Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 330–335

УДК 517.912:512.816

Хвильові розв'язки нелінійного рівняння дифузії

І.І. ЮРИК †, ***Т.А. БАРАННИК*** ‡

† *Національний університет харчових технологій, Київ*
E-mail: appmath@imath.kiev.ua

‡ *Полтавський держ. пед. університет ім. В.Г. Короленка*
E-mail: barannyk_t@poltava.velton.ua

З використанням спеціального анзацу знайдено хвильові розв'язки нелінійного рівняння дифузії.

Wave solutions for a nonlinear diffusion equation are found by using the special ansatz.

Вступ. Робота присвячена побудові точних розв'язків нелінійного рівняння дифузії

$$u_t = u_{xx} + \lambda u^{\frac{n-1}{2}} u_x + a_0 u^n + a_1 u + + a_2 u^{\frac{n+1}{2}} + a_3 u^{\frac{3-n}{2}} + a_4 u^{2-n}, \tag{1}$$

де $u = u(t,x)$, $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\lambda \geq 0$, $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$, $n \neq 1$. Якщо $a_0 \neq 0$, то a_0 можна звести до 1 або -1, помноживши функцію u на відповідний скаляр. Рівняння (1) є узагальненням класичного рівняння Бюргерса $u_t = u_{xx} + \mu u u_x$, а також відомих рівнянь Фішера [1] $u_t = u_{xx} = u(1-u)$ і Маррі [2] $u_t = u_{xx} + \lambda u u_x + \varepsilon u^2 + cu$. Важливим частинним випадком рівняння (1) є рівняння типу Колмогорова–Петровського–Піскунова

$$u_t = u_{xx} + a_0 u^n + a_1 u + a_2 u^{\frac{n+1}{2}} + a_3 u^{\frac{3-n}{2}} + a_4 u^{2-n}, \tag{2}$$

яке досліджувалося в [3]. Відзначимо, що систематичне вивчення умовної симетрії цього рівняння для $n = 3,\ a_4 = 0$ було започатковано в [4].

Для побудови точних розв'язків рівняння (1) ми використовуємо анзац

$$u = k \left(\frac{z_x}{z} \right)^{\frac{2}{n-1}}, \tag{3}$$

де k – стала, $z = z(t, x)$, запропонований в [3] для побудови точних розв'язків рівняння (2).

В залежності від значення коефіцієнта a_0 виділимо два випадки.

Випадок $a_0 \neq 0$. Підставимо (3) в (1):

$$
\begin{aligned}
&\frac{2k}{n-1} z_x^{\frac{3-n}{n-1}} z_{xt} z^{-\frac{2}{n-1}} - \frac{2k}{n-1} z_x^{\frac{2}{n-1}} z_t z^{-\frac{n+1}{n-1}} = \\
&= \frac{2k(3-n)}{(n-1)^2} z_x^{\frac{4-2n}{n-1}} z_{xx}^2 z^{-\frac{2}{n-1}} + \frac{2k}{n-1} z_x^{\frac{3-n}{n-1}} z_{xxx} z^{-\frac{2}{n-1}} - \\
&- \frac{4k}{(n-1)^2} z_x^{\frac{2}{n-1}} z_{xx} z^{-\frac{n+1}{n-1}} - \frac{2k(n+1)}{(n-1)^2} z_x^{\frac{2}{n-1}} z_{xx} z^{-\frac{n+1}{n-1}} + \\
&+ \frac{2k(n+1)}{(n-1)^2} z_x^{\frac{2n}{n-1}} z^{-\frac{2n}{n-1}} + \lambda k^{\frac{n-1}{2}} z_x z^{-1} \times \\
&\times \left(\frac{2k}{n-1} z_x^{\frac{3-n}{n-1}} z_{xx} z^{-\frac{2}{n-1}} - \frac{2k}{n-1} z_x^{\frac{2}{n-1}} z_x z^{-\frac{n+1}{n-1}} \right) + \\
&+ a_0 k^n \left(\frac{z_x}{z}\right)^{\frac{2n}{n-1}} + a_1 k \left(\frac{z_x}{z}\right)^{\frac{2}{n-1}} + a_2 k^{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{z_x}{z}\right)^{\frac{n+1}{n-1}} + \\
&+ a_3 k^{\frac{3-n}{2}} \left(\frac{z_x}{z}\right)^{\frac{3-n}{n-1}} + a_4 k^{2-n} \left(\frac{z_x}{z}\right)^{\frac{4-2n}{n-1}}.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Будемо вважати, що в рівнянні (4)

$$
a_0 k^{n-1} - \frac{2\lambda}{n-1} k^{\frac{n-1}{2}} + \frac{2(n+1)}{(n-1)^2} = 0. \tag{5}
$$

Рівняння (5) є квадратним відносно $k^{\frac{n-1}{2}}$ і має корені

$$
k^{\frac{n-1}{2}} = \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 2(n+1)a_0}}{a_0(n-1)}. \tag{6}
$$

Помноживши обидві частини рівняння (4) на $z_x^{\frac{2n-4}{n-1}} z^{\frac{n+1}{n-1}}$, отримаємо

$$
\begin{aligned}
&z \left[\frac{2}{n-1} z_x z_{xt} - \frac{2}{n-1} z_x z_{xxx} - a_3 k^{\frac{1-n}{2}} z z_x - a_4 k^{1-n} z^2 - \right. \\
&\quad \left. - \frac{2(3-n)}{(n-1)^2} z_{xx}^2 \right] = z_x^2 \left[\frac{2}{n-1} z_t + a_1 z + a_2 k^{\frac{n-1}{2}} z_x - \right. \\
&\quad \left. - \frac{2(n+3)}{(n-1)^2} z_{xx} + \frac{2\lambda k^{\frac{n-1}{2}}}{n-1} z_{xx} \right].
\end{aligned}
$$

Використовуючи позначення

$$a_1 = \frac{2\lambda_1}{n-1}, \quad a_2 = \frac{2\lambda_2}{n-1}k^{\frac{1-n}{2}}, \quad a_3 = \frac{2\lambda_3}{n-1}k^{\frac{1-n}{2}},$$
$$a_4 = \frac{2\lambda_4}{n-1}k^{1-n}, \quad \tilde{\lambda} = \lambda k^{\frac{n-1}{2}}, \tag{7}$$

попереднє рівняння можна переписати в такому вигляді:

$$z\left[z_x z_{xt} - z_x z_{xxx} - \lambda_3 z z_x - \lambda_4 z^2 + \frac{n-3}{n-1}z_{xx}^2\right] =$$
$$= z_x^2\left[z_t + \lambda_1 z + \lambda_2 z_x - \frac{n+3}{n-1}z_{xx} + \tilde{\lambda} z_{xx}\right]. \tag{8}$$

Розв'язок рівняння (8) шукаємо у вигляді

$$z = \phi(\xi), \quad \xi = x + \mu t. \tag{9}$$

Підставивши (9) в (8), отримуємо рівняння

$$\phi\left[\mu\phi'\phi'' - \phi'\phi''' - \lambda_3\phi\phi' - \lambda_4\phi^2 + \frac{n-3}{n-1}(\phi'')^2\right] =$$
$$= (\phi')^2\left[\mu\phi' + \lambda_1\phi + \lambda_2\phi' - \frac{n+3}{n-1}\phi'' + \tilde{\lambda}\phi''\right], \tag{10}$$

де $\phi' = \frac{d\phi}{d\xi}$.

Розв'язки рівняння (10) шукаємо у вигляді [5]

$$\phi = \nu_0 + \nu_1\varphi + \nu_2\varphi^2 + \cdots, \tag{11}$$

де $\nu_0, \nu_1, \ldots$ – сталі, а функція φ задовольняє рівняння

$$\varphi' = \varepsilon\sqrt{C_0 + C_1\varphi + C_2\varphi^2 + \cdots}, \quad \varepsilon = \pm 1. \tag{12}$$

Для того, щоб функція (11) була розв'язком рівняння (10), ми повинні прирівняти окремо всі доданки, які містять парні і непарні степені квадратного кореня, визначеного формулою (12). Враховуючи це зауваження, отримуємо таку систему рівнянь:

$$\mu\phi\phi'\phi'' - \lambda_3\phi^2\phi' = (\lambda_2 + \mu)(\phi')^3, \tag{13}$$
$$\phi\left(\phi'\phi''' + \lambda_4\phi^2 + \frac{3-n}{n-1}(\phi'')^2\right) =$$

$$= (\phi')^2 \left(\frac{n+3}{n-1}\phi'' - \tilde{\lambda}\phi'' - \lambda_1\phi \right). \tag{14}$$

Поділимо обидві частини рівняння (13) на $\mu\phi^2\phi'$:

$$\frac{\phi''}{\phi} - \frac{\lambda_3}{\mu} = \left(\frac{\lambda_2}{\mu} + 1 \right) \frac{(\phi')^2}{\phi^2}.$$

Виконаємо заміну

$$Y = \frac{\phi'}{\phi}, \quad \frac{\phi''}{\phi} = Y' + Y^2,$$

яка перетворює рівняння (13) в рівняння Ріккаті

$$Y' - \frac{\lambda_2}{\mu} Y^2 = \frac{\lambda_3}{\mu}. \tag{15}$$

Загальний розв'язок рівняння (15) утворюють функції

$$Y = \sqrt{\frac{-\lambda_3}{\lambda_2}} \tanh\left(\frac{\sqrt{-\lambda_2\lambda_3}}{\mu}\xi + C \right),$$

$$Y = \sqrt{\frac{-\lambda_3}{\lambda_2}} \left(\tanh\left(\frac{\sqrt{-\lambda_2\lambda_3}}{\mu}\xi + C \right) \right)^{-1}, \quad \text{якщо} \quad \lambda_2\lambda_3 < 0, \tag{16}$$

$$Y = \sqrt{\frac{\lambda_3}{\lambda_2}} \tan\left(\frac{\sqrt{\lambda_2\lambda_3}}{\mu}\xi + C \right), \quad \text{якщо} \quad \lambda_2\lambda_3 > 0, \tag{17}$$

$$Y = -\frac{\mu}{\lambda_2(\xi + C)}, \quad \text{якщо} \quad \lambda_3 = 0, \tag{18}$$

де C – стала інтегрування.

Поділимо обидві частини рівняння (14) на ϕ^3:

$$\frac{\phi'''}{\phi}\frac{\phi'}{\phi} + \lambda_4 + \frac{3-n}{n-1}\frac{(\phi'')^2}{\phi^2} = \frac{(\phi')^2}{\phi^2}\left(\frac{n+3}{n-1}\frac{\phi''}{\phi} - \tilde{\lambda}\frac{\phi''}{\phi} - \lambda_1 \right).$$

Заміна

$$Y = \frac{\phi'}{\phi}, \quad \frac{\phi''}{\phi} = Y' + Y^2, \quad \frac{\phi'''}{\phi} = Y'' + 3YY' + Y^3,$$

перетворює рівняння (14) в рівняння

$$YY'' - \frac{n+1}{n-1}Y^4 + \lambda_4 + \frac{3-n}{n-1}(Y')^2 +$$

$$+\tilde{\lambda}Y'Y^2+\tilde{\lambda}Y^4+\lambda_1Y^2=0. \tag{19}$$

З'ясуємо, наприклад, при яких значеннях параметрів λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 і μ функція (16) буде задовольняти рівняння (19). Підставивши (16) в (19) і прирівнявши коефіцієнти при відповідних степенях $\operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{-\lambda_2\lambda_3}}{\mu}\xi+C\right)$, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{aligned}&2\frac{\lambda_3^2}{\mu^2}-\frac{n+1}{n-1}\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right)^2+\frac{3-n}{n-1}\frac{\lambda_3^2}{\mu^2}-\\&\quad-\tilde{\lambda}\left(-\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{(-\lambda_2\lambda_3)^{\frac{1}{2}}}{\mu}+\tilde{\lambda}\left(-\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right)^2=0,\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}&-2\frac{\lambda_3^2}{\mu^2}+2\frac{n+1}{n-1}\left(-\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right)^2+\tilde{\lambda}\left(-\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{(-\lambda_2\lambda_3)^{\frac{1}{2}}}{\mu}-\\&\quad-2\tilde{\lambda}\left(-\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right)+\frac{\lambda_1\lambda_3}{\lambda_2}=0,\end{aligned} \tag{21}$$

$$-\frac{n+1}{n-1}\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right)^2+\lambda_4+\tilde{\lambda}\left(-\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right)^2-\lambda_1\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right)=0. \tag{22}$$

З рівняння (20) випливає, що

$$\mu=\pm\lambda_2,\quad \text{якщо}\ \ \tilde{\lambda}=0,\qquad \mu=|\lambda_2|,\quad \text{якщо}\ \ \tilde{\lambda}\neq 0.$$

З рівняння (21) знаходимо, що

$$\lambda_1=\left(-\frac{4}{n-1}+\tilde{\lambda}\right)\frac{\lambda_3}{\lambda_2}. \tag{23}$$

Підставивши в рівняння (22), отримуємо

$$\lambda_4=\frac{n-3}{n-1}\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right)^2. \tag{24}$$

Отже, рівняння (1) має розв'язок

$$u=k\left(\sqrt{-\frac{\lambda_3}{\lambda_2}}\right)^{\frac{2}{n-1}}\left[\tanh\left(\sqrt{-\frac{\lambda_3}{\lambda_2}}(x+|\lambda_2|t)+C\right)\right]^{\frac{2}{n-1}},$$

де k визначається формулою (6), а коефіцієнти a_1, a_2, a_3, a_4 рівняння (1) визначаються співвідношеннями (7), (23), (24). Відзначимо, що розв'язки рівняння (1) для $\lambda=0$ наведені в [3].

Аналогічно показуємо, що розв'язками рівняння (1) є функції

$$u = k\left(\sqrt{-\frac{\lambda_3}{\lambda_2}}\right)^{\frac{2}{n-1}}\left[\tanh\left(\sqrt{-\frac{\lambda_3}{\lambda_2}}(x+|\lambda_2|t)+C\right)\right]^{-\frac{2}{n-1}},$$

якщо $\lambda_2\lambda_3 < 0$;

$$u = k\left(\sqrt{\frac{\lambda_3}{\lambda_2}}\right)^{\frac{1}{n-1}}\left[\tan\left(\sqrt{\frac{\lambda_3}{\lambda_2}}(x+|\lambda_2|t)+C\right)\right]^{\frac{2}{n-1}},$$

якщо $\lambda_2\lambda_3 > 0$.

Випадок $a_0 = 0$. Рівняння (1) набуває вигляду

$$u_t = u_{xx} + \lambda u^{\frac{n-1}{2}}u_x + a_1 u + a_2 u^{\frac{n+1}{2}} + a_3 u^{\frac{3-n}{2}} + a_4 u^{2-n}. \qquad (25)$$

Будемо вважати, що в рівнянні (25) $\lambda \neq 0$. З рівняння (5) знаходимо, що

$$k^{\frac{n-1}{2}} = \frac{n+1}{\lambda(n-1)}.$$

Отже, розв'язками рівняння (25) є функції

$$u = \left(\frac{n+1}{\lambda(n-1)}\sqrt{-\frac{\lambda_3}{\lambda_2}}\right)^{\frac{2}{n-1}}\left[\tanh\left(\sqrt{-\frac{\lambda_3}{\lambda_2}}(x+|\lambda_2|t)+C\right)\right]^{\frac{2}{n-1}},$$

$$u = \left(\frac{n+1}{\lambda(n-1)}\sqrt{-\frac{\lambda_3}{\lambda_2}}\right)^{\frac{2}{n-1}}\left[\tanh\left(\sqrt{-\frac{\lambda_3}{\lambda_2}}(x+|\lambda_2|t)+C\right)\right]^{-\frac{2}{n-1}},$$

$$u = \left(\frac{n+1}{\lambda(n-1)}\sqrt{-\frac{\lambda_3}{\lambda_2}}\right)^{\frac{2}{n-1}}\left[\tan\left(\sqrt{-\frac{\lambda_3}{\lambda_2}}(x+|\lambda_2|t)+C\right)\right]^{\frac{2}{n-1}}.$$

[1] Fisher R.A. The wave of advance of advantageous genes // Ann. Eugenics. – 1937. – **7**. – P. 353–369.

[2] Murray J.D. Mathematical biology. – Berlin: Springer, 1989. – 750 p.

[3] Nikitin A.G., Barannyk T.A. Solitary wave and other solutions for nonlinear heat equations // Centr. Eur. J. Math. – 2005. – **2**. – P. 840–858.

[4] Фущич В.И., Серов Н.И. Условная инвариантность и редукция нелинейного уравнения теплопроводности // Докл. АН УССР. – 1990. – № 7. – С. 24–28.

[5] Fan E. Multiple travelling wave solutions of nonlinear evolution equations using a unified algebraic method // J. Phys. A: Math. Gen. – 2002. – **35**. – P. 6853–6872.