X_2, L_3 - P_3 + \alpha_0X_0,\ \alpha_0 < 0\rangle$;
$\langle -X_1, X_2, -L_3 - \alpha X_3,\ \alpha < 0\rangle$; $\langle X_1, X_2, L_3 + \frac{1}{2}\left(P_3 + C_3\right)\rangle$.

Алгебри Лі типу $A^a_{3.7}$ ($[e_1, e_3] = ae_1 - e_2$, $[e_2, e_3] = e_1 + ae_2$, $a > 0$, розв'язна):

$\langle P_1, P_2, L_3 + cG + bX_3,\ c > 0,\ b < 0\rangle$; $\langle P_1, P_2, L_3 + cG,\ c > 0\rangle$.

Алгебри Лі типу $A_{3.8}$ ($[e_1, e_3] = -2e_2$, $[e_1, e_2] = e_1$, $[e_2, e_3] = e_3$, напівпроста):

$\langle -P_3, G, C_3\rangle$.

Алгебри Лі типу $A_{3.9}$ ($[e_1, e_2] = e_3$, $[e_2, e_3] = e_1$, $[e_3, e_1] = e_2$, напівпроста):

$\langle \frac{1}{2}L_1 + \frac{1}{4}(P_1 + C_1), \frac{1}{2}L_2 + \frac{1}{4}(P_2 + C_2), \frac{1}{2}L_3 + \frac{1}{4}(P_3 + C_3)\rangle$;
$\langle L_1, L_2, L_3\rangle$.

[1] Lie S., Engel F. Theorie der Transformationsgruppen. – Leipzig: Teubner, 1888, 1890, 1893. – Bd. 1–3.

[2] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – Москва: Наука, 1978. – 399 с.

[3] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. – Москва: Мир, 1989. – 639 с.

[4] Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений квантовой механики. – Москва: Наука, 1990. – 400 с.

[5] Фущич В.И., Баранник Л.Ф., Баранник А.Ф., Подгрупповой анализ групп Галилея, Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений. – Киев: Наукова думка, 1991. – 304 с.

[6] Петров А.З. Новые методы в общей теории относительности. – Москва: Наука, 1966. – 495 с.

[7] Popovych R.O., Boyko V.M., Nesterenko M.O., Lutfullin M.W. Realizations of real low-dimensional Lie algebras // J. Phys. A: Math. Gen. – 2003. – **36**. – P. 7337–7360.

[8] Patera J., Sharp R.T., Winternitz P., Zassenhaus H. Invariants of real low dimension Lie algebras // J. Math. Phys. – 1976. – **17**. – P. 986–994.

[9] Мубаракзянов Г.М. О разрешимых алгебрах Ли // Изв. выс. учеб. завед. мат. – 1963 – № 1(32). – С. 114–123.

[10] Мубаракзянов Г.М. Классификация вещественных структур алгебр Ли пятого порядка // Изв. выс. учеб. завед. мат. – 1963. – № 3(34). – С. 99–106.

[11] Patera J., Sharp R.T., Winternitz P., Zassenhaus H. Subgroups of the Poincaré group and their invariants // J. Math. Phys. – 1976. – **17**. – P. 977–985.

[12] Фущич В.И. Представления полной неоднородной группы де Ситтера и уравнения в пятимерном подходе. I // Теорет. и мат. физика. – 1970. – **4**. – С. 360–382.

[13] Кадышевский В.Г. Новый подход к теории электромагнитных взаимодействий // Физика элементарных частиц и атомного ядра. – 1980. – **11**. – С. 5–39.

[14] Федорчук В.М. Непрерывные подгруппы неоднородной группы де Ситтера $P(1,4)$. – 1978. – 36 с. – (Препр. / АН УССР. – Киев: Ин-т математики. – 78.18).

[15] Федорчук В.М. Расщепляющиеся подалгебры алгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре $P(1,4)$ // Укр. мат. журн. – 1979. – **31**. – С. 717–722.

[16] Федорчук В.М., Фущич В.И. О подгруппах обобщенной группы Пуанкаре / Теоретико-групповые методы в физике, Тр. Междунар. семинара. (Звенигород, 1979). – Москва: Наука, 1980. – Т. 1. – С. 61–66.

[17] Федорчук В.М. Нерасщепляющиеся подалгебры алгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре $P(1,4)$ // Укр. мат. журн. – 1981. – **33**. – С. 696–700.

[18] Fushchich W.I., Barannik A.F., Barannik L.F., Fedorchuk V.M. Continuous subgroups of the Poincaré group $P(1,4)$ // J. Phys. A: Math. Gen. – 1985. – **18**. – P. 2893–2899.