Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 315–329

УДК 517.9:519.46

Нові Q-умовні симетрії та розв'язки рівнянь типу реакції-дифузії-конвекції зі степеневими нелінійностями

Р.М. ЧЕРНІГА, О.Г. ПЛЮХІН

Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: cherniha@imath.kiev.ua, pliukhin@imath.kiev.ua

Зроблено вичерпний опис Q-умовних симетрій двох класів нелінійних рівнянь реакції-дифузії-конвекції зі степеневими коефіцієнтами дифузії. Використовуючи отримані симетрії, побудовано нові неліївські розв'язки.

A complete description of Q-conditional symmetries for two classes of reaction-diffusion-convection equations with power diffusivities is obtained. Using the symmetries obtained new non-Lie solutions are constructed.

1. Вступ. Нелінійні рівняння реакції-дифузії-конвекції (РДК) вигляду

$$U_t = [A(U)U_x]_x + B(U)U_x + C(U), \tag{1}$$

де $U = U(t,x)$ – невідома функція, $A(U)$, $B(U)$, $C(U)$ – деякі задані гладкі функції, індекси t та x означають диференціювання за цими змінними, лежать в основі багатьох математичних моделей для опису найрізноманітніших процесів живої та неживої природи [1,2]. Починаючи з відомої роботи Овсяннікова [3] велика кількість робіт присвячена дослідженням рівнянь вигляду (1) теоретико-алгебраїчними методами. Зокрема, вичерпно описано всі класичні симетрії цих рівнянь та побудовано велику кількість ліївських розв'язків (див. [4,5] та цитовані там роботи).

В 1969 Блуман (Bluman) та Коул (Cole) [6] ввели суттєве узагальнення класичних симетрій, яке отримало назву некласичних симетрій [7] або умовних симетрій [8]. В [9] (див. детальніше в [10, Section 5.7]) Фущичем та його учнями було запропоновано подальше узагальнення поняття некласичних симетрій, яке також отримало назву умовна симетрія. З метою уникнення двозначності ми користуватимемося поняттям Q-умовна симетрія для позначення некласичної симетрії, яке було запропоновано в [10].

Виявляється, що шляхом застосування поняття Q-умовна симетрія до рівнянь РДК вигляду (1) можна як розширити симетрію цих рівнянь, так і знайти нові неліївські розв'язки для рівнянь, які відомі у застосуваннях [4,10–14]. Отже, настав час для вичерпного опису Q-умовних симетрій рівняння (1). Оскільки ця задача поки що виглядає занадто складною, в цій роботі ми її розв'яжемо в частковому випадку, а саме для рівнянь вигляду

$$U_t = [U^m U_x]_x + \lambda U^m U_x + C(U), \tag{2}$$

та

$$U_t = [U^m U_x]_x + \lambda U^{m+1} U_x + C(U), \tag{3}$$

де $\lambda \neq 0$, $m \neq 0$ – довільні сталі, $C(U)$ – довільна гладка функція. Окрім того ми продемонструємо ефективність отриманих симетрій для побудови точних розв'язків рівнянь (2)–(3). Зауважимо, що ми скрізь нижче розглядатимемо рівняння з ненульовим конвективним членом, тобто $\lambda \neq 0$. Ефект нелінійної конвекції в рівняннях реакції-дифузії може мати вражаючий ефект для структури розв'язків. Якщо конвекція виникає, як природне розширення закону збереження, то ми отримуємо саме такі рівняння, оскільки найчастіше нелінійності мають степеневий характер (детальніше див. [2]).

2. Q-умовні симетрії. В роботі [4] (див. також [5]) отримано вичерпний опис симетрій Лі рівняння реакції-дифузії-конвекції (РДК) (1) при $B(U) \neq 0$. Проте для знаходження всеможливих Q-умовних операторів рівняння (1) в роботі [4] побудовано лише систему відповідних визначальних рівнянь та наведено окремі її часткові розв'язки як приклади. В цій роботі ми ставимо задачу про відшукання всіх Q-умовних операторів вигляду

$$Q = \partial_t + \xi(t,x,U)\partial_x + \eta(t,x,U)\partial_U, \tag{4}$$

де ξ та η – невідомі функції, для рівнянь (2)–(3). Зауважимо, що ми не розглядаємо задачу відшукання всіх Q-умовних операторів вигляду

$$Q = \partial_x + \eta(t,x,U)\partial_U,$$

оскільки ця задача еквівалентна розв'язанню власне рівнянь (2)–(3) [15].

Теорема 1. *Рівняння* (2) *Q-умовно інваріантне відносно оператора вигляду* (4) *тоді і тільки тоді, коли воно та відповідний оператор набувають вигляду*

$$(i)\quad U_t = [U^m U_x]_x + \lambda U^m U_x + (\lambda_1 U^{m+1} + \lambda_2)(U^{-m} - \lambda_3), \tag{5}$$

$$Q = \partial_t + (\lambda_1 U + \lambda_2 U^{-m})\partial_U, \quad m \neq -1; \tag{6}$$

$$(ii)\quad U_t = [U^{-1} U_x]_x + \lambda U^{-1} U_x + (\lambda_1 \ln U + \lambda_2)(U - \lambda_3), \tag{7}$$

$$Q = \partial_t + (\lambda_1 U \ln U + \lambda_2 U)\partial_U; \tag{8}$$

$$(iii)\quad U_t = [U^{-\frac{1}{2}} U_x]_x + \lambda U^{-\frac{1}{2}} U_x + \lambda_1 U + \lambda_2 U^{\frac{1}{2}} + \lambda_3, \tag{9}$$

$$Q = \partial_t + f(t,x)\partial_x + 2(g(t,x)U + h(t,x)U^{\frac{1}{2}})\partial_U, \tag{10}$$

де трійка функцій f, g, h є довільним розв'язком нелінійної системи диференціальних рівнянь

$$\begin{gathered} 2ff_x + f_t + fg = 0, \quad f_{xx} - \lambda f_x - 2g_x - fh = 0, \\ (g - \tfrac{\lambda_1}{2})(g + 2f_x) + g_t = 0, \\ 2gh - \lambda_1 h + 2f_x h - \lambda_2 f_x + h_t - \lambda g_x - g_{xx} = 0, \\ h^2 - \tfrac{\lambda_2}{2} h - \lambda_3 f_x + \tfrac{\lambda_3}{2} g - \lambda h_x - h_{xx} = 0. \end{gathered} \tag{11}$$

Всі інші випадки інваріантності рівнянь вигляду (2) *відносно операторів вигляду* (4) *є випадками класичної інваріантності в сенсі Лі.*

Зауваження 1. Незважаючи на те, що система (11) містить п'ять рівнянь на три невідомі функції, вона є сумісною. Зокрема, при $f = g = 0$, $\lambda_1 = 0$ вона зводиться до одного звичайного диференціального рівняння

$$h_{xx} + \lambda h_x + \tfrac{\lambda_2}{2} h - h^2 = 0 \tag{12}$$

і тоді оператор

$$Q = \partial_t + 2h(x)U^{\frac{1}{2}}\partial_U$$

є оператором Q-умовної симетрії для будь-якого ненульового розв'язку рівняння (12), причому при $h = \frac{\lambda_2}{2}$, отримуємо частинний випадок (i), коли $m = -\frac{1}{2}$, $\lambda_1 = 0$.

Зауваження 2. При $h = 0$ знайдено загальний розв'язок системи (11). Розв'язки дають нам лише оператори ліївської симетрії (див. випадки 8 та 11 в [4]).

Теорема 2. *Рівняння* (3) *при* $m \neq 0$ Q*-умовно інваріантне відносно оператора вигляду* (4) *тоді і тільки тоді, коли воно та відповідний оператор набувають вигляду*

$$(i) \qquad U_t = [U^m U_x]_x + \lambda U^{m+1} U_x + \lambda_1 U + \lambda_2 U^{-m}, \quad m \neq -1, \tag{13}$$

$$Q = \partial_t - \lambda U^{m+1} \partial_x + (\lambda_1 U + \lambda_2 U^{-m}) \partial_U; \tag{14}$$

$$(ii) \qquad U_t = [U^{-\frac{1}{2}} U_x]_x + \lambda U^{\frac{1}{2}} U_x + + (\lambda_1 U^{\frac{3}{2}} + \lambda_2 U^{\frac{1}{2}} + \lambda_3) \left(\frac{\lambda_1}{2\lambda^2} + U^{\frac{1}{2}} \right), \tag{15}$$

$$Q = \partial_t + \left(-\lambda U^{\frac{1}{2}} + \frac{3\lambda_1}{2\lambda} \right) \partial_x + (\lambda_1 U^{\frac{3}{2}} + \lambda_2 U^{\frac{1}{2}} + \lambda_3) \partial_U; \tag{16}$$

$$(iii) \qquad U_t = [U^{-1} U_x]_x + \lambda U_x + (\lambda_1 \ln U + \lambda_2)(U - \lambda_3), \tag{17}$$

$$Q = \partial_t - \lambda \partial_x + (\lambda_1 \ln U + \lambda_2) U \partial_U. \tag{18}$$

Всі інші випадки інваріантності рівнянь вигляду (3) *відносно операторів вигляду* (4) *є випадками класичної інваріантності в сенсі Лі.*

Зауваження 3. Всі Q-умовні симетрії рівняння (3) при $m = 0$ побудовані в роботі [14]. Випадок (iii) локальною заміною $y = x + \lambda t$ зводиться до випадку без конвективного члена, а саме:

$$U_t = [U^{-1} U_y]_y + (\lambda_1 \ln U + \lambda_2)(U - \lambda_3).$$

Оскільки доведення обох теорем досить громіздкі, то тут ми обмежимося лише доведенням другої (доведення першої буде наведено в іншій роботі).

Доведення теореми 2. Використавши для рівняння (3) заміну

$$V = \begin{cases} U^{m+1}, & m \neq -1, \\ \ln U, & m = -1, \end{cases} \tag{19}$$

отримаємо у випадку $m \neq -1$

$$V_{xx} = V^n V_t - \lambda V^{n+1} V_x + F(V), \tag{20}$$

де $n = -\frac{m}{m+1} \neq 0, -1$, $F(V) = -(m+1)C(V^{\frac{1}{m+1}})$, а у випадку $m = -1$

$$V_{xx} = e^V V_t - \lambda e^V V_x + F(V), \tag{21}$$

де $F(V) = C(e^V)$. Одночасно оператор (4) набуде вигляду

$$Q^* = \partial_t + \xi^*(t,x,V)\partial_x + \eta^*(t,x,V)\partial_V \tag{22}$$

(надалі зірочки ми опускаємо). Використаємо роботу [4], в якій побудовано систему відповідних визначальних рівнянь для всіх рівнянь РДК. Тоді для знаходження функцій ξ, η та F для рівняння (20) одержимо таку систему

$$\begin{aligned}
&\xi_{VV} = 0, \quad \eta_{VV} = 2\xi_V(-\lambda V^{n+1} - \xi V^n) + 2\xi_{xV},\\
&\eta F_V + (2\xi_x - \eta_V)F + n\eta^2 V^{n-1} + 2\xi_x \eta V^n +\\
&\quad + \eta_t V^n - \lambda V^{n+1}\eta_x - \eta_{xx} = 0,\\
&\lambda\xi_x V^{n+1} + \big((-2\xi_V + \lambda(n+1))\eta + 2\xi\xi_x + \xi_t\big)V^n +\\
&\quad + \xi\eta n V^{n-1} - 3\xi_V F + 2\eta_{xV} - \xi_{xx} = 0.
\end{aligned} \tag{23}$$

А для рівняння (21) – систему

$$\begin{aligned}
&\xi_{VV} = 0, \quad \eta_{VV} = 2\xi_V(-\lambda e^V - \xi e^V) + 2\xi_{xV},\\
&\big(\xi_t + 2\xi\xi_x + (\lambda + \xi - 2\xi_V)\eta + \lambda\xi_x\big)e^V - 3\xi_V F + 2\eta_{xV} - \xi_{xx} = 0,\\
&\eta F_V + (2\xi_x - \eta_V)F + \eta^2 e^V + 2\xi_x\eta e^V + \eta_t e^V - \lambda\eta_x e^V - \eta_{xx} = 0.
\end{aligned} \tag{24}$$

Очевидно, що перші два рівняння систем (23)–(24) легко інтегруються відносно змінної V. Для повного розв'язання цих систем доцільно по черзі розглянути такі випадки:

$$\begin{aligned}
&(a)\ \ \xi = \xi(V), \quad \eta = \eta(V),\\
&(b)\ \ \xi = f(t,x), \quad \eta = g(t,x)V + h(t,x),\\
&(c)\ \ \xi = a(t,x)V + f(t,x), \quad a(t,x) \neq 0, \quad \eta = \eta(t,x,V).
\end{aligned} \tag{25}$$

При цьому для випадку (c) та системи (23)

$$\begin{aligned}
\eta = &-\frac{2a(a+\lambda)}{(n+2)(n+3)}V^{n+3} - \frac{2af}{(n+1)(n+2)}V^{n+2} +\\
&+ a_x V^2 + g(t,x)V + h(t,x),
\end{aligned}$$

при $n \neq -2, -3$;

$$\eta = -2a(a+\lambda)V\ln V + 2af\ln V + a_x V^2 +$$

$$+ (2a(a+\lambda) + g(t,x))V + h(t,x),$$

при $n=-2$;

$$\eta = 2a(a+\lambda)\ln V - afV^{-1} + a_x V^2 + g(t,x)V + h(t,x),$$

при $n=-3$.

А для системи (24)

$$\eta = -2a^2 V e^V - 2a(\lambda + f - 2a)e^V + a_x V^2 + g(t,x)V + h(t,x).$$

Випадок (a). Очевидно, що розв'язок першого рівняння в (23)–(24) має вигляд

$$\xi = \lambda_1^* V + \lambda_2^*, \tag{26}$$

де $\lambda_1^*, \lambda_2^* \in \mathbb{R}$. Тоді з другого рівняння (23) з врахуванням (26), отримаємо функцію

$$\eta = -\frac{2\lambda_1^*(\lambda+\lambda_1^*)}{(n+2)(n+3)} V^{n+3} - \frac{2\lambda_1^*\lambda_2^*}{(n+1)(n+2)} V^{n+2} + \lambda_3^* V + \lambda_4^*, \tag{27}$$

де $\lambda_3^*, \lambda_4^* \in \mathbb{R}$, $n \neq -2, -3$, підставляючи яку в четверте рівняння системи (23), знаходимо функцію

$$F = \frac{\eta}{3\lambda_1^*}\left[\big(\lambda_1^*(n-2) + \lambda(n+1)\big)V^n + n\lambda_2^* V^{n-1}\right], \quad \lambda_1^* \neq 0. \tag{28}$$

Зауважимо, що випадок $\lambda_1^* = 0$ для всіх $F(V)$ веде лише до ліївських операторів. Отже, залишилося задовольнити третє рівняння системи (23), яке з врахуванням (28) набуває вигляду

$$\eta\left[\big(1 + \tfrac{1}{3\lambda_1^*}(\lambda_1^*(n-2) + \lambda(n+1)\big)V^{n-1} + (n-1)\lambda_2^* V^{n-2}\right] = 0. \tag{29}$$

Припустивши $\eta \neq 0$ і розчепивши цей вираз за степенями V, отримуємо умови

$$(\lambda_1^* + \lambda)(n+1) = 0, \quad (n-1)\lambda_2^* = 0. \tag{30}$$

Оскільки $n \neq -1$, то перша умова з (30) дає $\lambda_1^* = -\lambda$, а друга дає $n = 1$ або $\lambda_2^* = 0$. Отже, беручи до уваги формули (26)–(28), одержуємо рівняння

$$V_{xx} = VV_t - \lambda V^2 V_x - \frac{\lambda_2^* + 3\lambda V}{3\lambda}\left(\tfrac{1}{3}\lambda_2^* \lambda V^3 + \lambda_3^* V + \lambda_4^*\right), \tag{31}$$

та оператор Q-умовної симетрії

$$Q = \partial_t + (-\lambda V + \lambda_2^*)\partial_x + \left(\tfrac{1}{3}\lambda_2^*\lambda V^3 + \lambda_3^* V + \lambda_4^*\right)\partial_V, \tag{32}$$

при $n = 1$; рівняння

$$V_{xx} = V^n V_t - \lambda V^{n+1} V_x - (\lambda_3^* V + \lambda_4^*) V^n, \tag{33}$$

та оператор

$$Q = \partial_t - \lambda V \partial_x + (\lambda_3^* V + \lambda_4^*)\partial_V, \tag{34}$$

при $\lambda_2^* = 0$. Неважко переконатися, що розгляд випадків $n = -2$, $n = -3$ веде лише до частинних випадків (33) та оператора (34). Врешті-решт, зробивши в рівняннях (31), (33) та операторах (32), (34) заміну (19) та перепозначивши коефіцієнти біля степенів U ($\lambda_3^* = \lambda_1$, $\lambda_4^* = \lambda_2$ для рівняння (33), $\lambda_2^* = \frac{3\lambda_1}{2\lambda}$, $\lambda_3^* = \frac{\lambda_2}{2}$, $\lambda_4^* = \frac{\lambda_3}{2}$ для рівняння (31)) отримаємо відповідно випадки (ii) та (i) теореми 2.

Якщо $\eta = 0$ в (29), то отримаємо частинний випадок рівняння (33) та оператора (34) при $\lambda_3^* = \lambda_4^* = 0$.

Розгляньмо тепер систему (24). Підставивши (26) в друге рівняння (24), знаходимо функцію

$$\eta = 2\lambda_1^* e^V(-\lambda_1^* V + 2\lambda_1^* - \lambda - \lambda_2^*) + \lambda_3^* V + \lambda_4^*,$$

де $\lambda_3^*, \lambda_4^* \in \mathbb{R}$, а підставивши в третє рівняння – функцію

$$F = \frac{\eta e^V}{3\lambda_1^*}\left(\lambda_1^* V + \lambda + \lambda_2^* - 2\lambda_1^*\right), \quad \lambda_1^* \neq 0. \tag{35}$$

Враховуючи (35), четверте рівняння системи (24) набуває вигляду

$$e^V \eta \left(1 + \tfrac{1}{3\lambda_1^*}(\lambda_1^* V + \lambda + \lambda_2^* - \lambda_1^*)\right) = 0,$$

а це веде до $\eta = 0$, тобто, зокрема, $\lambda_1^* = 0$, проте $\lambda_1^* \neq 0$ (див. (35)).

Якщо $\lambda_1^* = 0$, то система (24) набуває вигляду

$$\begin{aligned} &\xi = \lambda_2^*, \quad \eta = \lambda_3^* V + \lambda_4^*, \quad (\lambda_3^* V + \lambda_4^*)(\lambda_2^* + \lambda) = 0, \\ &(\lambda_3^* V + \lambda_4^*) F_V - \lambda_3^* F = -e^V (\lambda_3^* V + \lambda_4^*)^2. \end{aligned} \tag{36}$$

Розв'язавши систему (36), отримаємо рівняння

$$V_{xx} = e^V V_t - \lambda e^V V_x + (\lambda_3^* V + \lambda_4^*)(\lambda_5^* - e^V), \tag{37}$$

та оператор

$$Q = \partial_t - \lambda\partial_x + (\lambda_3^* V + \lambda_4^*)\partial_V. \tag{38}$$

Зробивши в (37) та (38) заміну (19) та перепозначивши коефіцієнти біля степенів U ($\lambda_3^* = \lambda_1$, $\lambda_4^* = \lambda_2$, $\lambda_5^* = \lambda_3$), отримаємо випадок (iii) теореми 2.

Випадок (b). Покажемо, що у цьому випадку не отримуються нові Q-умовні симетрії. Розгляньмо систему (23). Розв'язком першого та другого рівнянь системи (23) будуть вирази (25). Підставивши (25) в четверте рівняння системи (23) і об'єднавши коефіцієнти біля відповідних степенів V, отримаємо

$$\lambda\big((n+1)g + f_x\big)V^{n+1} + \big(\lambda(n+1)h + f_t + 2ff_x + nfg\big)V^n + \\ + nfhV^{n-1} + 2g_x - f_{xx} = 0.$$

Розгляньмо випадок $n \neq 1$, тоді розчеплення за степенями V відбувається таким чином

$$(n+1)g + f_x = 0, \quad \lambda(n+1)h + f_t + 2ff_x + nfg = 0, \\ fh = 0, \quad 2g_x - f_{xx} = 0. \tag{39}$$

Для розв'язання системи (39) необхідно розглянути два випадки (див. третє рівняння): $f = 0$ і $h = 0$. Якщо $f = 0$, то негайно отримується $g = h = 0$, оскільки $n + 1 \neq 0$ і $\lambda \neq 0$, а це веде лише до частинного випадку (a). Якщо ж $h = 0$, то використовуючи перше і четверте рівняння системи (39), отримаємо

$$g = g(t), \quad f = -(n+1)gx + \varphi(t),$$

звідки за допомогою другого рівняння цієї системи одержуємо систему звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР)

$$g_t - (n+2)g^2 = 0, \quad \varphi_t - (n+2)\varphi g = 0. \tag{40}$$

з загальним розв'язком

$$g = \frac{-1}{(n+2)t + c_1}, \quad \varphi = \frac{c_2}{(n+2)t + c_1}, \quad c_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, 2.$$

Підставивши його в третє рівняння системи (23), одержуємо лінійне ЗДР

$$F_V - \frac{2n+3}{V}F = 0.$$

В підсумку, випадок (b) при $n \neq 1$ приводить до рівняння

$$V_{xx} = V^n V_t - \lambda V^{n+1} V_x + \lambda_1 V^{2n+3}, \tag{41}$$

та оператора

$$Q = \partial_t + \frac{(n+1)x + c_2}{(n+2)t + c_1}\partial_x - \frac{V}{(n+2)t + c_1}\partial_V. \tag{42}$$

Проте оператор (42) еквівалентний оператору

$$X = c_1\partial_t + c_2\partial_x + (n+2)t\partial_t + (n+1)x\partial_x - V\partial_V,$$

який є звичайним оператором інваріантності рівняння (41) [4].

При $n = 1$, отримаємо частинний випадок рівняння (41) та оператора (42).

Аналогічний розгляд системи (24) у випадку (b) приводить лише до операторів ліївської симетрії рівнянь вигляду (21) при $F = \lambda_1 + \lambda_2 e^V$ та $F = \lambda_1 e^{\lambda_2 V}$.

Випадок (c). Детальні викладки ми опускаємо, оскільки при $a(t,x) \neq \mathrm{const}$ не отримується жодного оператора Q-умовної симетрії, а при $a(t,x) = \mathrm{const}$ – лише частинні випадки (a) і (b). Теорему доведено.

3. Точні розв'язки деяких рівнянь РДК. Добре відомо [16–18], що знаходження нових операторів умовної симетрії та нових анзаців ще не гарантує побудову нових розв'язків відповідного нелінійного рівняння, оскільки отримані розв'язки можуть виявитися такими, що їх можна побудувати за допомогою класичних симетрій Лі. Нижче ми побудуємо точні розв'язки деяких нелінійних рівнянь РДК, для яких було знайдено нові умовні симетрії, та покажемо, що вони є неліївськими розв'язками. Для спрощення викладок будемо розглядати рівняння для залежної змінної $V(t,x)$, а потім зробимо заміну (19), тобто повернемося до початкової змінної $U(t,x)$.

Розгляньмо випадок (i) теореми 1. Рівняння (5) та відповідний оператор (6) після заміни (19) набувають вигляду

$$V_{xx} = V^n V_t - \lambda V_x + (\lambda_1^* V + \lambda_2^*)(\lambda_3 - V^n), \tag{43}$$

та

$$Q = \partial_t + (\lambda_1^* V + \lambda_2^*)\partial_V \tag{44}$$

відповідно.

Побудуємо за оператором (44) анзац за стандартною процедурою, тобто шляхом розв'язування рівняння $Q(V)=0$, або

$$\frac{dt}{1}=\frac{dV}{\lambda_1^* V+\lambda_2^*}.$$

В залежності від значення λ_1^* отримаємо два анзаци: при $\lambda_1^*=0$, одержимо

$$V=\lambda_2^* t+\varphi(x), \tag{45}$$

а при $\lambda_1^*\neq 0$

$$V=\varphi(x)e^{\lambda_1^* t}-\tfrac{\lambda_2^*}{\lambda_1^*}, \tag{46}$$

де $\varphi(x)$ – нова невідома функція. Підставивши анзац (45) в рівняння (43), отримуємо таке звичайне диференціальне рівняння (ЗДР)

$$\varphi_{xx}+\lambda\varphi_x+\lambda_4^*=0, \quad \lambda_4^*=-\lambda_2^*\lambda_3,$$

яке легко розв'язується і має загальний розв'язок

$$\varphi=c_1+c_2e^{-\lambda x}-\tfrac{\lambda_4^*}{\lambda}x, \quad c_k\in\mathbb{R}, \quad k=1,2.$$

Отже, розв'язок рівняння (43) при $\lambda_1^*=0$ має вигляд

$$V=\lambda_2^* t+c_1+c_2e^{-\lambda x}-\tfrac{\lambda_4^*}{\lambda}x.$$

Використавши заміну (19) отримаємо розв'язок

$$U=\left[\lambda_2(m+1)t+c_1+c_2e^{-\lambda x}-\tfrac{\lambda_4(m+1)}{\lambda}x\right]^{\frac{1}{m+1}},$$

рівняння

$$U_t=[U^mU_x]_x+\lambda U^mU_x+\lambda_2U^{-m}+\lambda_4, \quad m\neq -1.$$

Оскільки останнє рівняння при $\lambda_2\neq 0$ допускає лише тривіальну алгебру інваріантності $\langle\partial_t,\partial_x\rangle$ [4], то використовуючи ці оператори ми можемо отримати тільки розв'язки вигляду $U=\varphi(c_3x+c_4t)$, $c_3,c_4\in\mathbb{R}$. Як ми бачимо, отриманий нами розв'язок при $c_2\neq 0$ має інший вигляд, а тому є неліївськими. Так само показується, що і інші розв'язки, які отримано нижче, є неліївськими.

Підставивши анзац (46) в рівняння (43), знову отримаємо лінійне ЗДР

$$\varphi_{xx} + \lambda\varphi_x + \lambda_4\varphi = 0, \quad \lambda_4 = -\lambda_1^*\lambda_3,$$

розв'язки якого суттєво залежать від значення $\delta = \lambda^2 - 4\lambda_4$. Згідно з класичною теорією лінійних ЗДР отримуємо

$$\varphi_1 = c_1 \exp\left(\tfrac{-\lambda+\sqrt{\delta}}{2}x\right) + c_2 \exp\left(\tfrac{-\lambda-\sqrt{\delta}}{2}x\right)$$

при $\delta > 0$,

$$\varphi_2 = c_1 \exp\left(-\tfrac{\lambda}{2}x\right) + c_2 x \exp\left(-\tfrac{\lambda}{2}x\right)$$

при $\delta = 0$,

$$\varphi_3 = \exp\left(-\tfrac{\lambda}{2}x\right)\left(c_1 \cos\tfrac{\sqrt{-\delta}}{2}x + c_2 \sin\tfrac{\sqrt{-\delta}}{2}x\right)$$

при $\delta < 0$.

Отже, рівняння (43) має три типи розв'язків в залежності від значення δ, $\delta = \lambda^2 + 4\lambda_1\lambda_3(m+1)$. Знову використавши заміну (19), анзац (46) та отримані функції $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, 3$, будуємо розв'язки

$$U = \left[c_1 \exp\left(\tfrac{-\lambda+\sqrt{\delta}}{2}x + \lambda_1(m+1)t\right) + \right.$$
$$\left. + c_2 \exp\left(\tfrac{-\lambda-\sqrt{\delta}}{2}x + \lambda_1(m+1)t\right) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right]^{\frac{1}{m+1}},$$

$$U = \left[c_1 \exp\left(-\tfrac{\lambda}{2}x + \lambda_1(m+1)t\right) + \right.$$
$$\left. + c_2 x \exp\left(-\tfrac{\lambda}{2}x + \lambda_1(m+1)t\right) - \tfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right]^{\frac{1}{m+1}},$$

$$U = \left[\exp\left(-\tfrac{\lambda}{2}x + \lambda_1(m+1)t\right) \times \right.$$
$$\left. \times \left(c_1 \cos\tfrac{\sqrt{-\delta}}{2}x + c_2 \sin\tfrac{\sqrt{-\delta}}{2}x\right) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right]^{\frac{1}{m+1}}$$

рівняння

$$U_t = [U^m U_x]_x + \lambda U^m U_x +$$

$$+(\lambda_1 U^{m+1}+\lambda_2)(U^{-m}-\lambda_3), \tag{47}$$

де $m\neq -1$.

Зауважимо, що неліївські розв'язки рівняння (47) при $\lambda_2=0$ було отримано в роботі [18], проте легко помітити, що вищенаведені розв'язки мають іншу структуру, тобто є новими.

Розгляньмо випадок (ii) теореми 1. Рівняння (7) та відповідний оператор (8) після заміни (19) набувають виглядів

$$V_{xx}=e^V V_t-\lambda V_x+(\lambda_1 V+\lambda_2)(\lambda_3-e^V),$$

та

$$Q=\partial_t+(\lambda_1 V+\lambda_2)\partial_V.$$

Аналогічним чином, як і при розгляді випадку (i) отримаємо такі два анзаци

$$V=\lambda_2 t+\varphi(x), \quad \lambda_1=0, \tag{48}$$

$$V=\varphi(x)e^{\lambda_1 t}-\tfrac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad \lambda_1\neq 0. \tag{49}$$

Оскільки структура анзаців (48) і (49) така сама що й (45) і (46), то подальші викладки повністю аналогічні. У підсумку отримаємо розв'язок

$$U=\exp\left[\lambda_2 t+c_1+c_2e^{-\lambda x}-\tfrac{\lambda_4}{\lambda}x\right],$$

нелінійного рівняння РДК

$$U_t=[U^{-1}U_x]_x+\lambda U^{-1}U_x+\lambda_2 U+\lambda_4.$$

Та три розв'язки

$$U=\exp\left[c_1\exp\left(\tfrac{-\lambda+\sqrt{\delta}}{2}x+\lambda_1 t\right)+c_2\exp\left(\tfrac{-\lambda-\sqrt{\delta}}{2}x+\lambda_1 t\right)-\tfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right],$$

$$U=\exp\left[c_1\exp\left(-\tfrac{\lambda}{2}x+\lambda_1 t\right)+c_2x\exp\left(-\tfrac{\lambda}{2}x+\lambda_1 t\right)-\tfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right],$$

$$U=\exp\left[\exp\left(-\tfrac{\lambda}{2}x+\lambda_1 t\right)\left(c_1\cos\tfrac{\sqrt{-\delta}}{2}x+c_2\sin\tfrac{\sqrt{-\delta}}{2}x\right)-\tfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right],$$

рівняння

$$U_t=[U^{-1}U_x]_x+\lambda U^{-1}U_x+(\lambda_1\ln U+\lambda_2)(U-\lambda_3)$$

в залежності від знаку $\delta=\lambda^2+4\lambda_1\lambda_3$.

Розгляньмо випадок (i) теореми 2. Рівняння (13) та відповідний оператор (14) після заміни (19) набувають відповідно вигляду (33) та (34). Рівняння $Q(V) = 0$ для оператора (34) має вигляд

$$V_t = \lambda V V_x + \lambda_3^* V + \lambda_4^*. \tag{50}$$

У цьому випадку зручніше не будувати анзац, а спочатку виразити V_t з (50) та підставити в (33). Тоді отримується лінійне ЗДР $V_{xx} = 0$, яке породжує анзац

$$V = \varphi(t)x + \psi(t), \tag{51}$$

де $\varphi(t)x$ і $\psi(t)$ – нові шукані функції. Підставивши анзац (51) у рівняння (50), одержимо вираз

$$\varphi_t x + \psi_t = \lambda(\varphi x + \psi)\varphi + \lambda_3^*(\varphi x + \psi) + \lambda_4^*, \tag{52}$$

розчеплення якого за змінною x веде до системи ЗДР

$$\varphi_t = \lambda\varphi^2 + \lambda_3^*\varphi, \quad \psi_t = \lambda\varphi\psi + \lambda_3^*\psi + \lambda_4^*. \tag{53}$$

Розв'язавши систему (53) і підставивши отримані вирази для φ та ψ в анзац (51), одержимо розв'язки

$$V = \tfrac{1}{\lambda t + c_1}\left(-x + \lambda_4^*\left(\tfrac{\lambda}{2}t^2 + c_1 t\right) + c_2\right),$$

та

$$V = \tfrac{1}{1 + c_1 e^{-\lambda_3^* t}}\left(-\tfrac{\lambda_3^*}{\lambda}x + \lambda_4^*\left(t - \tfrac{c_1}{\lambda_3^*}e^{-\lambda_3^* t}\right) + c_2\right),$$

для рівняння

$$V_{xx} = V^n V_t - \lambda V^{n+1}V_x - (\lambda_3^* V + \lambda_4^*)V^n, \quad n \neq -1,$$

відповідно при $\lambda_3^* = 0$ та $\lambda_3^* \neq 0$. Зробивши заміну (19) і перепозначивши сталі, отримаємо розв'язки

$$U = \left[\tfrac{1}{\lambda t + c_1}\left(-x + \lambda_2(m+1)\left(\tfrac{\lambda}{2}t^2 + c_1 t\right) + c_2\right)\right]^{\frac{1}{m+1}},$$

та

$$U = \left[\tfrac{1}{1 + c_1 e^{-\lambda_1(m+1)t}}\left(-\tfrac{\lambda_1(m+1)}{\lambda}x + \right.\right.$$

$$+ \lambda_2(m+1)\big(t - \tfrac{c_1}{\lambda_1(m+1)}e^{-\lambda_1(m+1)t}\big) + c_2\Big)\Big]^{\frac{1}{m+1}},$$

нелінійного рівняння РДК

$$U_t = [U^m U_x]_x + \lambda U^{m+1}U_x + \lambda_1 U + \lambda_2 U^{-m}, \quad m \neq -1 \tag{54}$$

відповідно при $\lambda_1 = 0$ та $\lambda_1 \neq 0$. Зауважимо, що при $m \neq -1$ рівняння (54) допускає лише тривіальну алгебру інваріантності [4], тому отримані розв'язки є неліївськими.

4. Висновки. Таким чином в цій роботі ми встановили дві теореми, які дають вичерпний опис Q-умовних симетрій двох класів рівнянь реакції-дифузії-конвекції вигляду (2) та (3). Зауважимо, що отримані Q-умовні симетрії як правило можна використовувати і для випадку виродження рівняння РДК в рівняння реакції-дифузії, тобто при $\lambda = 0$. Більше того, наскільки нам відомо, деякі Q-умовні симетрії є новими навіть у цьому частковому випадку.

В роботі також побудовано точні розв'язки деяких нелінійних РДК за допомогою отриманих симетрій. Показано при яких умовах ці розв'язки є неліївськими, тобто не можуть бути отримані класичним методом Лі. В майбутньому ми плануємо більш детально дослідити властивості отриманих розв'язків та питання щодо їх можливого застосування.

[1] Ames W.F. Nonlinear partial differential equations in engineering. – New York: Academic Press, 1972. – 495 p.

[2] Murray J.D. Mathematical biology. – Berlin: Springer, 1989. – 750 p.

[3] Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности // Докл. АН СССР. – 1959. – **125**. – С. 492–495.

[4] Cherniha R., Serov M. Symmetries, ansätze and exact solutions of nonlinear second-order evolution equations with convection term // Euro. J. Appl. Math. – 1998. – **9**. – P. 527–542.

[5] Cherniha R., Serov M. Symmetries, ansätze and exact solutions of nonlinear second-order evolution equations with convection term. II // Euro. J. Appl. Math., to appear.

[6] Bluman G.W., Cole I.D. The general similarity solution of the heat equation // J. Math. Mech. – 1969. – **18**. – P. 1025-1042.

[7] Olver P., Rosenau P. Group-invariant solutions of differential equations // SIAM J. Appl. Math. – 1987. – **47**. – P. 263–278.

[8] Levi D., Winternitz P. Non-classical symmetry reduction: example of the Boussinesq equation // J. Phys. A: Math. Gen. – 1989. – **22**. – P. 2915-2924.

[9] Фущич В.І., Сєров М.І., Чопик В.І. Умовна інваріантність та нелінійні рівняння теплопровідності // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1988. – № 9. – С. 17–21.

[10] Fushchych W.I., Shtelen W.M., Serov M.I. Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics. – Kluwer: Dordrecht, 1993. – 456 p.

[11] Серов Н.И. Условная инвариантность и точные решения нелинейного уравнения теплопроводности // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**. – С. 1370–1376.

[12] Clarkson P.A., Mansfield E.L. Symmetry reductions and exact solutions of a class of nonlinear heat equations // Phys. D. – 1993. – **70**. – P. 250–288.

[13] Arrigo D.J., Broadbridge P., Hill J.M. Nonclassical symmetry reductions of the linear diffusion equation with a nonlinear source // IMA J. Appl. Math. – 1994. – **52**. – P. 1–24.

[14] Cherniha R. New Q-conditional symmetries and exact solutions of some reaction-diffusion-convection equations arising in mathematical biology // J. Math. Anal. Appl., to appear.

[15] Zhdanov R.Z., Lahno V.I. Conditional symmetry of a porous medium equation // Phys. D. – 1998. – **122**. – P. 178–186.

[16] Cherniha R. A constructive method for construction of new exact solutions of nonlinear evolution equations // Rep. Math. Phys. – 1996.– **38**. – P. 301–312.

[17] Черніга Р.М. Застосування одного конструктивного методу для побудови неліївських розв'язків нелінійних еволюційних рівнянь // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**. – С. 814–827.

[18] Cherniha R. New non-Lie ansätze and exact solutions of nonlinear reaction-diffusion-convection equations // J. Phys. A: Math. Gen. – 1998. – **31**. – P. 8179–8198.