Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 255–269

УДК 517.9

# Симетрійні властивості та перетворення еквівалентності рівнянь нелінійної математичної фізики

***М.І. СЄРОВ***

*Полтавський нац. технічний університет ім. Юрія Кондратюка*
*E-mail: k26@pntu.poltava.ua*

Наведено основні результати в області симетрійного аналізу диференціальних рівнянь, одержані за останні 10 років групою науковців Полтавського національного технічного університету імені Юрія Кондратюка.

Basic results in the field of symmetry analysis of differential equations, which were obtained for 10 last years by the scientific group of the Yury Kondratyuk Poltava National Technical University, are presented.

**1. Вступ.** Ця робота присвячена пам'яті видатного українського математика, фундатора школи симетрійного аналізу рівнянь нелінійної математичної фізики на Україні, Вільгельма Ілліча Фущича. Доктор фіз.-мат. наук, професор, член-кореспондент НАН України, завідувач відділу прикладних досліджень Інституту математики НАН України, лауреат державної премій України, В.І. Фущич добре відомий своїми науковими працями серед учених, які займаються тематикою даного напряму математичної фізики, не тільки в нашій країні, але й за її межами – в США, Канаді, Японії, Італії, Австралії, Німеччині, Польщі, Росії та інших країнах. Він є автором понад 300 наукових статей та 9 монографій. Але не тільки ці досягнення є основними в роботі Вільгельма Ілліча. Одним з основних і найбільш вагомих його досягнень є те, що він зумів повести за собою по шляху наукових досліджень своїх учнів, молодих науковців не тільки Інституту математики НАН України, а й багатьох інших інститутів та університетів Києва, Ужгорода, Полтави, Житомира, Миколаєва, Вінниці, Дніпропетровська та деяких інших міст України. Усі свої знання, весь багатий досвід наукових досліджень Вільгельму Іллічу вдалось передати своїм учням та послідовникам. Група вчених згуртована Вільгельмом Іллічем навколо відділу прикладних досліджень Інституту математики НАН України по праву заслуговує носити ім'я наукової школи симетрійного аналізу рівнянь математичної фізики.

Відзначаючись великою працездатністю і широкою обізнаністю в своїй області досліджень, Вільгельм Ілліч Фущич своєю енергійністю, глибоким розумінням багатьох проблем надихав нас, його учнів, до пошуку шляхів розв'язання все нових і нових важливих задач.

Науковий шлях Вільгельма Ілліча починався з вивчення симетрійних властивостей лінійних рівнянь та систем математичної фізики. Разом зі своїми учнями В.А. Салогубом, Л.П. Сокуром, А.Г. Нікітіним, С.П. Онуфрійчуком, Ю.М. Сегедою, В.В. Наконечним, В.А. Владіміровим та іншими, він досяг значних успіхів в цій галузі. В той же час, багато його наукових досягнень відносяться до симетрійного аналізу рівнянь нелінійної математичної фізики.

Перші нелегкі кроки в цьому напрямі Вільгельм Ілліч робив разом зі своїми учнями Ю.М. Сегедою, С.С. Москалюком, В.М. Штеленем у кінці 70-х – на початку 80-х років минулого століття. Поряд з широкими дослідженнями в галузі симетрійного аналізу лінійних рівнянь, вивчення нелінійних задач у той час тільки починалось. Кожне нелінійне рівняння, зі слів Вільгельма Ілліча, потребувало індивідуального підходу, вимагало розробки спеціальних методів його дослідження. Незважаючи на ці принципову рису нелінійних рівнянь, Вільгельму Іллічу вдалося розробити ряд важливих підходів дослідження нелінійних диференціальних рівнянь і узагальнити їх для цілих класів рівнянь та систем нелінійної математичної фізики.

Вільгельм Ілліч відзначав [1] важливість відбору серед всіх допустимих математичних моделей тих, які описують конкретні фізичні процеси і мають багаті симетрійні властивості, а саме задовольняють принципам відносності Галілея та Пункаре–Ейнштейна. У зв'язку з цим всі рівняння з частинними похідними він поділяв на два великих класи: рівняння релятивістської та рівняння нерелятивістської фізики. Багато його робіт разом з А.Г. Нікітіним, В.М. Штеленем, Р.М. Чернігою, Р.З. Ждановим, Р.М. Поповичем та іншими присвячено цій тематиці.

Важливий напрям, розроблений Вільгельмом Іллічем та його учнями Ю.М. Сегедою, В.М. Штеленем, В.М. Федорчуком, Л.Ф. Баранником, А.Ф. Баранником, В.І. Лагном та багатьма іншими, полягає в застосуванні алгебр та груп інваріантності нелінійних диференціальних рівнянь до знаходження їх розв'язків. За допомогою підалгебр алгебри інваріантності диференціальних рівнянь будують спеціальні підстановки, які названо "анзацами". Анзаци редукують вихідне рівняння до рівняння з меншою кількістю незалежних змінних. Це дало можливість одержати цілі класи точних розв'язків багатьох основних рівнянь та систем нелінійної математичної фізики: Дірака, Даламбера, Шрьодінгера, Ламе, Максвелла тощо.

Продовжуючи вивчення нелокальних симетрій диференціальних рівнянь, які Вільгельм Ілліч розпочинав сумісно з А.Г. Нікітіним для лінійних задач (ця тематика одержала назву неліївської симетрії диференціальних рівнянь), разом з В.А. Тичиніним було отримано ряд важливих результатів і для нелінійних рівнянь Кортевега–де Фріза, Борна–Інфельда, Даламбера та деяких інших.

Одним з найвагоміших в області симетрійного аналізу є напрям, який одержав назву "умовна симетрія диференціальних рівнянь". Цей напрям розроблено Вільгельмом Іллічем сумісно з І.М. Цифрою, В.І. Чопиком та автором. Вільгельм Ілліч стверджував, що з розробкою методу та концепції умовної симетрії виникла необхідність перегляду з цієї точки зору всіх результатів для всеможливих рівнянь як лінійної, так і нелінійної математичної фізики, одержаних раніше класичними методами С. Лі.

Наукові ідеї Вільгельма Ілліча Фущича живуть і розвиваються в роботах його учнів і послідовників. Групи молодих вчених, які займаються дослідженнями в цій області, зосереджені в кількох містах України і закордоном. Робота цих груп координується відділом прикладних досліджень Інституту математики НАН України на чолі з доктором фіз.-мат. наук, професором А.Г. Нікітіним. Одна з таких груп складається з викладачів та аспірантів кафедри вищої математики Полтавського національного технічного університету імені Юрія Кондратюка. Основні публікації та результати, одержані ними за останні десять років, наведено в цій статті та деяких інших статтях цього збірника.

**2. Конформна інваріантність.** Розглянемо клас квазілінійних рівнянь з частинними похідними другого порядку вигляду

$$F^{\mu\nu}(u,\underset{1}{u})u_{\mu\nu} + G(u,\underset{1}{u}) = 0, \tag{1}$$

де $F^{\mu\nu}(u,\underset{1}{u})$, $G(u,\underset{1}{u})$, $u = u(x)$ – гладкі функції, $x = (x_0, x_1)$, $\underset{1}{u} =$

$(u_0, u_1)$, $u_\mu = \frac{\partial u}{\partial x_\mu}$, $u_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu}$, $\mu = 0, 1$. Тут і далі за індексами, що повторюються, передбачається підсумовування.

До класу (1) входять такі класичні рівняння як рівняння ейконалу $u_\mu u^\mu = F(u)$ та нелінійні хвильові рівняння

$$\Box u + G(u, \underset{1}{u}) = 0.$$

Якщо $F^{\mu\nu} = (1 - u_\alpha u^\alpha) g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu$, $G = 0$, то рівняння (1) співпадає з рівнянням Борна–Інфельда $(1 - u_\nu u^\nu)\Box u + u^\mu u^\nu u_{\mu\nu} = 0$. Наведені рівняння володіють широкими алгебрами ліївських симетрій. Вони інваріантні відносно алгебр Пуанкаре, розширеної алгебри Пуанкаре, конформної алгебри. В [2] доведено таке твердження.

**Теорема 1.** *Рівняння* (1) *інваріантне відносно конформної алгебри* $AC(1, 1)$, *базисні елементи якої задаються операторами*

$$\partial_0, \quad \partial_1, \quad J_{01} = x_0 \partial_1 + x_1 \partial_0,$$
$$D = x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1 + k u \partial_u, \quad K_\mu = 2 x_\mu D - (x^2 - k u^2) \partial^\mu, \ \ \mu = 0, 1,$$

*тоді і тільки тоді, коли воно або має вигляд*

$$\Box u = (u_0^2 - u_1^1) f(u)$$

*при* $k = 0$ *або*

$$(1 - u_\nu u^\nu)\Box u + u^\mu u^\nu u_{\mu\nu} = \frac{2}{u}\big(1 - u_\nu u^\nu\big)\big(1 + \lambda\sqrt{1 - u_\nu u^\nu}\big) \qquad (2)$$

*при* $k = 1$, *де* $\lambda$ *– довільна стала,* $f = f(u)$ *– довільна функція.*

Рівняння (2) можна розглядати як рівняння Борна–Інфельда з правою частиною. Відомо, що максимальною алгеброю інваріантності (МАІ) рівняння Борна–Інфельда є розширена алгебра Пуанкаре $AP_1(1, n+1)$. Отже, права частина розширює алгебру інваріантності рівняння Борна–Інфельда до конформної алгебри $AC(1, n)$. У [2] також одержано узагальнення цього результату на випадок довільної кількості змінних.

Відомо [3], що багатовимірне узагальнення рівняння Борна–Інфельда

$$(1 - u_\nu u^\nu)\Box u + u^\mu u^\nu u_{\mu\nu} = 0, \qquad (3)$$

інваріантне відносно розширеної алгебри Пуанкаре $AP_1(1, n+1)$ в просторі $(x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$, де роль змінної $x_{n+1}$ відіграє функція $u$. Симетрії цього рівняння можна застосувати для побудови інваріантних анзаців, проведення редукції та знаходження точних розв'язків рівняння (3). Оскільки невідома функція $u = u(x)$ в інваріантні анзаци входить неявно, проведення редукції рівняння (3) пов'язане зі значними технічними труднощами. Так, наприклад, у випадку $x = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$ загальний вигляд інваріантного анзаца для рівняння (3) задається формулою

$$z = \varphi(\omega, \theta),$$

де $\omega = \omega(x, u), \theta = \theta(x, u)$, $z = z(x, u)$ – інваріанти алгебри $AP_1(1, 3)$, $\varphi$ – нова невідома функція. Тільки після того, як редуковане рівняння для функції $\varphi$ вдалося записати у коваріантному вигляді [4], процес редукції значно спростився, що дало змогу побудувати класи точних розв'язків рівняння (3).

Одним з основних рівнянь геометричної оптики є рівняння ейконалу

$$u_\mu u^\mu = F(u). \tag{4}$$

За допомогою локальної заміни змінних рівняння (4) можна звести до одного з таких трьох випадків:

$$u_\mu u^\mu = 0, \quad u_\mu u^\mu = 1, \quad u_\mu u^\mu = -1. \tag{5}$$

Симетрійні властивості рівнянь (5) добре вивчені (див., наприклад, [3]). МАІ двох останніх рівнянь (5) є конформні алгебри $AC(1, n+1)$ та $AC(1+1, n)$ відповідно. Причому роль $x_{n+1}$ для алгебри $AC(1, n+1)$ та роль другої часової змінної для алгебри $AC(1+1, n)$ відіграє функція $u$.

Природною є задачу опису рівнянь чи систем рівнянь, які, наприклад, при $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, інваріантні відносно алгебр $AC(1, 5)$, $AC(2, 4)$ чи $AC(3, 3)$. Якщо розглянути систему двох рівнянь ейконалу для двох функцій $u$ та $w$

$$u_\mu u^\mu = \pm 1, \quad w_\mu w^\mu = \pm 1, \tag{6}$$

то виявляється, що вона не є конформно інваріантною. Конформно інваріантною система (6) стає лише при додатковій умові

$$u_\mu w^\mu = 0, \tag{7}$$

яка задає свого роду взаємодію двох полів $u$ та $w$. Встановлено [5], що при додатковій умові (7) системи

$$u_\mu u^\mu = 1, \qquad u_\mu u^\mu = 1, \qquad u_\mu u^\mu = -1,$$
$$w_\mu w^\mu = 1; \qquad w_\mu w^\mu = -1; \qquad w_\mu w^\mu = -1,$$

інваріантні відносно алгебр $AC(1,5)$, $AC(2,4)$ та $AC(3,3)$ відповідно.

Подібну задачу розв'язано в [6] для рівняння Гамільтона–Якобі, яке є параболічним аналогом рівняння ейконалу.

При дослідженні симетрійних властивостей рівнянь та систем математичної фізики виникає задача класифікації зображень можливих алгебр інваріантності. Було розглянуто задачу опису нееквівалентні лінійні представлення алгебр Пуанкаре та конформної алгебри, відносно яких інваріантні рівняння гіперболічного типу у випадку $u \in \mathbb{R}^2$ при умові, що вихідна система допускає лінійні перетворення еквівалентності. Одержано 6 нееквівалентних лінійних зображень [7] загальної лінійної алгебри порядку два, на основі яких у [8] отримано нееквівалентні лінійні зображення розширеної алгебри Пуанкаре $AP_1(1,1)$ та конформної алгебри $AC(1,1)$ для випадку $u \in \mathbb{R}^2$. Побудовані лінійні зображення алгебр Пуанкаре та конформної алгебри застосовано для дослідження симетрійних властивостей систем квазілінійних хвильових рівнянь вигляду

$$\Box u = (F^0(u)\partial_0 + F^1(u)\partial_1)u,$$

де $u = (u^1, u^2)$, $F^0$, $F^1$ – функціональні матриці розмірності $2 \times 2$.

**3. Інваріантність відносно узагальненої алгебри Галілея.** У роботах [7, 9] досліджено інваріантність систему нелінійних рівнянь конвекції–дифузії

$$u_0 = \triangle u + F^a(u)u_a, \tag{8}$$

відносно узагальненої алгебри Галілея для різних розмірностей векторного поля $u$ та просторових змінних $\vec{x}$. Тут $u = u(x_0, \vec{x}) \in \mathbb{R}^m$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $F^a$ – функціональні матриці розмірності $m \times m$, $a = \overline{1,n}$. Вивчено всі випадки для $m \leq 3$ та $n \leq 3$. У [7] встановлено, що у випадку $n = 1$, $m = 2$ існує 5 систем, інваріантних відносно названої алгебри, наприклад, система

$$u_0 + u^1 u_1 + u_{11} = 0$$

інваріантна відносно алгебри $AG_2(1,1)$ з базисними операторами

$$\begin{aligned}&\partial_0, \quad \partial_1, \quad G = x_0\partial_1 + \partial_{u^1}, \quad D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - u^1\partial_{u^1}, \\ &\Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + (x_1 - x_0u^1)\partial_{u^1}. \end{aligned} \tag{9}$$

У роботі [9] показано, що у випадку $n = 1$, $m = 3$ таких систем 20. При $n = m = 2$ є лише одна система, інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея; вона співпадає з класичною системою рівнянь Бюргерса. У випадку $n = 2$, $m = 3$ таких систем чотири. Крім того, встановлено (8), що в класі систем для двовимірного та тривимірного векторних полів при $n > m$ не існує систем, інваріантних відносно узагальненої алгебри Галілея.

Системи рівнянь третього порядку вигляду

$$u_0 + F(u)u_1 + Ku_{11} + \Lambda u_{111} = 0, \tag{10}$$

де $u \in \mathbb{R}^2$, $F$ – функціональна, а $K$ і $\Lambda$ – сталі матриці розмірності $2 \times 2$, при конкретних нелінійностях знаходять широке застосування в теорії щільних частотних полів, у загальних розтягах і деформаціях скінченних середовищ, подібних до розтягів Хабла Всесвіту в астрофізиці [10], в явищах турбулентної дифузії [11], в процесах, пов'язаних з рідинами Ван-дер-Ваальса [12]. Для деяких систем (10) досліджено симетрійні властивості і методами лiївської та умовної симетрії знайдено точні розв'язки [13–16].

Розглянуто також задачу про побудову функцій $F^{ab}$, при яких система (10) інваріантна відносно алгебри Галілея та її розширень операторами масштабних та проективних перетворень. Тобто, серед всеможливих допустимих математичних моделей вигляду (10) відібрано ті, що задовольняють принцип відносності Галілея. Доведено [17], що в класі систем (10) існує лише 5 локально нееквівалентних систем третього порядку, інваріантних відносно реалізацій розширеної алгебри Галілея $AG_2(1,1)$. Серед них, наприклад, система

$$\begin{aligned}&u_0^1 + u^1u_1^1 + k_{11}u_{11}^1 + \lambda_{12}u_{111}^2 = 0,\\ &u_0^2 + u^1u_1^2 + k_{22}u_{11}^2 = 0,\end{aligned}$$

для якої максимальна в сенсі Лі алгебра інваріантності породжена операторами (9).

Важливість цього результату полягає ще й тому, що серед систем диференціальних рівнянь третього порядку вперше виокремлено системи, що інваріантні відносно узагальненої алгебри Галілея.

**4. Інваріантність циліндрично-симетричних рівнянь.** Добре відомо (див., наприклад, [3]), що нелінійне хвильове рівняння $\Box u = F(u)$, де $u = u(x)$, $x = (x_0, \ldots, x_n)$, $F = F(u)$ – довільна гладка функція, інваріантне відносно конформної алгебри $AC(1,n)$, якщо воно має вигляд

$$\Box u = \lambda u^{\frac{n+3}{n-1}}, \quad \lambda = \text{const}. \tag{11}$$

Аналогічний результат встановлено також і для нелінійного рівняння Шрьодінгера

$$i\psi_t - \frac{1}{2m} \triangle \psi = F(\psi, \overline{\psi}). \tag{12}$$

Рівняння (12) інваріантне відносно узагальненої алгебри Галілея $AG_2(1,n)$ тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд

$$i\psi_t - \frac{1}{2m} \triangle \psi = \lambda |\psi|^{\frac{4}{n}} \psi, \quad \lambda = \text{const}. \tag{13}$$

Під час обговорення цих результатів Вільгельм Ілліч Фущич ставив запитання: “Чому степені нелінійностей $\frac{n+3}{n-1}$ та $\frac{4}{n}$ рівнянь (11) та (13) так жорстко зафіксовані? В той час, як з фізичної точки зору дані степені нічим особливим не відрізняються від інших степенів”. Цю “жорсткість” вдалося послабити для кількох рівнянь, які володіють циліндричною симетрією [18].

**Теорема 2.** *Циліндрично-симетричне нелінійне хвильове рівняння*

$$\Box u - \frac{N}{x_n} u_n = F(u) \tag{14}$$

*інваріантне відносно конформної алгебри* $AC(1, n-1)$ *тоді і тільки тоді, коли* $F = \lambda u^k$, *де* $\lambda$, $k \neq 1$ *– довільні сталі,* $N = 1 - n + \frac{4}{k-1}$.

**Теорема 3.** *Циліндрично-симетричне нелінійне рівняння Шрьодінгера*

$$i\psi_t - \frac{1}{2m}\left( \triangle \psi + \tfrac{N}{x_n}\psi_n\right) = F(\psi, \overline{\psi})$$

*інваріантне відносно узагальненої алгебри Галілея* $AG_2(1, n-1)$, *тоді і тільки тоді, коли* $F(\psi, \overline{\psi}) = \lambda |\psi|^k \psi$, *де* $\lambda$, $k$*—довільні сталі,* $N = \frac{4}{k} - n$.

При описанні процесів теорії проникання (див., наприклад, [19]) використовують систему рівнянь

$$
\begin{aligned}
&u_t + \tfrac{1}{2}(\vec{\nabla} u)^2 = F(\rho),\\
&v_t + \vec{\nabla} u \vec{\nabla} v = 0,\\
&\rho_t + \vec{\nabla} u \vec{\nabla} \rho + \rho \bigtriangleup u = 0
\end{aligned}
\tag{15}
$$

та відповідну циліндрично-симетричну систему

$$
\begin{aligned}
&u_t + \tfrac{1}{2}(\vec{\nabla} u)^2 = F(\rho),\\
&v_t + \vec{\nabla} u \vec{\nabla} v = 0,\\
&\rho_t + \vec{\nabla} u \vec{\nabla} \rho + \rho\big( \bigtriangleup u + \tfrac{N}{x_n} u_n\big) = 0,
\end{aligned}
\tag{16}
$$

де $u = u(t, \vec{x})$ – потенціал поля швидкостей частинки, $v = v(t, \vec{x})$ – ентропія, $\rho = \rho(t, x)$ – густина.

Для систем (15) та (16) в [17, 20] отримано результати, аналогічні результатам щодо рівнянь (14).

**Теорема 4.** *Система* (15) *інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея $AG(1, n)$ тоді і тільки тоді, коли $F(\rho) = \lambda\rho^{\frac{2}{n}}$, де $\lambda$ – довільні стала.*

**Теорема 5.** *Система рівнянь* (16) *інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея $AG(1, n-1)$ тоді і тільки тоді, коли $F(\rho) = \lambda\rho^k$ де $\lambda$, $k$ – довільні сталі, $N = \frac{2}{k} - n$.*

**5. Умовна симетрія.** При дослідженні $Q$-умовної симетрії диференціального рівняння виникає проблема інтегрування системи визначальних рівнянь для визначення координат інфінітезимального оператора. Ця система досить складна, причому складність її розв'язання, як правило, перевищує складність розв'язання вихідного рівняння.

Поняття $Q$-умовної симетрії бере початок з роботи Блумена і Коула [21], де вони ввели означення так званої некласичної симетрії. Розглянувши приклад лінійного рівняння теплопровідності, вони зіткнулися з проблемою інтегрування складної нелінійної системи визначальних рівнянь, розв'язати яку їм не вдалося. Можливо це стало однією з причин того, що в своїх подальших дослідженнях вони до теми некласичної симетрії не поверталися.

У зв'язку з цим після введення поняття умовної симетрії в [3] та ряді наступних робіт розв'язувалася задача про побудову хоча б частинних розв'язків визначальної системи, що, безумовно, давало нові результати, порівняно з ліївською симетрією.

Нелінійне рівняння акустики $u_{00} = uu_{11}$ було першим, для якого нам вдалося повністю розв'язати задачу дослідження $Q$-умовної симетрії [22, 23]. Одержано ряд операторів, один з яких має вигляд

$$Q_6 = \partial_0 + \left(\frac{\dot{\wp}}{\wp} - \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda}\right)\partial_1 + \left[\frac{\dot{\wp}}{\wp}u + \left(\dot{\wp} - \wp\frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda}\right)x_1^2 + \frac{x_1}{\Lambda} + \frac{c_0}{\wp}\right]\partial_u,$$

де $c_0$ – довільна стала, $\wp = \wp(x_0)$ – функція Веєрштрасса, $\Lambda = \Lambda(x_0)$ – функція Ламе.

В [23] поставлено та розв'язано задачу знаходження інволютивної множини двох операторів умовної інваріантності двовимірного рівняння акустики

$$u_{00} = u(u_{11} + u_{22}).$$

Клас нелінійних $(1+2)$-вимірних рівнянь теплопровідності

$$H(u)u_0 + u_{11} + u_{22} = F(u), \tag{17}$$

де $u = u(x)$, $x = (x_0, x_1, x_2)$, $H(u)$ та $F(u)$ — довільні гладкі функції, розглянуто в [17]. Якщо у випадку рівняння акустики вдалося повністю розв'язати задачу знаходження операторів $Q$-умовної інваріантності для одного конкретного рівняння, то в [17] проведено повний опис операторів $Q$-умовної інваріантності для класу рівнянь (17), в який входять дві довільні функції $H(u)$ і $F(u)$.

**Теорема 6** [17]. *Будь-який оператор $Q$-умовної симетрії нелінійного рівняння теплопровідності* (17) *або є еквівалентним оператору ліївської симетрії цього рівняння, або з точністю до перетворень з групи еквівалентності та додаткових перетворень є еквівалентним одному з наступних операторів:*

1. $Q = \partial_0 + (\lambda_1 u + \lambda_2)\partial_u$ *у випадку* $F = (\lambda_1 u + \lambda_2)(H + \lambda_0)$;
2. $Q = \partial_0 + [\lambda_2 u - b(\vec{x})]\partial_u$, *де* $\triangle b = b^2 + \lambda_1 b + \lambda_2 \lambda_0$, $H = u$, $F = \lambda_2 u^2 + \lambda_1 u + \lambda_0$;
3. $Q = \partial_1 + a(x_0, x_1)u\partial_u$, *де* $a_0 + a_{11} = -2aa_1 + \lambda a$, $H = 1$, $F = \lambda u \ln u$, $\lambda \neq 0$.

*Тут $\lambda$, $\lambda_0$, $\lambda_1$, $\lambda_2$ – довільні сталі.*

Для класу (17) знайдено в явному вигляді широкі класи інволютивних множин двох операторів $Q$-умовної симетрії.

Отримані оператори використано для побудови анзаців та проведення редукції відповідних рівнянь до диференціальних рівнянь з двома змінними. Показано, що наслідком $Q$-умовної симетрії для рівнянь такого типу є можливість розділення змінних та проведення антиредукції.

У роботі [24] умовна інваріантність нелінійного хвильового рівняння

$$\Box u = F(u) \tag{18}$$

вивчалась при додатковій умові, що складається з двох рівнянь

$$u_\mu u^\mu = G(w,u), \quad Qu = 0. \tag{19}$$

Тут $u = u(x)$, $x = (x_0, \vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $F = F(u)$, $G = G(w,u)$, $H = H(w,u)$ – довільні гладкі функції, $w = \alpha x = \alpha_\mu x^\mu$, $\alpha$ – довільний сталий вектор,

$$Q = \alpha_\mu \partial_\mu - H(w,u)\partial_u. \tag{20}$$

**Теорема 7.** *Рівняння* (18) *інваріантне відносно оператора* (20) *при умові* (19)*, якщо функції $F$, $G$, $H$ задовольняють систему*

$$2H_w + G_u = 2F, \quad \alpha^2 G_w + HG_u - 2(H_u G + HH_w) = 0.$$

Наведемо деякі з знайдених у явному вигляді функцій $F$, $G$, $H$:

1. $F = \lambda u, \quad G = u^2(\lambda - \cosh^{-2} w), \quad H = u \tanh w;$
2. $F = \lambda \sinh u, \quad G = 4\lambda \sinh^2 \dfrac{u}{2} + \dfrac{16}{\cosh^2 w} \sinh^2 \dfrac{u}{4},$

   $H = 2 \tanh w \sinh \dfrac{u}{2};$
3. $F = \lambda \sin u, \quad G = 4\lambda \sin^2 \dfrac{u}{2} - \dfrac{16}{\cosh^2 w} \sin^2 \dfrac{u}{4},$

   $H = 2 \tan w \sin \dfrac{u}{2};$
4. $F = -\sin u, \quad H = -\dfrac{2[(x_1 + C)\cos\frac{u}{2} + \cosh x_1 \sin\frac{u}{2}]}{(x_1 + C)\sinh x_1 - \cosh x_1},$

   $G = \dfrac{4}{H}(H \cos u - H_u \sin u + 2HH_{1u} - H_{11}).$

**6. Нелокальні перетворення еквівалентності.** Розглянемо систему нелінійних рівнянь дифузії

$$u_t = \partial_x[f(u)u_x], \tag{21}$$

де $u \in \mathbb{R}^2$, $f(u) = (f^{ab})$; $u^a = u^a(t,x)$, $f^{ab} = f^{ab}(u)$ – довільні гладкі функції, $a, b = 1, 2$. Застосувавши до системи (21) ланцюжок нелокальних перетворень

$$t = t, \quad x = x, \quad u^a = v^a_x, \tag{22}$$

де $v^a = v^a(t,x)$ – нові невідомі функції;

$$t = x_0, \quad x = w^1, \quad v^1 = x_1, \quad v^2 = w^2, \tag{23}$$

де $x_0$, $x_1$ – нові незалежні змінні, $w^a = w^a(x_0, x_1)$ – нові залежні змінні,

$$x_0 = x_0, \quad x_1 = x_1, \quad w^1_1 = z^1, \quad w^2_1 = z^2, \tag{24}$$

де $z^a = z^a(x_0, x_1)$ – нові залежні змінні, одержимо систему

$$z_0 = \partial_1[F(z)z_1], \tag{25}$$

де $z \in \mathbb{R}^2$, $z_\mu = \frac{\partial z}{\partial x_\mu}$, $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$, $F(z) = (F^{ab})$, $F^{ab} = F^{ab}(z)$, $\mu = 0, 1$, причому функції $F^{ab}(z)$ пов'язані із функціями $f^{ab}$ співвідношеннями

$$\begin{aligned}
&F^{11} = (z^1)^{-2}\left[f^{11} + z^2 f^{12}\right],\\
&F^{12} = -(z^1)^{-1} f^{12},\\
&F^{21} = (z^1)^{-3}\left[z^2(f^{11} + z^2 f^{12}) - (f^{21} + z^2 f^{22})\right],\\
&F^{22} = (z^1)^{-2}\left[f^{22} - z^2 f^{12}\right],
\end{aligned} \tag{26}$$

де $f^{ab} = f^{ab}(\frac{1}{z^1}, \frac{z^2}{z^1})$, $F^{ab} = F^{ab}(z)$.

Таким чином [25], ланцюжок замін (22)–(24) зводить систему (21) до системи рівнянь(25) того ж вигляду і навпаки, неважко переконатися, що система (25) за допомогою вказаних замін зводиться до системи (21).

Якщо припустити, що система (21) лінійна, тобто $f(u) = \Lambda$, де $\Lambda = (\lambda_{ab})$ – стала матриця, то, використавши формули (26), одержимо систему

$$z_0^1 = \partial_1 \left[ \frac{\lambda_{11} + \lambda_{12} z^2}{(z^1)^2} z_1^1 - \frac{\lambda_{12}}{z^1} z_1^2 \right], \tag{27}$$

$$z_0^2 = \partial_1 \left[ \frac{z^2(\lambda_{11} + \lambda_{12} z^2) - (\lambda_{21} + \lambda_{22} z^2)}{(z^1)^3} z_1^1 + \frac{\lambda_{22} - \lambda_{12} z^2}{(z^1)^2} z_1^2 \right],$$

яка за допомогою перетворень (22)–(24) зводиться до лінійної системи вигляду $u_t = \Lambda u_{xx}$.

Розглянемо неінваріантна відносно алгебри Галілея систему

$$z_0^1 = \partial_1 \left[ \frac{z_1^1}{2(z^1)^2} \right],$$

$$z_0^2 = \partial_1 \left[ -\frac{z^2}{(z^1)^3} \left( \frac{1}{2} + g\left( \frac{z^2}{z^1} \right) \right) z_1^1 + g\left( \frac{z^2}{z^1} \right) \frac{z_1^2}{(z^1)^2} \right]. \tag{28}$$

Неважко переконатися, що ця система одержується дією перетворень (22)–(24) на систему

$$u_t^1 = \partial_x \left[ \frac{1}{2} u_x^1 \right],$$

$$u_t^2 = \partial_x \left[ \frac{u^2}{u^1} u_x^1 + g(u^2) u_x^2 \right], \tag{29}$$

яка інваріантна [26] відносно алгебри Галілея $AG(1,1)$. Побудувавши по операторах алгебри $AG(1,1)$ анзаци для системи (29) та подіявши на них перетвореннями (22)–(24), одержимо нелокальні анзаци для системи (28) [27], які неможливо отримати в рамках теорії С. Лі. Ці анзаци редукують систему (28) до систем звичайних диференціальних рівнянь, розв'язавши які за допомогою відповідних анзаців, можна знайти розв'язки системи (28).

В даній роботі зроблено огляд основних досягнень другого покоління полтавських вчених з наукової школи, створеної Вільгельмом Іллічем Фущичем. Наведені результати свідчать про те, що його ідеї живуть і розвиваються молодими науковцями.

[1] Fushchych W.I. Anzatz'95 // J. Nonlinear Math. Phys. – 1995. – **2.** – С. 216–235.

[2] Блажко Л.М. Інваріантність квазілінійного рівняння відносно конформної алгебри // Праці Інституту математики НАН України. – 2001. – **36**. – С. 40–44.

[3] Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И. Симметрийный анализ и точные решения уравнений нелинейной математической физики. – Киев: Наукова думка, 1989. – 339 с.

[4] Сєров М.І., Блажко Л.М. Симетрійна редукція двовимірного і тривимірного рівняння Борна–Інфельда // Вісник Харківського ун-ту. – 2000. – № 475. – С. 394–399.

[5] Фущич В.І., Сєров М.І., Подошвелев Ю.Г. Конформна інваріантність системи рівнянь ейконалу // Доп. НАН України. – 1999. – № 1. – С. 43–47.

[6] Фущич В.І., Сєров М.І., Сєрова М.М., Глєба А.В. Ліївська та умовна симетрія системи рівнянь Гамільтона–Якобі // Доп. НАН України. – 1998. – № 12. – С.49–52.

[7] Глєба А.В. Симетрійні властивості і точні розв'язки нелінійних галілей-інваріантних рівнянь // Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2003. – 120 с.

[8] Сєров М.І., Жадан Т.О., Блажко Л.М. Класифікація лінійних зображень алгебр Галілея, Пуанкаре та конформної у випадку двовимірного векторного поля та їх застосування // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**. – С. 1128–1145.

[9] Жадан Т.О. Інваріантність системи рівнянь дифузії-конвекції відносно узагальненої алгебри Галілея // Вісник Київського ун-ту. Серія: математика, механіка. – 2004. – Випуск 12. – С. 70–75.

[10] Woyczynski W.A. Burgers–KPZ turbulence Göttingen lectures – Berlin: Springer, 1998. – 320 p.

[11] Karczewska A. Statical solutions to turbulent diffusion // Nonlinear Analysis. – 1999. – **37**. – P. 635–675.

[12] Jian H.-Y., Wang X.-P., Hsieh D.-Y. The global attractor of a dissipative nonlinear evolution system // J. Math. Anal. Appl. – 1999. – **238**. – P. 124–142.

[13] Cherniha R.M. Galilean-invariant nonlinear PDEs and their exact solutions // J. Nonlinear Math.Phys. – 1995. – **2**. – P. 374–383.

[14] Webb G.M. Lie symmetries of a coupled nonlinear Burgers–heat equation system // J. Phys. A: Math. Gen. – 1990. – **23**. – P. 3885–3894.

[15] Serov N.I., Tulupova L.A. Symmetry properties of the generalized Korteweg–de Vries and Burgers equations // Доп. НАН України. – 1994. – № 12. – P. 42–44.

[16] Сєров М.І., Черніга Р.М. Симетрії Лі та точні розв'язки нелінійних рівнянь з конвективним членом // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**. – С. 1262–1270.

[17] Ічанська Н.В. Ліївська та умовна симетрії деяких нелінійних еволюційних рівнянь // Дис. ... канд.фіз.-мат. наук. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2005. – 148 с.

[18] Фущич В.І., Сєров М.І., Подошвелев Ю.Г. Конформна симетрія нелінійного циліндрично-симетричного хвильового рівняння // Доп. НАН України. – 1998. – № 4. – С. 64–68.

[19] Сагомонян А.Я. Проникание. – Москва: Изд-во Московского ун-та, 1974. – 300 с.

[20] Сєрова М.М., Ічанська Н.В. Інваріантність рівнянь теорії проникання відносно розширеної алгебри Галілея // Вісник Київського ун-ту. – № 4. – 2000. – С. 107–111.

[21] Bluman G.W., Cole J.D. The general similarity solution of the heat equation // J. Math. Mech. – 1969. – **18**. – P. 1025–1042.

[22] Подошвелев Ю.Г. $Q$-умовна інваріантність рівняння акустики // Праці Інституту математики НАН України. – 1998. – **19**. – С. 174–177.

[23] Подошвелев Ю.Г. Класична та умовна симетрія нелінійних хвильових рівнянь // Дис. . . . канд. фіз.-мат. наук. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2001. – 109 с.

[24] Сєров М.І., Подошвелев Ю.Г., Яковенко Т.П. Умовна симетрія нелінійного хвильового рівняння $\Box u = F(u)$ // Вісник Київського ун-ту. – 2000. – № 3. – С. 158–163.

[25] Сєров М.І., Омелян О.М., Черніга Р.М. Лінеаризація систем нелінійних рівнянь дифузії за допомогою нелокальних перетворень // Доп. НАН України. – 2004. – № 10. – С. 39–45.

[26] Омелян О.М. Інваріантність нелінійної системи дифузії відносно алгебри Галілея / Матеріали 9-ої Міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука (16–19 травня 2002, м. Київ). – Київ, 2002. – С. 149.

[27] Омелян О.М. Нелокальні формули розмноження розв'язків системи нелінійних рівнянь дифузії // Матеріали 10-ої Міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука (13–15 травня 2004, м. Київ). – Київ, 2004. – С. 197.