Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 225–230

УДК 517.9

Про щільність неінтегровних гамільтонових систем редукованої задачі трьох тіл на прямій з потенціалом попарної взаємодії

С.І. ПІДКУЙКО

Львівський національний університет імені Івана Франка
E-mail: s_pidkuyko@franko.lviv.ua

Розглядається клас гамільтонових систем редукованої задачі трьох тіл на прямій з потенціалом попарної взаємодії. Доведено, що неінтегровні гамільтонові системи в цьому класі утворюють всюди щільну підмножину.

The class of Hamiltonian systems of the reduced three-body problem with pairwise interaction is considered. It is proved that nonintegrable Hamiltonian systems in that class make up an everywhere dense subset.

Розглядається клас гамільтонових систем задачі трьох тіл (точок) на прямій з потенціалом попарної взаємодії, які описуються гамільтоніанами вигляду

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + V(x_1 - x_2) + V(x_2 - x_3) + W(x_1 - x_3), \quad (1)$$

де x_j, p_j $(j = 1, 2, 3)$ позначають, відповідно, координату та імпульс j-ої точки, а функції V, W – потенціали взаємодії, відповідно, між першою і другою та другою і третьою точками, і між першою та третьою точками даної гамільтонової системи. Взаємодія між першою та третьою точками, взагалі кажучи, може бути відмінною від взаємодії між першою і другою та другою і третьою точками.

Позначимо $\mathfrak{A}(x)$ сукупність всіх функцій f, аналітичних в точці $x \in \mathbb{R}$, що задовольняють умови:

$$f'(x) = 0, \quad f''(x) > 0.$$

На потенціали V, W гамільтонової системи (1) накладемо такі умови:

$$V \in \mathfrak{A}(a), \quad W \in \mathfrak{A}(2a), \tag{2}$$

де $a \in \mathbb{R}$ деяка фіксована точка.

Тоді в кожній точці $(a_1, a_2, a_3, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^6$ (де $a_1 - a_2 = a_2 - a_3 = a$) фазового простору нашої гамільтонової системи гамільтоніан (1) буде аналітичним і матиме локальний мінімум.

Канонічним перетворенням

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - x_2, & q_1 &= \tfrac{1}{3}(2p_1 - p_2 - p_3), \\ y_2 &= x_2 - x_3, & q_2 &= \tfrac{1}{3}(p_1 + p_2 - 2p_3), \\ y &= x_1 + x_2 + x_3, & q &= \tfrac{1}{3}(p_1 + p_2 + p_3), \end{aligned}$$

гамільтоніан гамільтонової системи (1) зводиться до вигляду

$$H = \tfrac{3}{2}q^2 + (q_1^2 - q_1 q_2 + q_2^2) + V(y_1) + V(y_2) + W(y_1 + y_2). \tag{3}$$

Гамільтонова система (вимірність фазового простору якої зменшилась з 6 до 4) з гамільтоніаном

$$K = q_1^2 - q_1 q_2 + q_2^2 + V(y_1) + V(y_2) + W(y_1 + y_2) \tag{4}$$

називається гамільтоновою системою редукованої задачі трьох тіл на прямій з потенціалом попарної взаємодії. Згідно з умовами, накладеними на функції V, W, гамільтоніан K є аналітичним в точці $(a, a, 0, 0)$ і має в цій точці локальний мінімум.

Оскільки гамільтоніан H не залежить від координати (повний імпульс є першим інтегралом гамільтонової системи (1)) y, то кожен перший інтеграл F гамільтонової системи (4), функціонально незалежний з K, буде першим інтегралом гамільтонової системи (3), до того ж, трійка (H, q, F) буде утворювати повний набір перших інтегралів гамільтонової системи (4) (тобто функції цього набору утворюють функціонально незалежну трійку перших інтегралів, які перебувають попарно в інволюції). Зокрема, звідси отримуємо, що з інтегровності за Ліувіллем гамільтонової системи (4) випливає інтегровність за Ліувіллем гамільтонової системи (3) (а отже й гамільтонової системи (1)).

В даній роботі доводиться аналог відомого результату Зігеля [1] (і його узагальнення, доведеного автором [6]) про щільність в класі гамільтонових систем (4) множини неінтегровних гамільтоніанів (з цього ж класу).

Надалі ми будемо розглядати гамільтонову систему редукованої задачі трьох тіл на прямій, початок координат конфігураційного простору якої перенесено в точку (a, a):

$$K = p_1^2 - p_1 p_2 + p_2^2 + V(a + x_1) + V(a + x_2) + W(2a + x_1 + x_2).$$

Гамільтоніан K є аналітичним в точці $(0,0,0,0)$ і має в цій точці локальний мінімум.

Основний результат роботи сформульовано в теоремі:

Теорема 1. Нехай $\{\varepsilon_k\}$ довільна додатня послідовність, потенціали V, W задовольняють умови (2). Тоді знайдеться такий потенціал $\widetilde{V} \in \mathfrak{A}(a)$, що має властивості:

1) $|V^{(k)}(a) - \widetilde{V}^{(k)}(a)| < \varepsilon_k, \quad k = 2, 3, \ldots.$
2) будь-який аналітичний в точці $(0,0,0,0)$ перший інтеграл гамільтонової системи з гамільтоніаном

$$\widetilde{K} = p_1^2 - p_1 p_2 + p_2^2 + \widetilde{V}(a + x_1) + \widetilde{V}(a + x_2) + \\ + W(2a + x_1 + x_2),$$

є функцією від $\widetilde{K}$.

Доведення цієї теореми спирається на кілька лем і використовує метод Зігеля побудови неінтегровного гамільтоніана.

Лема 1. Існує потенціал $V_1 \in \mathfrak{A}(a)$ з такими властивостями:

1) $|V_1''(a) - V''(a)| < \frac{1}{2}\varepsilon_2, \quad V_1^{(k)}(a) = V^{(k)}(a), \quad k = 3, 4, \ldots.$
2) існує лінійне канонічне перетворення фазових змінних (x_1, x_2, p_1, p_2) у фазові змінні (u_1, u_2, v_1, v_2), для якого квдадратична частина гамільтоніана

$$K = p_1^2 - p_1 p_2 + p_2^2 + V_1(a + x_1) + V_1(a + x_2) + \\ + W(2a + x_1 + x_2),$$

зводиться до нормальної форми

$$E_2 = \lambda_{11} u_1 v_1 + \lambda_{12} u_2 v_2,$$

де числа λ_{11}, λ_{12} чисто уявні і раціонально незалежні.

Згідно з процедурою побудови, запропонованої в [1], виберемо два цілих числа r, q, що задовольняють нерівності:

$$q > 1 + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}} + 2|\lambda_{12}|\varepsilon_2^{-1}, \quad \left|q\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}} + r\right| < 1,$$

і побудуємо три послідовності $\{q_m\}$, $\{r_m\}$, $\{l_m\}$ $(m \in \mathbb{N})$, згідно з формулами

$$l_m = q_m + |r_m|, \quad r_m = q_m \left(\frac{r}{q} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{q_m}\right), \quad q_1 = q^2,$$

а q_{m+1} є мінімальним степенем q, що задовольняє нерівність

$$q_{m+1} > q_m^2 + 4|\lambda_{12}|\varepsilon_{l_m}^{-1} l_m^{ml_m}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Покладемо

$$\widetilde{\lambda}_2 = \lambda_{12}, \quad \widetilde{\lambda}_1 = \lambda_{12}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q_k} - \frac{r}{q}\right).$$

Тоді побудовані послідовності і числа $\widetilde{\lambda}_1$, $\widetilde{\lambda}_2$ мають такі властивості:

1) послідовність $\{q_m\}$ є строго зростаючою, $l_1 \geq 4$,
2) числа $\widetilde{\lambda}_1$, $\widetilde{\lambda}_2$ є чисто уявними і раціонально незалежними, до того ж, справедлива нерівність $|\widetilde{\lambda}_1 - \lambda_{11}| < \varepsilon_2$,
3) справедливі нерівності:

$$q_m|\widetilde{\lambda}_1 q_m + \widetilde{\lambda}_2 r_m|^{-1}\varepsilon_{l_m} > 2l_m^{ml_m}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Лема 2. Існує потенціал $V_2 \in \mathfrak{A}(a)$ з такими властивостями:

1) $|V_2''(a) - V''(a)| < \varepsilon_2, \quad V_2^{(k)}(a) = V^{(k)}(a), \quad k = 3, 4, \ldots.$
2) існує лінійне канонічне перетворення фазових змінних (x_1, x_2, p_1, p_2) у фазові змінні (u_1, u_2, v_1, v_2), для якого квадратична частина гамільтоніана

$$K = p_1^2 - p_1 p_2 + p_2^2 + V_2(a + x_1) + V_2(a + x_2) + \\ + W(2a + x_1 + x_2),$$

зводиться до нормальної форми

$$E_2 = \lambda_{21} u_1 v_1 + \lambda_{22} u_2 v_2,$$

де коефіцієнти λ_{21}, λ_{22} чисто уявні і раціонально незалежні, до того ж, задовольняють такі умови

$$\frac{\lambda_{21}}{\lambda_{22}} = \frac{\widetilde{\lambda}_1}{\widetilde{\lambda}_2}, \quad \left|\frac{\lambda_{22}}{\widetilde{\lambda}_2}\right| < 2.$$

Нехай E позначає гамільтоніан K, записаний у нових фазових змінних (u_1, u_2, v_1, v_2). Гамільтоніан E задовільняє канонічні рівняння Гамільтона

$$\dot{u}_k = E_{v_k}, \quad \dot{v}_k = -E_{u_k}, \quad k = 1, 2. \tag{5}$$

В околі точки $(0, 0, 0, 0)$ його можна розкласти в ряд Тейлора

$$E = \sum_{n=2}^{\infty} E_n,$$

де E_n позначає однорідну степеня n частину E.

Відомо [1], що існує перший інтеграл s (який називається інтегралом Біркгофа і, зазвичай, є розбіжним степеневим рядом) гамільтонової системи (5),

$$s = u_1 v_1 + \sum_{n=3}^{\infty} s_n, \tag{6}$$

де розклад (6) не містить членів вигляду

$$c \prod_{k=1}^{n} (u_k v_k)^{\alpha_k}, \quad \alpha_1 + \cdots + \alpha_n > 2.$$

Нехай $\widetilde{E}$ позначає гамільтоніан

$$\widetilde{K} = p_1^2 - p_1 p_2 + p_2^2 + \widetilde{V}(a + x_1) + \widetilde{V}(a + x_2) + \tag{7}$$

$$+ W(2a + x_1 + x_2), \tag{8}$$

записаний у нових фазових змінних (u_1, u_2, v_1, v_2), $\widetilde{s}$ – відповідний інтеграл Біркгофа гамільтонової система з гамільтоніаном $\widetilde{E}$.

Лема 3. Існує потенціал $\widetilde{V} \in \mathfrak{A}(a)$ з такими властивостями:

$$\widetilde{V}^{(n)}(a) = V^{(n)}(a), \quad n \notin \{l_m \mid m \in \mathbb{N}\},$$
$$\widetilde{V}^{(l_m)}(a) = V^{(l_m)}(a) \pm \frac{1}{2}\varepsilon_{l_m}, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{9}$$

де знаки $(+)$ або $(-)$ в (9) можна вибрати так, що справедливі нерівності

$$\overline{|\widetilde{s}_{l_m}|} > \frac{1}{2} l_m^{ml_m}, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{10}$$

У формулюванні даної леми використовується таке позначення: для однорідного полінома G від кількох змінних через $\overline{|G|}$ позначається максимальна з абсолютних величин коефіцієнтів полінома G.

Зазначимо, що внаслідок умови (10) гамільтонова система з гамільтоніаном (7) не може мати незалежного з $\widetilde{E}$ першого інтеграла, аналітичного в околі $(0, 0, 0, 0)$.

[1] Ziegel C.L. On the integrals of canonical systems // Ann. Math. – 1941. – (**2**) **42**. – P. 806–822.

[2] Ziegel C.L. Über die Existenz einer Normalform analytischer Hamiltonscher Differentialgleichungen in der Nahe einer Gleichgewichtslosung // Math. Ann. – 1954. – **128**. – P. 144–170.

[3] Арнольд В.И. Математические методы классической механики. – Москва: Наука, 1974. – 472 с.

[4] Брюно А.Д. Нормальная форма системы, близкой к гамильтоновой // Мат. заметки. – 1990. – **48**, № 5. – С. 35–46.

[5] Козлов В.В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // УМН. – 1983. – **38**, № 1. – С. 3–67.

[6] Пидкуйко С.И. О плотности множества неинтегрируемых гамильтонианов // Изв. Росс. Акад. Наук. – Сер. Матем. – 1992. – **56**. – С. 863–876.

[7] Пидкуйко С.И., О массивности множества неинтегрируемых гамильтонианов // Мат. сборник. – 1994. – **185**, № 12. – С. 101–122.