Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 276–283

УДК 517.9

Узагальнення бігамільтонових зображень Лакса та оператори перетворень типу Дарбу

Ю.М. СИДОРЕНКО

Львівський національний університет імені Івана Франка
E-mail: y_sydorenko@franko.lviv.ua

Запропоновано метод узагальнення бігамільтонових динамічних систем. Для інтегрування отриманих систем використовується метод бінарних одягаючих перетворень Дарбу.

A method of generalization of bi-Hamiltonian dynamical systems is proposed. For integrating the obtained generalized systems the binary Darboux dressing-method is applied.

1. Вступ. Робота складається із вступу, двох розділів і заключних зауважень. У розділі 2 наводяться основні поняття, означення і необхідні в подальших розділах формули і властивості з теорії формальних символів інтегродиференціальних операторів. У розділі 3 побудовано векторне узагальнення породжуючого оператора нелінійної моделі Шредінгера, знайдено для нього групу операторів перетворення типу Дарбу та доведена теорема Дарбу, яка дозволяє будувати широкі класи точних розв'язків для нелінійної багатокомпонентної моделі типу Шредінгера.

2. Вихідні положення. Розглянемо над полем $\mathbb{C}$ лінійний простір ζ мікродиференціальних операторів (МДО) (формальних символів) вигляду

$$L \in \zeta = \left\{ \sum_{i=-\infty}^{n(L)} a_i \mathcal{D}^i : \, i, n(L) \in \mathbb{Z} \right\}, \tag{1}$$

де коефіцієнти a_i є матричними $(N \times N)$-функціями "просторової" змінної $x = t_1$: $a_i \in \mathrm{Mat}_{N\times N}(\mathbb{R} \to \mathbb{C})$ і еволюційних параметрів $t_2 := t,\ t_3,\ \ldots$. Матричні коефіцієнти $a_i(t)$, $t = (t_1, t_2, \ldots)$, вважаються гладкими функціями векторної змінної t, яка має скінчену кількість компонент, і належать деякому функціональному простору $\mathcal{H}$, який є диференціальною алгеброю стосовно звичайних арифметичних дій, а оператор диференціювання $\mathcal{D} := \frac{\partial}{\partial x}$.

Структура алгебри Лі на лінійному просторі ζ визначається комутатором Лі $[\cdot,\cdot] : \zeta \times \zeta \to \zeta$, $[L_1, L_2] = L_1 L_2 - L_2 L_1$, де композиція (операторне множення) МДО L_1 та L_2 індукується загальним правилом Лейбніца

$$\mathcal{D}^n f := \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} f^{(j)} \mathcal{D}^{n-j}, \tag{2}$$

де $n \in \mathbb{Z}$, $f \in \mathcal{H} \subset \zeta$, $f^{(j)} := \frac{\partial^j f}{\partial x^j} \in \mathcal{H} \subset \zeta$, $\mathcal{D}^n \mathcal{D}^m = \mathcal{D}^m \mathcal{D}^n = \mathcal{D}^{n+m}$, $\forall\, n, m \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{j} := \frac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{j!}$, $j > 0$; $\binom{n}{0} := 1$.

Формула (2) задає композицію оператора $\mathcal{D}^n \in \zeta$ і оператора множення на функцію $f \in \mathcal{H} \subset \zeta$ (як оператора нульового порядку) на відміну від позначення $\mathcal{D}^k\{f\} := \frac{\partial^k f}{\partial x^k} \in \mathcal{H}$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Порядком оператора $L = \sum\limits_{i=-\infty}^{n(L)} a_i \mathcal{D}^i$, де $a_{n(L)} \neq 0$, називається ціле число $n(L)$: $\operatorname{ord} L = n(L)$.

Для оператора $S \in \zeta$ транспонований і спряжений оператори задаються формулами

$$S^\tau := \sum_{i=-\infty}^{n(S)} (-1)^i \mathcal{D}^i s_i^\top, \quad S^* := \sum_{i=-\infty}^{n(S)} (-1)^i \mathcal{D}^i s_i^*,$$

де $s_i^* := \bar{s_i}^\top$ – ермітово-спряжена матриця, тобто $S^* := \bar{S^\tau}$, "$\top$" – символ операції звичайного матричного транспонування.

Під символом $\varphi \mathcal{D}^{-1} \psi^\top \in \zeta$ згідно правила Лейбніца при $n = -1$ розуміємо формальний ряд

$$\varphi \mathcal{D}^{-1} \psi^\top = \varphi \psi^\top \mathcal{D}^{-1} - \varphi \psi_x^\top \mathcal{D}^{-2} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \varphi (\psi^{(i)})^\top \mathcal{D}^{-i-1},$$

де φ, $\psi \in \mathrm{Mat}_{N\times K}(\mathbb{R} \to \mathbb{C})$. Цей ряд є символом оператора Вольтерри $\hat{K}$ по змінній x з виродженим ядром

$$\hat{K}\{f\} = \int^x K(x,y) f(y)\, dy, \quad K(x,y) = \varphi(x) \psi^\top(y).$$

Нехай $\alpha_n \in \mathbb{C}$, $\mathcal{I} \ni t_n$ – еволюційний параметр з деякої множини параметрів $\mathcal{I}$; $1 < n \in \mathbb{N}$, $\partial_{t_n} := \frac{\partial}{\partial t_n}$ – оператор диференціювання; $\partial_{t_n} f := f\partial_{t_n} + f_{t_n} = f\partial_{t_n} + \frac{\partial f}{\partial t_n}$, $\partial_{t_n}\{f\} := \frac{\partial f}{\partial t_n}$, $\partial_{t_n}\mathcal{D}^j = \mathcal{D}^j\partial_{t_n}$. Позначимо через E елемент центру алгебри ζ. Розглянемо множину $\hat{\zeta}$, яка містить алгебру Лі ζ в якості підмножини:

$$\hat{\zeta} \ni (\alpha_n; S) \cong \alpha_n E\partial_{t_n} - S = \alpha_n E\partial_{t_n} - \sum_{i=-\infty}^{n(S)} s_i\mathcal{D}^i,$$

$$[(\alpha_n; A), (\alpha_m; B)] := (0; \alpha_m E A_{t_m} - \alpha_n E B_{t_n} + [A, B]) \in \hat{\zeta}.$$

Зауваження. З попередньої формули видно, що $\hat{\zeta}$ є мультиплікативно-замкненою відносно операції Лі (комутатора) множиною.

Таким чином, елементами множини $\hat{\zeta}$ є еволюційні інтегродиференціальні оператори вигляду $\hat{\zeta} \ni L = \alpha_n E\partial_{t_n} - \sum\limits_{i=-\infty}^{n(L)} u_i\mathcal{D}^i$, $\hat{\zeta}_{\geq 0} \ni L_{\geq 0} = \alpha_n E\partial_{t_n} - \sum\limits_{i=0}^{n(L)} u_i\mathcal{D}^i$, $\hat{\zeta}_{\leq 0} = \zeta_{\leq 0}$.

Ермітово-спряжений оператор L^* має вигляд: $L^* := -\bar{\alpha}_n E^*\partial_{t_n} - \sum\limits_{i=-\infty}^{n(L)} (-1)^i\mathcal{D}^i a_i^*$. Транспонований оператор L^τ і оператор L^* задовольняють співвідношення $L^* = \bar{L}^\tau$.

Надалі обмежимося випадком $E = I_\zeta := I$.

Нехай σ – невироджена стала матриця розмірності $N \times N$.

Означення 1. Інтегро-диференціальний оператор L називається σ-косоермітовим (ермітовим), якщо $L^* = -\sigma L\sigma^{-1}$ ($L^* = \sigma L\sigma^{-1}$).

Означення 2. Інтегро-диференціальний оператор L називається σ-кососиметричним (σ-симетричним), якщо $L^\tau = -\sigma L\sigma^{-1}$ ($L^\tau = \sigma L\sigma^{-1}$).

Очевидно, σ-косоермітові і σ-кососиметричні інтегро-диференціальні оператори утворюють мультиплікативно-замкнені множини стосовно операції Лі-комутатора ($[A, B] := AB - BA$).

Означення 3. Інтегро-диференціальний оператор W називається σ-унітарним, якщо $W^{-1} = \sigma W^*\sigma^{-1}$.

Означення 4. Інтегро-диференціальний оператор W називається σ-ортогональним, якщо $W^{-1} = \sigma W^\tau\sigma^{-1}$.

Надалі через σ_i позначено стандартні матриці Паулі, $i = 1, 2, 3$.

Лема 1. *Нехай* $L_0 \in \zeta$ *задовольняє 2 редукції:*

$$1)\ \ L_0^* = -\sigma_3 L_1 \sigma_3, \quad 2)\ \ L_0^\tau = \sigma_2 L_1 \sigma_2.$$

Тоді $L = W L_0 W^{-1}$ *задовольняє ці дві редукції тоді і лише тоді, коли виконуються умови:*

1) W *–* σ_3*-унітарний,* 2) W *–* σ_2*-ортогональний.*

Доведення.

$$\begin{aligned}
1)\ \ & L_0^* = -\sigma_3 L_0 \sigma_3,\\
& L^* = (W L_0 W^{-1})^* = (W^{-1})^* L_0^* W^* =\\
& = \sigma_3 W \sigma_3 (-\sigma_3 L_0 \sigma_3) \sigma_3 W^{-1} \sigma_3 = -\sigma_3 W L_0 W^{-1} \sigma_3 = -\sigma_3 L \sigma_3.\\
2.\ \ & L_1^\tau = \sigma_2 L_0 \sigma_2,\\
& L_2^\tau = (W L_0 W^{-1})^\tau = (W^{-1})^\tau L_0^\tau W^\tau =\\
& = \sigma_2 W \sigma_2 (\sigma_2 L_0 \sigma_2) \sigma_2 W^{-1} \sigma_2 = \sigma_2 W L_1 W^{-1} \sigma_2 = \sigma_2 L \sigma_2.
\end{aligned}$$

3. Побудова та інтегрування рекурсійних зображень Лакса для нелінійного рівняння Шрьодінгера. Для нелінійного рівняння Шрьодінгера (NS)

$$i q_{1t} = q_{1xx} + \mu |q_1|^2 q_1 = K[q_1], \tag{3}$$

де $q_1(x,t)$ – скалярна комплекснозначна функція, $\mu \in \mathbb{R}$, відоме операторне зображення Лакса:

$$-i L_t = [L, K'^\tau] \Longleftrightarrow [L, i\partial_t - K'^\tau] = 0,$$

де оператор L називається породжуючим (рекурсійним) оператором і факторизується узгодженою парою гамільтонових операторів (див., наприклад, [1–3]),

$$\begin{aligned}
& L = \sigma_3 \mathcal{D} + \mu \begin{pmatrix} q_1 \\ \alpha \bar{q}_1 \end{pmatrix} \mathcal{D}^{-1} (\bar{q}_1 \quad -\bar{\alpha} q_1), \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad |\alpha|^2 = 1,\\
& K^{'\tau} = \sigma_3 \mathcal{D}^2 + \begin{pmatrix} 2\mu |q_1|^2 & -\mu \bar{\alpha} q_1^2 \\ \mu \alpha \bar{q}_1^2 & -2\mu |q_1|^2 \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{4}$$

K' – похідна Фреше оператора K.

Безпосередніми обчисленнями нескладно перевірити справедливість наступного твердження для операторів L і $M := i\partial_t - K'^\tau$ пари Лакса (4).

Твердження 1. 1) *Оператор L є σ_3-косоермітовим та σ_2-симетричним, тобто*

$$L^* = -\sigma_3 L \sigma_3, \quad L^\tau = \sigma_2 L \sigma_2.$$

2) *Оператор M є σ_3-ермітовим та σ_2-кососиметричним, тобто*

$$M^* = \sigma_3 M \sigma_3, \quad M^\tau = -\sigma_2 M \sigma_2.$$

В цьому розділі ми будуємо комутуючу пару операторів L_{NS} і M_{NS}, які є векторними узагальненнями пари Лакса L, M (4) і зберігають її властивості, сформульовані в твердженні 1.

Для пари операторів L_{NS} і M_{NS} побудовано також групу перетворень типу Дарбу, а відповідна теорема Дарбу дозволяє побудувати широкі класи точних розв'язків рівняння Лакса $[L_{NS}, M_{NS}] = 0$, яке рівносильне векторному узагальненню нелінійного рівняння Шрьодінгера (3).

Розглянемо пару операторів:

$$L = \sigma_3 \mathcal{D} + u + q\mathcal{D}^{-1} r^*, \tag{5}$$

$$M = i\partial_t - \sigma_3 \mathcal{D}^2 - v\mathcal{D} - w, \tag{6}$$

де

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11}, q_{12}, \ldots, q_{1l} \\ q_{22}, q_{22}, \ldots, q_{2l} \end{pmatrix},$$
$$r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11}, r_{12}, \ldots, r_{1l} \\ r_{22}, r_{22}, \ldots, r_{2l} \end{pmatrix},$$

і кожна з чотирьох систем функцій q_i, r_i є лінійно незалежною, $i = 1, 2$, $l \in \mathbb{N}$, $u = \begin{pmatrix} 0 & u_1 \\ u_2 & 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix}$, тут u_{ij}, v_{ij}, w_{ij}, $i, j = 1, 2$ – гладкі функції змінних x, t.

Теорема 1. *Оператори L, M* (5)–(6) *комутують і задовольняють твердження* 1 *тоді і тільки тоді, якщо вони мають вигляд*

$$L := L_{NS} = \sigma_3 \mathcal{D} + \begin{pmatrix} \mathbf{q_1} \\ \bar{\mathbf{q}}_\mathbf{1} N^\top E \end{pmatrix} N \mathcal{D}^{-1} (\mathbf{q_1}^* - E^* \bar{N} \mathbf{q_1}^\top) =$$
$$= \sigma_3 \mathcal{D} + \breve{\Phi} N \mathcal{D}^{-1} \breve{\Phi}^* \sigma_3,$$

$$M := M_{NS} = i\partial_t - \sigma_3\mathcal{D}^2 - \begin{pmatrix} v_{11} & 0 \\ 0 & v_{11} \end{pmatrix}\mathcal{D} - \tag{7}$$
$$- \begin{pmatrix} 2\mathbf{q_1}N\mathbf{q_1}^* & -\mathbf{q_1}E^{-1}\mathbf{q_1}^\top \\ \bar{\mathbf{q_1}}\bar{E}^{-1}\mathbf{q_1}^* & -2\bar{\mathbf{q_1}}\bar{N}\mathbf{q_1}^\top \end{pmatrix}, \quad v_{11} = -\bar{v}_{11}, v_{11} = v_{11}(t).$$

де $\mathbf{q}_1 = (q_1, q_2, \ldots, q_l)(x)$ – l-*компонентна комплекснозначна вектор-функція,* $\breve{\Phi} = \binom{\mathbf{q_1}}{\bar{\mathbf{q_1}}N^\top E}$, $N \in \mathrm{Mat}_{l\times l}(\mathbb{C})$ – *унітарна,* $E \in Mat_{l\times l}(\mathbb{C})$ – *симетрична,* $N\bar{E}N^\top E^\top = I$, *і вектор-функція* $\mathbf{q_1}$ *задовольняє рівняння типу Шрьодінгера*

$$i\mathbf{q}_{1t} = \mathbf{q}_{1xx} + 2\mathbf{q}_1 N\mathbf{q}_1^*\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_1 E^{-1}\mathbf{q}_1^\top \bar{\mathbf{q}}_1 N^\top E.$$

Доведення. Коефіцієнти оператора M (6) виражаються через коефіцієнти оператора L (5) з умови комутативності $[L, M] = 0$. Зв'язки між коефіцієнтами оператора L (5) рівносильні редукційним обмеженням твердження 1. Векторне рівняння типу Шрьодінгера рівносильне умові комутативності операторів L_{NS} і M_{NS} (7).

Теорема 2. *Нехай* $\varphi = \binom{\varphi_1}{i\bar{\varphi}_1}$ – *фіксована* $(2\times K)$-*матриця розв'язків лінійної системи:*

$$\sigma_3\begin{pmatrix}\varphi_1 \\ i\bar{\varphi}_1\end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix}\varphi_1 \\ i\bar{\varphi}_1\end{pmatrix}\Lambda, \quad \text{де} \quad \Lambda \in \mathrm{Mat}_{K\times K}(i\mathbb{R}),$$
$$i\begin{pmatrix}\varphi_1 \\ i\bar{\varphi}_1\end{pmatrix}_t = \sigma_3\begin{pmatrix}\varphi_1 \\ i\bar{\varphi}_1\end{pmatrix}_{xx}, \tag{8}$$

а f – *довільний розв'язок цієї системи. Тоді*

$$1) \quad L := W\sigma_3\mathcal{D}W^{-1} = \sigma_3\mathcal{D} + \Phi\breve{N}\mathcal{D}^{-1}\Phi^*\sigma_3, \tag{9}$$

де

$$W := I + \Phi\mathcal{D}^{-1}\begin{pmatrix}\varphi_1 \\ i\bar{\varphi}_1\end{pmatrix}^\top, \tag{10}$$
$$\Phi = \begin{pmatrix}\varphi_1 \\ i\bar{\varphi}_1\end{pmatrix}\left(C + \int^x (\varphi_1^\top\bar{\varphi}_1 - \varphi_1^*\varphi_1)ds\right)^{-1} =: \begin{pmatrix}\Phi_1 \\ \Phi_2\end{pmatrix},$$

$\varphi_1^\top\bar{\varphi}_1 - \varphi_1^*\varphi_1 \in \mathrm{Mat}_{K\times K}(\mathbb{C})$ – *ермітова та кососиметрична матрична функція, а сталі матриці* $\breve{N}$, C *задовольняють співвідношення* $\breve{N} = \Lambda^\top C - C\Lambda \in \mathrm{Mat}_{K\times K}(\mathbb{R})$ – *симетрична;* $C^* = C$, $C = -C^\top$.

$$2) \quad f \to F = W\{f\}, \quad \text{де } F \text{ є розв'язком рівняння: } L\{F\} = F\Lambda.$$

Доведення. Оператор W (10) отримується з оператора загальних бінарних перетворень Дарбу [4] після врахування редукційних обмежень твердження 1 на власні функції оператора L і спряженого оператора L^*. Неважко перевірити, що оператори $L_0 = \sigma_3\mathcal{D}$, $M_0 = i\partial_t - \sigma_3\mathcal{D}^2$ і W задовольняють умови леми 1, отже і оператори $L := WL_0W^{-1}$ та $M := WM_0W^{-1}$ задовольняють редукційні обмеження теореми 1. Явний вигляд операторів L (9) і M (7) можна знайти як в результаті безпосередніх обчислень, так і як частковий випадок загального інтегродиференціального оператора L, отриманого в роботі [4] після врахування редукційних обмежень твердження 1.

Наслідок 1. *При $K = l$ та $N = \breve{N}$ функція*

$$\Phi_1 = (\Phi_{11}, \Phi_{12}, \ldots, \Phi_{1K})$$

є розв'язком l-компонентного нелінійного рівняння Шрьодінгера:

$$i\mathbf{q}_{1t} = \mathbf{q}_{1xx} + 2\mathbf{q}_1 N\mathbf{q}_1^*\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_1 E^{-1}\mathbf{q}_1^\top \bar{\mathbf{q}}_1 N^\top E.$$

3. Заключні зауваження. Один із систематичних методів отримання векторно-матричних узагальнень відомих інтегровних моделей започатковано в роботах [5, 6] (див. також [7, 8]). Цей метод базується на використанні "нестандартних" – інтегродиференціальних зображень Лакса. Використання інших, специфічних зображень (теж інтегродиференціальних), пов'язаних з бігамільтоновістю більшості відомих інтегровних моделей, коли відповідні оператори Лакса (рекурсійні оператори, див. наприклад [1–3]) виникають як факторизація двох гамільтонових, було продемонстровано з цією ж метою в роботі [7] для скалярної алгебри ζ. В попередньому розділі ми розширили цей підхід на випадок матричної алгебри ζ, в якій крім рекурсійних зображень Лакса для НРШ міститься також багато інших цікавих зображень. Зокрема бігамільтонові зображення різних модифікованих систем типу Шрьодінгера [1, 2], для яких можна отримати аналогічні результати. Цим питанням планується присвятити окрему роботу.

[1] Сидоренко Ю.Н. О гамильтоновости некоторых двукомпонентных систем / Вопросы квантовой теории поля и статистической физики. т. 6 // Зап. науч. семин. ЛОМИ АН СССР. – 1986. – **150**. – С. 143–153.

[2] Митропольский Ю.А., Боголюбов Н.Н. (мл.), Прикарпатский А.К., Самойленко В.Г. Интегрируемые динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты. – Киев: Наук. думка, 1987. – 296 с.

[3] Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. – Москва: Наука, 1986. – 528 с.

[4] Sydorenko Yu. Generalized binary Darboux-like theorem for constrained Kadomtsev–Petviashvili (cKP) flows // Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv. – 2004. – **50**, Part 1. – P. 470–477.

[5] Sidorenko Yu. KP-hierachy and (1+1)-dimensional multicomponent integrable systems // Укр. мат журн. – 1993. – **25**. – С. 91–104.

[6] Sidorenko Yu., Strampp W. Multicomponents integrable reductions in Kadomtsev–Petviashvilli hierarchy // J. Math. Phys. – 1993. – **34**. – P. 1429–1446.

[7] Беркела Ю.Ю., Сидоренко Ю.М. Векторно-матричні узагальнення бігамільтонових динамічних систем та їх інтегрування // Математичні студії. – 2005.– **23**. – С. 31–51.

[8] Притула Н.М., Сидоренко Ю.М. Теорема Дарбу для породжуючого оператора нелінійної моделі Шредінгера / Тези доповідей міжнародної конференції “Математичний аналіз і суміжні питання”. – Львів, 2005. – С. 83.