Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 270–275

УДК 517.9

Некласичне узагальнення одновимірної системи рівнянь Нав'є–Стокса

М.М. СЄРОВА

Полтавський нац. технічний університет ім. Юрія Кондратюка
E-mail: k26@pntu.poltava.ua

Система одновимірних рівнянь Нав'є–Стокса узагальнена на випадок двовимірного векторного поля та однієї просторової змінної із збереженням інваріантності відносно узагальненої алгебри Галілея.

The system of one-dimensional Navier–Stokes equations is generalized two the case of two-dimensional vector field and one space variable, with preserving invariance under generalized Galilei algebra.

1. Вступ. Основними рівняннями, які описують процеси гідродинаміки є система рівнянь Нав'є–Стокса. В одновимірному випадку дана система має вигляд:

$$\begin{aligned} &u_0 + uu_1 + u_{11} = -\tfrac{1}{\rho}\partial_1 p, \\ &\rho_0 + \partial_1(\rho u) = 0, \quad p = f(\rho), \end{aligned} \tag{1}$$

де $u = u(x)$ – швидкість, $\rho = \rho(x)$ – густина, $p = p(x)$ – тиск рідини, $x = x(x_0, x_1)$, $u_\mu = \frac{\partial u}{\partial x_\mu}$, $\mu = 0, 1$, $f(\rho)$ – довільна гладка функція.

У роботах [1–6] досліджені симетрійні властивості системи рівнянь Нав'є–Стокса та одержані її інваріантні розв'язки. При довільній гладкій функції $f(\rho)$ система (1) інваріантна відносно алгебри Галілея $AG(1,1)$, базисні оператори якої мають вигляд

$$\partial_0, \quad \partial_1, \quad G = x_0\partial_1 + \partial_u. \tag{2}$$

Якщо ж $f(\rho) = \lambda\rho^k$ (λ, k – довільні сталі), то базисні елементи (2) розширюються оператором масштабних перетворень

$$D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - u\partial_u + \tfrac{2}{1-k}\rho\partial_\rho. \tag{3}$$

Найбільш широку симетрію система Нав'є–Стокса (1) допускає у випадку $f(\rho) = \lambda\rho^3$. При такому значенні $f(\rho)$ максимальною в розумінні С. Лі алгеброю інваріантності системи (1) є узагальнена алгебра Галілея $AG_2(1,1)$ з базисними операторами

$$\begin{aligned}&\partial_0, \quad \partial_1, \quad G, \quad D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - u\partial_u - \rho\partial_\rho,\\ &\Pi = x_0(x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - \rho\partial_\rho) + (x_1 - x_0u)\partial_u.\end{aligned} \tag{4}$$

Класичним узагальненням системи (1) на випадок довільної кількості незалежних змінних $x = (x_0, \vec{x}) \in \mathbb{R}^{1+n}$ є система:

$$\begin{aligned}&u_0 + (\vec{u}\vec{\nabla})\vec{u} + m\triangle\vec{u} = -\tfrac{1}{\rho}\vec{\nabla}p,\\ &\rho_0 + \operatorname{div}(\rho\vec{u}) = 0, \quad p = f(\rho).\end{aligned} \tag{5}$$

Таке узагальнення (5) є правильним як з фізичної точки зору, так і з точки зору симетрійного аналізу, оскільки симетрійні властивості системи (5) відповідають симетрійним властивостям системи (1), враховуючи розширення простору $(\vec{x}, \vec{u})$, тобто максимальною алгеброю інваріантності системи (5) є узагальнена алгебра Галілея $AG_2(1,n)$ з наступними базисними операторами:

$$\begin{aligned}&\partial_0, \quad \partial_1, \quad G_a = x_0\partial_a + \partial_{u^a}, \quad D = 2x_0\partial_0 + x_a\partial_a - u^a\partial_{u^a} - n\rho\partial_\rho,\\ &\Pi = x_0(x_0\partial_0 + x_a\partial_a - n\rho\partial_\rho) + (x_a - x_0u^a)\partial_{u^a}.\end{aligned}$$

Але, незважаючи на це, система (5) має недолік: вона може застосовуватися тільки тоді, коли кількість функцій $\vec{u}$ співпадає з кількістю незалежних просторових змінних $\vec{x}$. Зауважимо, що при описанні деяких гідродинамічних процесів виникають ситуації, коли розмірність простору незалежних змінних $\vec{x}$ не співпадає з розмірністю векторного поля $\vec{u}$ (див. наприклад, [7, 8]). У таких випадках дані процеси моделюються іншими рівняннями.

Одним із прикладів такого моделювання може бути симетрійний принцип, на основі якого в даній роботі пропонуються інші математичні моделі, які узагальнюють одновимірну систему (1) і інваріантні відносно узагальненої алгебри Галілея, у яких розмірність вектора поля $\vec{u}$ не співпадає з кількістю просторових змінних $\vec{x}$.

Оскільки основу системи Нав'є–Стокса складає рівняння Бюргерса

$$u_0 + uu_1 + u_{11} = 0, \tag{6}$$

то спочатку необхідно його узагальнити на випадок багатьох залежних змінних.

Добре відомо, що максимальною алгеброю інваріантності рівняння (6) є узагальнена алгебра Галілея $AG_2(1,1)$, базисні елементи якої

$$\begin{aligned}
&\partial_0, \quad \partial_1, \quad G, \quad D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - u\partial_u - \rho\partial_\rho, \\
&\Pi = x_0(x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - \rho\partial_\rho) + (x_1 - x_0 u)\partial_u
\end{aligned} \tag{7}$$

задовольняють комутаційним співвідношенням

$$\begin{aligned}
&[\partial_0, \partial_1] = 0, \quad [\partial_0, G] = \partial_1, \quad [\partial_0, D] = 2\partial_0, \\
&[\partial_0, \Pi] = D, \quad [\partial_1, G] = 0, \quad [\partial_1, D] = \partial_1, \\
&[\partial_1, \Pi] = G, \quad [G, D] = -G, \quad [G, \Pi] = 0, \quad [D, \Pi] = 2\Pi.
\end{aligned} \tag{8}$$

Розглянемо випадок $\vec{u} = \vec{u}(x_0, x_1) = \{u^1, u^2\} \in \mathbb{R}^2$. Рівняння (6) узагальнимо наступною системою

$$u_0^a + F^{ab}(u)u_1^b + u_{11}^a = 0, \tag{9}$$

де F^{ab} – довільні гладкі функції, $a, b = 1, 2$.

Будемо вимагати, щоб система (9) була інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея $AG_2(1,1)$ з базисними операторами вигляду

$$\begin{aligned}
&\partial_0, \quad \partial_1, \quad G = x_0\partial_1 + \eta^a(x,u)\partial_{u^a}, \\
&D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + \zeta^a(x,u)\partial_{u^a}, \\
&\Pi = x_0(x_0\partial_0 + x_1\partial_1) + \sigma^a(x,u)\partial_{u^a}.
\end{aligned} \tag{10}$$

У роботі [9] показано, що зображення операторів (10) можуть бути лише лінійними по змінних u, тобто

$$\begin{aligned}
&\eta^a = a^{ab}(x)u^b + b^a(x), \quad \zeta^a = \alpha^{ab}(x)u^b + \beta^a(x), \\
&\sigma^a = c^{ab}(x)u^b + d^a(x),
\end{aligned} \tag{11}$$

де a^{ab}, α^{ab}, c^{ab}, b^a, β^a, d^a – довільні гладкі функції.

Для того щоб оператори (10) утворювали базис алгебри $AG_2(1,1)$, потрібно щоб вони задовольняли комутаційним співвідношенням (8).

Враховуючи формули (11) і (8), одержуємо що оператори (10) мають вигляд

$$\partial_0, \quad \partial_1, \quad G = x_0\partial_1 + Q_1, \quad D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + Q_2,$$

$$\Pi = x_0(x_0\partial_0 + x_1\partial_1) + x_1Q_1 + x_0Q_2, \tag{12}$$

де $Q_i = (m_{iab}u^b + n_{ia})\partial_{u^a}$, m_{iab}, n_{ia} – довільні сталі.

Таким чином, наша задача звелася до знаходження таких функцій $F^{ab}(u)$ і сталих m_{iab}, n_{ia}, при яких система рівнянь (9) буде інваріантна відносно алгебри з базисними операторами (12). Детальний опис таких систем проведено в [9].

Використавши, наприклад, наступну систему з [9]

$$u_0^1 + u^1u_1^1 + u_{11}^1 = 0, \quad u_0^2 + u^1u_1^2 + u_{11}^2 = 0,$$

яка інваріантна відносно узагальненої алгебри алгебри з базисними операторами вигляду

$$\partial_0, \quad \partial_1, \quad x_0\partial_1 + \partial_{u^1}, \quad 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - u^1\partial_{u^1},$$
$$x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + (x_1 - x_0u^1)\partial_{u^1},$$

одновимірну систему рівнянь Нав'є–Стокса (1) будемо узагальнювати на випадок двовимірного векторного поля $\vec{u}$ та однієї просторової змінної x_1 наступним чином

$$\vec{u}_0 + u^1\vec{u}_1 + \vec{u}_{11} = \vec{f}(\rho)\rho_1, \quad \rho_0 + \partial_1[\vec{g}(\rho)\vec{u}] = 0, \tag{13}$$

де $\vec{f} = (f^1(\rho), f^2(\rho))$, $\vec{g} = (g^1(\rho), g^2(\rho))$ – довільні гладкі векторфункції.

Вимагаємо щоб система (13) була інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея $AG_2(1,1)$, базисні елементи якої з врахуванням комутаційних співвідношень (8) мають вигляд

$$\partial_0, \quad \partial_1, \quad G = x_0\partial_1 + \partial_{u^1},$$
$$D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - u^1\partial_{u^1} + mu^2\partial_{u^2} + k\rho\partial_\rho,$$
$$\Pi = x_0(x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - u^1\partial_{u^1} + mu^2\partial_{u^2} + k\rho\partial_\rho) + x_1\partial_{u^1}, \tag{14}$$

де m, k – довільні сталі. Справедливе наступне твердження.

Теорема. *Система* (13) *інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея з базисними операторами* (14)*, тоді і тільки тоді, коли*

$$k = -1, \quad m = 0,$$
$$f^1 = \lambda_1\rho, \quad f^2 = \lambda_2, \quad g^1 = \rho, \quad g^2 = \lambda_3\rho^2, \tag{15}$$

де λ_1, λ_2, λ_3 – довільні сталі.

Доведення. Використавши критерій С. Лі [10, 11] інваріантності системи (13) відносно алгебри з базисними операторами (14), одержуємо систему визначальних рівнянь відносно невідомих функцій $\vec{f}$, $\vec{g}$ та сталих k, m:

$$
\begin{aligned}
&k\rho f^1 + (k+2)f^1 = 0, \quad k\rho \dot{f}^2 + (k-m+1)f^2 = 0,\\
&m = 0, \quad k\ddot{g}^1 = 0, \quad \dot{g}^1 = 1, \quad k(\rho\dot{g}^1 - g^1) = 0, \quad g^1 = -k\rho,\\
&k\rho\ddot{g}^2 + (m+1)\dot{g}^2 = 0, \quad k\rho\dot{g}^2 + (m-k+1)g^2 = 0. \qquad (16)
\end{aligned}
$$

Неважко бачити, що система (16) сумісна лише при $k = -1$, $m = 0$ і її загальний розв'язок задається формулами (15). □

Отже, система

$$
\begin{aligned}
&u_0^1 + u^1 u_1^1 - u_{11}^1 = \lambda_1 \rho\rho_1, \quad u_0^2 + u^1 u_1^2 - u_{11}^2 = \lambda_2 \rho_1,\\
&\rho_0 + \partial_1[\rho(u^1 + \lambda_3 \rho u^2)] = 0 \qquad (17)
\end{aligned}
$$

інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея $AG_2(1,1)$ з базисними операторами

$$
\begin{aligned}
&\partial_0, \quad \partial_1, \quad G = x_0\partial_1 + \partial_{u^1}, \quad D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - u^1\partial_{u^1} - \rho\partial_\rho,\\
&\Pi = x_0(x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - u^1\partial_{u^1} - \rho\partial_\rho) + x_1\partial_{u^1}.
\end{aligned}
$$

Так як система (17) узагальнює одномірну систему рівнянь Нав'є–Стокса як по формі так і по симетрійних властивостях, то вона претендує на описання реальних процесів гідродинаміки у випадку двовимірного векторного поля $\vec{u}$, та однієї просторової змінної x_1.

Аналогічно для узагальнення системи (1) можна використати інші результати [9].

[1] Пухначев В.В. Инвариантные решения уравнений Навье–Стокса, описывающих движение со свободной частицей // ДАН СССР. – 1972. – **202**. – С. 302–305.

[2] Сєров М.І., Тулупова Л.О. Симетрійні властивості узагальнених рівнянь Нав'є–Стокса // Записки фіз.-мат. ф-ту ПДПІ ім. В.Г. Короленка. – 1996. – С. 7–13.

[3] Фущич В.И., Штелень В.М., Попович Р.Е. О редукции уравнений Навье–Стокса к линейным уравнениям теплопроводности // Докл. АН УССР. – 1992. – № 2. – С. 23–30.

[4] Fuschysch W.I., Popovich R.O. Symmetry reduction and exact solutions of the Navier–Stokes equations. I, II // J. Nonlinear Math. Phys. – 1994. – **1**. – P. 75–113, P. 158–188.

[5] Ludlow D.K., Clarkson P.A., Bassom A.P. Similarity reductions and exact solutions for the two-dimensional incompressible Novier–Stokes equations // Studies Appl. Math. – 1991. – **103**, № 3. – P. 183–240.

[6] Profiloa G., Solianib G., Tebaldic C. Some exact solutions of the two-dimensional Navier–Stokes equations // Intern. J. Eng. Sci. – 1998. – **36**. – P. 459–471.

[7] Fuschysch W.I., Serov N.I., Tychinin W.A., Ameron T.K. On nonlinear heat equation // Доповіді АН України. – 1992. – № 11. – P. 27–33.

[8] Woyczynski W.A. Burgers–KPZ turbulence. Göttingen lectures. – Berlin: Springer, 1998. – 318 p.

[9] Глеба А.В. Симетрійні властивості і точні розв'язки нелінійних галілей-інваріантних рівнянь // Дис. . . . канд. фіз.-мат. наук. – Київ: Ін-т математики НАН України. – 2003. – 120 с.

[10] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – Москва: Наука, 1978. – 400 с.

[11] Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. – Москва: Мир, 1989. – 639 с.