Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 292–300

УДК 517.912:512.816

Симетрійний аналіз та редукція двовимірного рівняння Фоккера–Планка зі змінною матрицею дифузії

В.І. СТОГНІЙ

Національний технічній університет України "Київський політехнічній інститут", Київ
E-mail: valeriy_ stogniy@mail.ru

В даній статті досліджено симетрію і знайдено точні розв'язки одного двовимірного рівняння Фоккера–Планка з теорії стохастичних процесів, яке має однорідний коефіцієнт знесення та змінний коефіцієнт дифузії.

Fokker–Planck equation from the stochastic theory, which has a homogeneous drift coefficient and a variable diffusion coefficient is considered. Lie symmetries are investigated and exact solutions are constructed.

Протягом багатьох років спостерігається стійкий інтерес до дослідження та побудови точних розв'язків рівняння Фоккера–Планка [1,2]

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}[A_i(t,x)u(t,x)] + \\ + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}[B_{ij}(t,x)u(t,x)], \qquad (1)$$

де $x = (x_1, x_2 \ldots, x_n)$, коефіцієнти знесення $A(t,x)$ та дифузії $B(t,x)$ визначаються відповідно як вектор і матриця

$$A = A(t,x) = (A_1(t,x), A_2(t,x), \ldots, A_n(t,x)),$$
$$B = B(t,x) = ||B_{ij}(t,x)||_{i,j=1}^{n}.$$

Одновимірне рівняння Фоккера–Планка є добре вивченим. Щодо рівнянь Фоккера–Планка в просторах вищої розмірності, то, наскільки нам відомо, було досліджено лише окремі класи рівнянь вигляду (1) у двовимірному випадкові.

Так, в роботі [6] було знайдено умови, при яких рівняння (1) з однорідним коефіцієнтом знесення і сталою діагональною матрицею дифузії є інваріантним відносно дев'яти параметричної групи локальних перетворень. З використанням підгруп групи інваріантності вільного рівняння Крамерса в [7] знайдено деякі його інваріантні розв'язки. Нарешті, в [8] було розглянуто задачу групової класифікації рівняння Фоккера–Планка з однорідним коефіцієнтом знесення та сталою діагональною матрицею дифузії, а також, для деяких з отриманих рівнянь з нетривіальною симетрією, було знайдено інваріантні розв'язки.

Отже, рівняння Фоккера–Планка у просторах розмірності вищої за одиницю ще потребують систематичного вивчення.

В даній статті досліджено симетрію і знайдено точні розв'язки одного двовимірного рівняння Фоккера–Планка з теорії стохастичних процесів [1], яке має однорідний коефіцієнт знесення та змінний коефіцієнт дифузії:

$$
\begin{aligned}
&A = (\varepsilon - kx^2y, \varepsilon - kxy^2),\\
&B = \begin{pmatrix} -kx^2 & 0 \\ 0 & -ky^2 \end{pmatrix}, \quad \text{де} \quad k \neq 0, \varepsilon \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Використавши перетворення

$$
t \to kt, \quad x \to x, \quad y \to y, \quad u \to u,
$$

бачимо, що, не зменшуючи загальності міркувань, можемо досліджувати рівняння

$$
\begin{aligned}
&u_t + 2(1 - 2xy)u + (2x + \varepsilon - x^2y)u_x + (2y + \varepsilon - xy^2)u_y + \\
&\quad + \tfrac{1}{2}x^2u_{xx} + \tfrac{1}{2}y^2u_{yy} = 0,
\end{aligned} \tag{2}
$$

в якому $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $u = u(t, x, y)$, $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ і т.д.

Використовуючи стандартний алгоритмом Лі [4, 5], можна довести наступне твердження.

Твердження. *Максимальною скінченновимірною алгеброю інваріантності рівняння* (2), *в якому* $\varepsilon \neq 0$, *є двовимірна абелева алгебра*

Лі $L_2 = \langle \partial_t, u\partial_u \rangle$. *Якщо ж в* (2) $\varepsilon = 0$, *то максимальною скінченновимірною алгеброю інваріантності цього рівняння є чотиривимірна розв'язна алгебра Лі операторів симетрії* L_4 *з такими базисними операторами:*

$$P_0 = \partial_t, \quad I = u\partial_u, \quad D_1 = -x\partial_x + y\partial_y,$$
$$D_2 = -xt\partial_x + yt\partial_y - (\ln|x| - \ln|y|)u\partial_u.$$

Зауваження. Тут ми не враховуємо симетрії $\nu = \beta(t, x, y)\partial_u$, де функція β є розв'язком рівняння (2) і наявність якого обумовлюється лінійністю досліджуваного рівняння.

У подальшому дослідженні ми будемо використовувати одновимірні підалгебри алгебри L_2 та одно- і двовимірні підалгебри алгебри L_4. Класифікація підалгебр дійсних алгебр Лі невисоких розмірностей з точністю до спряженості, яку визначають групи внутрішніх автоморфізмів цих алгебр Лі, проведена в [9]. Згідно з результатами цієї роботи, одновимірні підалгебри алгебри L_2 вичерпуються алгебрами

$$\langle \partial_t \rangle, \quad \langle \partial_t + \alpha u\partial_u \rangle \quad (\alpha \neq 0), \quad \langle u\partial_u \rangle.$$

Для алгебри L_4 одновимірні підалгебри вичерпуються алгебрами

$$\langle I \rangle, \quad \langle D_1 \rangle, \quad \langle D_2 \rangle, \quad \langle P_0 \rangle, \quad \langle D_2 + \alpha P_0 \rangle,$$
$$\langle P_0 + \alpha I \rangle \quad (\alpha \neq 0),$$

а двовимірні підалгебри такими алгебрами:

$$\langle I, D_1 \rangle, \quad \langle I, P_0 \rangle, \quad \langle D_1, P_0 \rangle, \quad \langle I, D_2 \rangle,$$
$$\langle D_1, P_0 + \alpha I \rangle, \quad \langle I, D_2 + \alpha P_0 \rangle \quad (\alpha \neq 0).$$

Одним із застосувань симетрійних властивостей диференціальних рівнянь з частинними похідними є симетрійна редукція рівнянь з нетривіальною симетрією до рівнянь з меншою кількістю незалежних змінних, зокрема, до звичайних диференціальних рівнянь (див., наприклад, [3–5]).

Рівняння (2), в якому $\varepsilon \neq 0$, допускає двовимірну алгебру інваріантності L_2. Оскільки оператор I не задовольняє необхідну умову існування інваріантних розв'язків [4], то тут для симетрійної редукції ми можемо використовувати лише одновимірні підалгебри

$$\langle \partial_t \rangle, \quad \langle \partial_t + \alpha u\partial_u \rangle \quad (\alpha \neq 0).$$

В просторі змінних t, x, y, u інваріантами оператора ∂_t є змінні x, y, u, тому відповідна підстановка (анзац) має вигляд

$$u = \varphi(x, y),$$

а відповідне редуковане рівняння буде таким:

$$2(1 - 2xy)\varphi + (2x + \varepsilon - x^2 y)\varphi_x + (2y + \varepsilon - xy^2)\varphi_y + \\ + \tfrac{1}{2}x^2\varphi_{xx} + \tfrac{1}{2}y^2\varphi_{yy} = 0.$$

Для оператора $\langle \partial_t + \alpha u \partial_u \rangle$ $(\alpha \neq 0)$ інваріанти мають вигляд $\omega = ue^{-\alpha t}$, x, y, а тому відповідний анзац буде таким:

$$u = e^{\alpha t}\varphi(x, y). \tag{3}$$

Підстановка (3) в (2) приводить до такого диференціального рівняння:

$$(\alpha + 2 - 4xy)\varphi + (2x + \varepsilon - x^2 y)\varphi_x + (2y + \varepsilon - xy^2)\varphi_y + \\ + \tfrac{1}{2}x^2\varphi_{xx} + \tfrac{1}{2}y^2\varphi_{yy} = 0.$$

Тепер зупинимося на рівнянні (2), в якому $\varepsilon = 0$. Тут необхідну умову існування інваріантних розв'язків задовольняють одновимірні підалгебри $\langle D_1 \rangle$, $\langle D_2 \rangle$, $\langle P_0 \rangle$, $\langle D_2 + \alpha P_0 \rangle$, $\langle P_0 + \alpha I \rangle$ $(\alpha \neq 0)$, яким відповідає симетрійна редукція рівняння (2) до рівнянь з частинними похідними в просторі двох незалежних змінних. Розглянемо детально випадок алгебри $\langle D_1 \rangle$. Анзац побудований по цій одновимірній підалгебрі має вигляд

$$u = \varphi(t, \omega), \quad \omega = xy, \tag{4}$$

де φ – нова невідома функція змінних t та ω, яка підлягає визначенню. Підстановка (4) в (2), де $\varepsilon = 0$, приводить до такого редукованого рівняння:

$$\varphi_t + 2(1 - 2\omega)\varphi + (4\omega - 2\omega^2)\varphi_\omega + \omega^2\varphi_{\omega\omega} = 0.$$

Нижче для кожної з одновимірних підалгебр, що залишилися, наведено відповідні анзаци та редуковані рівняння:

$$\langle D_2 \rangle : \quad u = \exp\left(\frac{\ln^2 |\frac{x}{y}|}{4t}\right)\varphi(t, \omega), \quad \omega = xy,$$

$$\varphi_t + \left[2(1-2\omega) + \tfrac{1}{2t}\right]\varphi + 2\omega(2-\omega)\varphi_\omega + \omega^2\varphi_{\omega\omega} = 0;$$

$$\langle P_0 \rangle : \quad u = \varphi(x,y), \quad 2(1-2xy)\varphi + (2x - x^2y)\varphi_x + $$
$$+ (2y - xy^2)\varphi_y + \tfrac{1}{2}x^2\varphi_{xx} + \tfrac{1}{2}y^2\varphi_{yy} = 0;$$

$$\langle D_2 + \alpha P_0 \rangle : \quad u = \exp\left(-\tfrac{t}{\alpha}\ln\left|\tfrac{x}{y}\right| - \tfrac{2}{3\alpha^2}t^3\right)\varphi(\omega, \upsilon),$$
$$\omega = xy, \quad \upsilon = \ln\left|\tfrac{x}{y}\right| + \tfrac{1}{\alpha}t^2, \quad \alpha \neq 0,$$
$$\left[2(1-2\omega) - \tfrac{1}{\alpha}\upsilon\right]\varphi + 2\omega(2-\omega)\varphi_\omega + \omega^2\varphi_{\omega\omega} + \varphi_{\upsilon\upsilon} = 0;$$

$$\langle P_0 + \alpha I \rangle : \quad u = e^{\alpha t}\varphi(x,y), \quad \alpha \neq 0,$$
$$[2(1-2xy) + \alpha]\varphi + (2x - x^2y)\varphi_x + (2y - xy^2)\varphi_y +$$
$$+ \tfrac{1}{2}x^2\varphi_{xx} + \tfrac{1}{2}y^2\varphi_{yy} = 0.$$

Серед двовимірних підалгебр алгебри L_4 необхідну умову існування інваріантних розв'язків задовольняють $\langle D_1, P_0 \rangle$, $\langle D_1, P_0 + \alpha I \rangle$ ($\alpha \neq 0$). Їм відповідає симетрійна редукція рівняння (1), в якому $\varepsilon = 0$, до звичайних диференціальних рівнянь. Анзац, що відповідає підалгебрі $\langle D_1, P_0 \rangle$,

$$u = \varphi(\omega), \quad \omega = xy,$$

зводить досліджуване рівняння до такого звичайного диференціального рівняння:

$$\omega^2\ddot{\varphi} + 2\omega(2-\omega)\dot{\varphi} + 2(1-2\omega)\varphi = 0, \tag{5}$$

де $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{d\omega}$, $\ddot{\varphi} = \frac{d^2\varphi}{d\omega^2}$.

Для алгебри $\langle D_1, P_0 + \alpha I \rangle$ ($\alpha \neq 0$)

$$u = e^{\alpha t}\varphi(\omega), \quad \omega = xy,$$

а редуковане рівняння має такий вигляд

$$\omega^2\ddot{\varphi} + 2\omega(2-\omega)\dot{\varphi} + [2 - 4\omega + \alpha]\varphi = 0. \tag{6}$$

Ще одним важливим застосуванням нетривіальних симетрійних властивостей, саме лінійних диференціальних рівнянь, є побудова систем координат, в яких такі рівняння допускають відокремлення змінних. Добре відомо (див., наприклад, [10]), що розв'язок з відокремленими змінними певного рівняння можна отримувати як власну функцію деяких наборів операторів симетрії першого та вищих порядків цього рівняння, що комутують між собою.

Зупинимося на цій проблемі для рівняння (2), в якому $\varepsilon = 0$, тобто для рівняння

$$Lu = u_t + 2(1 - 2xy)u + (2x - x^2y)u_x + (2y - x^2y)u_y + \\ + \tfrac{1}{2}x^2u_{xx} + \tfrac{1}{2}y^2u_{yy} = 0, \tag{7}$$

використовуючи знайдені вище оператори симетрії першого порядку.

Відразу зауважимо, що у відокремленні змінних оператор I відіграє тривіальну роль, тому у подальшому дослідженні ми використовуємо такі підалгебри алгебри L_4: $\langle D_1\rangle$, $\langle D_2\rangle$, $\langle P_0\rangle$, $\langle D_2 + \alpha P_0\rangle$ $(\alpha \neq 0)$, $\langle D_1, P_0\rangle$.

Повне відокремлення змінних дає двовимірна підалгебра $\langle D_1, P_0\rangle$, тому розглянемо її випадок детально. Розв'язок з відокремленими змінними рівняння (6) ми отримаємо проінтегрувавши таку систему диференціальних рівнянь:

$$Lu = 0, \quad D_1u = -xu_x + yu_y = \lambda u, \quad P_0u = u_t = \gamma u, \tag{8}$$

де $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}$ – сталі відокремлення. Саме ж відокремлення змінних ми проводимо, інтегруючи два останні рівняння системи (8). Безпосередні обчислення показують, що власна функція операторів D_1 та P_0 має такий вигляд:

$$u = |y|^{\lambda}\, e^{\gamma t}\varphi(\omega), \quad \omega = xy. \tag{9}$$

Здійснивши підстановку (9) в перше рівняння системи (8), ми отримуємо таке звичайне диференціальне рівняння для визначення функції φ:

$$\omega^2\ddot{\varphi} + [4 + \lambda - 2\omega]\,\omega\dot{\varphi} + \\ + \left[\gamma + \tfrac{1}{2}\lambda^2 + \tfrac{3}{2}\lambda + 2 - (4 + \lambda)\omega\right]\varphi = 0. \tag{10}$$

Отже, відповідний алгебрі $\langle D_1, P_0\rangle$ розв'язок з відокремленими змінними має вигляд (9), де функція φ задовольняє звичайне диференціальне рівняння (10).

Одновимірним підалгебрам алгебри L_4 відповідає часткове відокремлення змінних. Нижче ми наводимо для кожної з таких підалгебр вигляд функцій u та рівняння з частинними похідними для визначення функції φ:

$$\langle D_1\rangle: \quad u = |y|^{\lambda}\, \varphi(t, \omega), \quad \omega = xy,$$

$$\varphi_t + \omega^2\varphi_{\omega\omega} + \left[(4+\lambda)\omega - 2\omega^2\right]\varphi_\omega +$$
$$+ \left[\tfrac{3}{2}\lambda + \tfrac{1}{2}\lambda^2 + 2 - (\lambda+4)\omega\right]\varphi = 0;$$
$$\langle D_2\rangle: \quad u = |\tfrac{x}{y}|^{-\frac{\lambda}{2}} \exp\left(\frac{\ln^2|\frac{x}{y}|}{4t}\right)\varphi(t,\omega), \quad \omega = xy,$$
$$\varphi_t + \omega^2\varphi_{\omega\omega} + 2\omega(2-\omega)\varphi_\omega + \left[2(1-2\omega) + \tfrac{1}{2t} + \tfrac{\lambda^2}{4}\right]\varphi = 0;$$
$$\langle P_0\rangle: \quad u = e^{\lambda t}\varphi(x,y),$$
$$\tfrac{1}{2}x^2\varphi_{xx} + \tfrac{1}{2}y^2\varphi_{yy} + (2x - x^2y)\varphi_x +$$
$$+ (2y - xy^2)\varphi_y + [2(1-2xy) + \lambda]\varphi = 0;$$
$$\langle D_2 + \alpha P_0\rangle: \quad u = \exp\left(\frac{\lambda t}{\alpha} - \frac{t\ln|\frac{x}{y}|}{\alpha} - \frac{2t^3}{3\alpha^2}\right)\varphi(\omega,\upsilon),$$
$$\omega = xy, \quad \upsilon = \ln|\tfrac{x}{y}| + \tfrac{1}{\alpha}t^2,$$
$$\left[\tfrac{\lambda-\upsilon}{\alpha} + 2(1-2\omega)\right]\varphi + 2\omega(2-\omega)\varphi_\omega + \omega^2\varphi_{\omega\omega} + \varphi_{\upsilon\upsilon} = 0.$$

У наведених вище співвідношеннях $\alpha \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ – стала відокремлення.

Використаємо результати симетрійної редукції та відокремлення змінних для побудови точних розв'язків рівняння (6). Безпосередня перевірка дозволяє переконатися, що загальний розв'язок рівняння (5) має вигляд

$$\varphi = (C_1 e^{2\omega} + C_2)\omega^{-2},$$

де C_1, C_2 – довільні сталі інтегрування. У відповідності з цим отримуємо такий частковий (стаціонарний) розв'язок рівняння (6):

$$u = \tfrac{1}{x^2y^2}\left(C_1 e^{2xy} + C_2\right), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Рівняння (10), в якому $\lambda = -4$, $\gamma = -6$ теж інтегрується в елементарних функціях і його загальний розв'язок має такий вигляд:

$$\varphi = C_1\left(1 + \tfrac{1}{\omega}\right) + C_2\left(1 - \tfrac{1}{\omega}\right)e^{2\omega}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Відповідний частковий (нестаціонарний) розв'язок рівняння (6) такий:

$$u = y^{-4}e^{-6t}\left[C_1\left(1 + \tfrac{1}{xy}\right) + C_2\left(1 - \tfrac{1}{xy}\right)e^{2xy}\right], \quad C_1, C_2, \in \mathbb{R}.$$

Аналогічний розгляд рівняння (10), в якому $\lambda = \gamma = -4$ приводить ще до такого розв'язку рівняння (6):

$$u = y^{-4}e^{-4t}(C_1 + C_2 e^{2xy}), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Нарешті, рівняння (5) заміною змінних $\varphi = \omega^k \eta(\omega)$, де $k = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{1-4\alpha}$ $(\alpha \leqslant \frac{1}{4})$ зводиться до рівняння

$$\omega\eta'' + [-2\omega + 2k + 4]\,\eta' - (2k+4)\eta = 0,$$

розв'язками якого є функції

$$\eta = \omega^{-k-2}e^{\omega}\eta(0, k+1, 2\omega),$$

де $\eta(0, k+1, 2\omega)$ – розв'язок рівняння Уіттекера (див., наприклад, [11]). Згідно з цим отримуємо ще такий клас точних розв'язків рівняння (6):

$$u = e^{\alpha t + xy}(xy)^{-2}\psi(0, k+1, 2\omega),$$

де $k = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{1-4\alpha}$ $(\alpha \leqslant \frac{1}{4})$, $\psi(0, k+1, 2\omega)$ – розв'язок рівняння Уіттекера

$$4\omega^2\psi'' = (\omega^2 + 4(k+1)^2 - 1)\psi, \quad \omega = xy.$$

Певну інформацію про структуру точних розв'язків рівняння (6) дають і диференціальні рівняння з частинними похідними, які були отримані в результаті редукції та відокремлення змінних за одновимірними підалгебрами. Так, наприклад, рівняння, отримане редукцією за підалгеброю $\langle D_2 \rangle$, заміною змінних

$$\varphi = t^{-\frac{1}{2}}\psi(t, \omega)$$

зводиться до рівняння

$$\psi_t + \omega^2\psi_{\omega\omega} + 2\omega(2-\omega)\psi_\omega + 2(1-2\omega)\psi = 0. \tag{11}$$

Покладемо, наприклад,

$$\psi = e^{\beta t}\Phi(\omega) + e^{-\beta t}F(\omega), \quad \beta \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Підстановка (12) в (11) показує, що функція буде розв'язком рівняння (11) за умови, що функції Φ і F задовольняють рівняння

$$\omega^2\Phi_{\omega\omega} + 2\omega(2-\omega)\Phi_\omega + [2(1-2\omega) + \beta]\,\Phi = 0,$$

$$\omega^2 F_{\omega\omega} + 2\omega(2-\omega)F_\omega + [2(1-2\omega)-\beta]\,F = 0,$$

які є рівняннями вигляду (5) і точні розв'язки яких, як було показано вище, визначаються через розв'язки рівняння Уіттекера. До аналогічного результату приводить і розгляд рівнянь, отриманих в результаті відокремлення змінних в рівнянні (6) за підалгебрами $\langle D_1 \rangle\,, \langle D_2 \rangle\,.$

Отримані результати дозволяють стверджувати, що наявність в диференціального рівняння хоча б невисоких симетрійних властивостей дозволяє редукувати багатовимірну задачу до задачі в просторі з меншою кількістю змінних. Наскільки нам відомо, останній тип розв'язків у рівнянь Фоккера–Планка в просторах розмірності вищої за два ще систематично не досліджувався. А як випливає з отриманих результатів, ці розв'язки є більш загальними, ніж інваріантні розв'язки, яким в основному приділялася увага дослідників.

[1] Gardiner C.W. Handbook of stochastic methods. – Berlin: Springer, 1985.

[2] Risken H. The Fokker–Planck equation. – Berlin: Springer, 1996.

[3] Bluman G., Kumei S. Symmetries and differential equations. – New York: Springer, 1989.

[4] Ovsiannikov L.V. Group analysis of differential equations. – New York: Academic, 1982.

[5] Olver P. Applications of Lie groups to differential equations. – New York: Springer, 1986.

[6] Shtelen W.M., Stogny V.S. Symmetry properties of one- and two- dimensional Fokker-Planck equations // J. Phys. A: Math. Gen. – 1989. – **22**. – L539–L543.

[7] Saied E.A. On the similarity solutions for the free Kramers equation // Appl. Math. and Comp. – 1996. – **74**. – P. 59–63.

[8] Finkel F. Symmetries of the Fokker–Planck equations with a constant diffusion matrix in $2+1$ dimensions // J. Phys. A: Math. Gen. – 1999. – **32**. – P. 2671–2684.

[9] Patera J., Winternitz P. Subalgebras of real three- and four-dimensonal Lie algebras // J. Math. Phys. – 1977. – **18**. – P. 1449–1455.

[10] Miller W. Symmetry and separation of variables. – Reading: Addison-Wesley, 1977.

[11] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – Москва: Наука, 1976.