Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 217–224

УДК 517.9:519.46

Редукція та розв'язки одного класу систем нелінійних рівнянь реакції-дифузії зі степеневими нелінійностями

Л.П. МИРОНЮК †***, Р.М. ЧЕРНІГА*** ‡

† *Волинський державний університет імені Лесі Українки, Луцьк*

† *Інститут математики НАН України, Київ*
E-mail: cherniha@imath.kiev.ua

Проведено неліївську редукцію та знайдено точні розв'язки класу нелінійних систем рівнянь реакції-дифузії зі степеневими коефіцієнтами дифузії та взаємодії. Зокрема, у явному вигляді отримано вибухаючі розв'язки для окремих систем такого вигляду.

Non-Lie reduction and exact solutions of a class of nonlinear reaction-diffusion systems with power coefficients of diffusivity and interaction are obtained. In the particular case, the blow up solutions for some systems are constructed.

1. Вступ. В цій роботі розглядаються нелінійні системи рівнянь реакції-дифузії вигляду

$$\begin{aligned}
&U_t = (U^{\alpha_1}U_x)_x + U(a_1 + b_1U^{\alpha_1}) + c_1UV^{\alpha_2},\\
&V_t = (V^{\alpha_2}V_x)_x + V(a_2 + b_2V^{\alpha_2}) + c_2VU^{\alpha_1},
\end{aligned} \tag{1}$$

де α_k, a_k, b_k, c_k, $k = 1,2$ – довільні сталі, $U = U(t,x)$, $V = V(t,x)$ – шукані функції. У випадку $\alpha_k = 1$, $k = 1,2$, ця система набуває вигляду

$$\begin{aligned}
&U_t = (UU_x)_x + U(a_1 + b_1U) + c_1UV,\\
&V_t = (VV_x)_x + V(a_2 + b_2V) + c_2VU.
\end{aligned} \tag{2}$$

Система (2) є природнім узагальненням дифузивної системи Лотки–Вольтера на випадок змінних коефіцієнтів дифузії. Зокрема, у випадку $V \equiv 0$ система (2) набуває вигляду так званого пористого рівняння Фішера, яке вивчалося в багатьох роботах (див., наприклад, [1]). Як відомо, класична дифузійна система Лотки–Вольтера (тобто (2) зі сталими коефіцієнтами дифузії) була запропонована для опису взаємодії двох біологічних видів, зокрема, в залежності від знаків коефіцієнтів, вона є моделлю "хижак U – жертва V" або моделлю змагання чи симбіозу двох видів. Проте давно встановлено, що вона недостатньо точно описує ці процеси і має суттєві недоліки (див. детальніше [1, п. 3.1]), тому на теперішній час вивчаються різноманітні узагальнення цієї системи (див., наприклад, [2] та цитовану там літературу). Як одне з таких узагальнень може розглядатися і система (1).

Робота побудована таким чином. В пункті 2 система (1) зі степеневими нелінійностями заміною залежних змінних зводиться до системи з квадратичними нелінійностями. Отримана система методом додаткових породжуючих умов редукована до систем звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР). В пункті 3 знайдено окремі випадки, для яких побудовані розв'язки отриманих систем ЗДР в термінах елементарних функцій. Для цих випадків отримано в явному вигляді точні розв'язки відповідних систем реакції-дифузії.

2. Редукція системи. Застосовуючи заміну $U = u^{\frac{1}{\alpha_1}}$, $V = v^{\frac{1}{\alpha_2}}$ (див. [2]), зведемо систему (1) до вигляду:

$$\begin{aligned} u_t &= uu_{xx} + \tfrac{1}{\alpha_1}u_x^2 + \alpha_1(a_1u + b_1u^2) + \alpha_1c_1uv, \\ v_t &= vv_{xx} + \tfrac{1}{\alpha_2}v_x^2 + \alpha_2(a_2v + b_2v^2) + \alpha_2c_2uv. \end{aligned} \tag{3}$$

Оскільки (3) містить лише квадратичні нелінійності, то використовуємо підхід, запропонований в [3]. Як додаткову породжуючу умову виберемо систему лінійних ЗДР третього порядку

$$\begin{aligned} \beta_1(t)\frac{du}{dx} + \beta_2(t)\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^3u}{dx^3} &= 0, \\ \beta_1(t)\frac{dv}{dx} + \beta_2(t)\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^3v}{dx^3} &= 0, \end{aligned} \tag{4}$$

де $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$ – довільні гладкі функції, а змінна t розглядається як параметр. З теорії ЗДР відомо, що в залежності від $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$ розв'язки системи (4) можуть мати один з таких виглядів:

$$\begin{aligned} u &= \varphi_0(t) + \varphi_1(t)x + \varphi_2(t)x^2, \\ v &= \psi_0(t) + \psi_1(t)x + \psi_2(t)x^2, \end{aligned} \tag{5}$$

якщо $\beta_1 = \beta_2 = 0$;

$$u = \varphi_0(t) + \varphi_1(t)x + \varphi_2(t)e^{\gamma(t)x},$$
$$v = \psi_0(t) + \psi_1(t)x + \psi_2 e^{\gamma(t)x}, \tag{6}$$

якщо $\beta_1 = 0$;

$$u = \varphi_0(t) + \varphi_1(t)e^{\gamma_1(t)x} + \varphi_2(t)e^{\gamma_2(t)x},$$
$$v = \psi_0(t) + \psi_1(t)e^{\gamma_1(t)x} + \psi_2 e^{\gamma_2(t)x}, \tag{7}$$

якщо $\gamma_{1,2}(t) = \frac{1}{2}(\pm\sqrt{D} - \beta_2)$, $D = \beta_2^2 - 4\beta_1 > 0$, $\gamma_1 \neq \gamma_2$;

$$u = \varphi_0(t) + e^{-\frac{\beta_2 x}{2}}\left(\varphi_1(t)\cos\frac{\sqrt{-D}}{2}x + \varphi_2(t)\sin\frac{\sqrt{-D}}{2}x\right),$$
$$v = \psi_0(t) + e^{-\frac{\beta_2 x}{2}}\left(\psi_1(t)\cos\frac{\sqrt{-D}}{2}x + \psi_2(t)\sin\frac{\sqrt{-D}}{2}x\right), \tag{8}$$

якщо $D < 0$;

$$u = \varphi_0(t) + \varphi_1(t)e^{\gamma(t)x} + x\varphi_2(t)e^{\gamma(t)x},$$
$$v = \psi_0(t) + \psi_1(t)e^{\gamma(t)x} + x\psi_2(t)e^{\gamma(t)x}, \tag{9}$$

якщо $D = 0$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$.

В формулах (5)–(9) $\varphi_i(t)$, $\psi i(t)$, $i = 0, 1, 2$ є новими невідомими функціями. Виявляється, що анзаци (5)–(9) редукують (3)до систем ЗДР для функцій $\varphi_i(t)$, $\psi_i(t)$ лише при певних додаткових умовах на коефіцієнти (3).

Розгляньмо це детально на прикладі анзацу (5). Знайшовши u_t, u_x та u_{xx} і підставивши в (3), одержимо такі вирази:

$$\begin{aligned}\dot\varphi_0(t) + \dot\varphi_1(t)x + \dot\varphi_2(t)x^2 &= 2\varphi_0\varphi_1 + \tfrac{1}{\alpha_1}\varphi_1^2 + \alpha_1 a_1\varphi_0 + \alpha_1 b_1\varphi_0^2 + \\ &+ \alpha_1 c_1\varphi_0\psi_0 + (2\varphi_1\varphi_2 + \tfrac{4}{\alpha_1}\varphi_1\varphi_2 + \alpha_1 a_1\varphi_1 + 2\alpha_1 b_1\varphi_0\varphi_1 + \\ &+ \alpha_1 c_1\varphi_0\psi_1 + \alpha_1 c_1\varphi_1\psi_0)x + (2\varphi_2^2 + \tfrac{4}{\alpha_1}\varphi_2^2 + \alpha_1 a_1\varphi_2 + \\ &+ \alpha_1 b_1\varphi_1^2 + 2\alpha_1 b_1\varphi_0\varphi_2 + \alpha_1 c_1\varphi_0\psi_2 + \alpha_1 c_1\varphi_2\psi_0 + \\ &+ \alpha_1 c_1\varphi_1\psi_1)x^2 + (2\alpha_1 b_1\varphi_1\varphi_2 + \alpha_1 c_1\varphi_1\psi_2 + \alpha_1 c_1\varphi_2\psi_1)x^3 + \\ &+ (\alpha_1 b_1\varphi_2^2 + \alpha_1 c_1\varphi_2\psi_2)x^4,\end{aligned} \tag{10}$$

$$\dot\psi_0(t) + \dot\psi_1(t)x + \dot\psi_2(t)x^2 = 2\psi_0\psi_1 + \tfrac{1}{\alpha_2}\psi_1^2 + \alpha_2 a_2\psi_0 + \alpha_2 b_2\psi_0^2 +$$

$$+\,\alpha_2c_2\varphi_0\psi_0+(2\psi_1\psi_2+\tfrac{4}{\alpha_2}\psi_1\psi_2+\alpha_2a_2\psi_1+2\alpha_2b_2\psi_0\psi_1+$$
$$+\,\alpha_2c_2\varphi_0\psi_1+\alpha_2c_2\varphi_1\psi_0)x+(2\psi_2^2+\tfrac{4}{\alpha_2}\psi_2^2+\alpha_2a_2\psi_2+$$
$$+\,\alpha_2b_2\psi_1^2+2\alpha_2b_2\psi_0\psi_2+\alpha_2c_2\varphi_0\psi_2+\alpha_2c_2\varphi_2\psi_0+$$
$$+\,\alpha_2c_2\varphi_1\psi_1)x^2+(2\alpha_2b_2\psi_1\psi_2+\alpha_2c_2\varphi_1\psi_2+\alpha_2c_2\varphi_2\psi_1)x^3+$$
$$+\,(\alpha_2b_2\psi_2^2+\alpha_2c_2\varphi_2\psi_2)x^4. \qquad (11)$$

Розчеплення виразів (10)–(11) за степенями x веде до 10 ЗДР та алгебраїчних рівнянь для функцій $\varphi_i(t)$, $\psi_i(t)$, $i=0,1,2$. Аналіз показує, що ця система рівнянь є сумісною лише у випадку таких співвідношень між коефіцієнтами системи (3):

$$\alpha_1a_1=\alpha_2a_2,\quad \alpha_1c_1=\alpha_2b_2,\quad \alpha_2c_2=\alpha_1b_1,$$
$$1+\tfrac{2}{\alpha_1}=\big(1+\tfrac{2}{\alpha_2}\big)\big(-\tfrac{b_1}{c_1}\big). \qquad (12)$$

Враховуючи ці співвідношення, для знаходження функцій φ_0, ψ_0, φ_1 отримуємо систему ЗДР:

$$\dot{\varphi_0}=2C_0\varphi_0\varphi_1+\tfrac{1}{\alpha_1}\varphi_1^2+\alpha_1a_1\varphi_0+\alpha_1b_1\varphi_0^2+\alpha_2b_2\varphi_0\psi_0,$$
$$\dot{\psi_0}=-2C_0\tfrac{b_1}{c_1}\psi_0\varphi_1+\tfrac{1}{\alpha_2}\big(\tfrac{b_1}{c_1}\big)^2\varphi_1^2+\alpha_1a_1\psi_0+\alpha_2b_2\psi_0^2+\alpha_1b_1\varphi_0\psi_0,$$
$$\dot{\varphi_1}=2\big(1+\tfrac{1}{\alpha_1}\big)\varphi_1\varphi_2+\alpha_1a_1\varphi_1+\alpha_2b_2\varphi_1\psi_0+\alpha_1b_1\varphi_0\varphi_1, \qquad (13)$$

а решту функцій знаходимо за формулами:

$$\varphi_2=C_0\varphi_1,\quad \psi_1=-\frac{b_1}{c_1}\varphi_1,\quad \psi_2=-\frac{b_1}{c_1}C_0\varphi_1,$$

де C_0 – довільна стала.

Таким чином, маючи довільний розв'язок системи ЗДР (13), отримуємо розв'язок системи (1) з умовами (12) на коефіцієнти за формулами:

$$U=(\varphi_0+\varphi_1x+C_0\varphi_1x^2)^{\frac{1}{\alpha_1}},$$
$$V=\big(\psi_0-\tfrac{b_1}{c_1}\varphi_1x-\tfrac{b_1}{c_1}C_0\varphi_1x^2\big)^{\frac{1}{\alpha_2}}.$$

Провівши аналогічні викладки у випадку анзацу (7), отримуємо таку систему ЗДР для знаходження функцій φ_0, ψ_0, φ_1:

$$\dot{\varphi_0}=\alpha_1a_1\varphi_0+\alpha_1b_1\varphi_0^2+\alpha_1c_1\varphi_0\psi_0-\tfrac{4}{\alpha_1}\gamma^2C_0\varphi_1^2,$$

$$\dot{\psi}_0 = \alpha_1 a_1 \psi_0 + \alpha_2 b_2 \psi_0^2 + \alpha_2 c_2 \varphi_0 \psi_0 - \tfrac{4}{\alpha_2}\gamma^2\kappa^2 C_0 \varphi_1^2,$$
$$\dot{\varphi}_1 = \alpha_1 a_1 \varphi_1 + \alpha_2 c_2 \varphi_0 \varphi_1 + \alpha_1 c_1 \varphi_1 \psi_0, \tag{14}$$

а для знаходження решти функцій отримуємо співвідношення:

$$\varphi_2 = C_0\varphi_1, \quad \psi_1 = \kappa\varphi_1, \quad \psi_2 = \kappa C_0 \varphi_1,$$

де $C_0 = \text{const}$. Таку редукцію можна здійснити лише у випадку, коли коефіцієнти (3) задовольняють умови:

$$\alpha_1 a_1 = \alpha_2 a_2, \quad \gamma^2 = \alpha_1(\alpha_1 b_1 - \alpha_2 c_2) = \alpha_2(\alpha_2 b_2 - \alpha_1 c_1) > 0,$$
$$\kappa = -\frac{\alpha_1(\alpha_1 b_1 - \alpha_2 c_2) + 2\alpha_1 b_1 - \alpha_2 c_2}{\alpha_1 c_1} =$$
$$= -\frac{\alpha_2 c_2}{\alpha_2(\alpha_2 b_2 - \alpha_1 c_1) + 2\alpha_2 b_2 - \alpha_1 c_1}. \tag{15}$$

Отже, довільний розв'язок системи (14) (з умовами (15) на коефіцієнти) породжує розв'язок системи (1) такого вигляду:

$$U = (\varphi_0 + \varphi_1 e^{\gamma x} + C_0 \varphi_1 e^{-\gamma x})^{\frac{1}{\alpha_1}},$$
$$V = (\psi_0 + \kappa\varphi_1 e^{\gamma x} + \kappa C_0 \varphi_1 e^{-\gamma x})^{\frac{1}{\alpha_2}}.$$

Врешті-решт, у випадку використання анзацу (8), отримуємо таку систему ЗДР для функцій φ_0, ψ_0, φ_1:

$$\dot{\varphi}_0 = \alpha_1 a_1 \varphi_0 + \alpha_1 b_1 \varphi_0^2 + \alpha_1 c_1 \varphi_0 \psi_0 + \tfrac{1}{\alpha_1}\gamma^2 \varphi_1^2 (1 + C_0^2),$$
$$\dot{\psi}_0 = \alpha_1 a_1 \psi_0 + \alpha_2 b_2 \psi_0^2 + \alpha_2 c_2 \varphi_0 \psi_0 + \tfrac{1}{\alpha_2}\gamma^2\kappa^2 \varphi_1^2 (1 + C_0^2),$$
$$\dot{\varphi}_1 = \alpha_1 a_1 \varphi_1 + \alpha_2 c_2 \varphi_0 \varphi_1 + \alpha_1 c_1 \varphi_1 \psi_0, \tag{16}$$

а решта функцій визначаються за формулами:

$$\varphi_2 = C_0\varphi_1, \quad \psi_1 = \kappa\varphi_1, \quad \psi_2 = \kappa C_0 \varphi_1,$$

причому таку редукцію можна здійснити лише у випадку, коли коефіцієнти (3) задовольняють умови:

$$\alpha_1 a_1 = \alpha_2 a_2, \quad \gamma^2 = \alpha_1(\alpha_2 c_2 - \alpha_1 b_1) = \alpha_2(\alpha_1 c_1 - \alpha_2 b_2) > 0,$$
$$\kappa = -\frac{2\alpha_1 b_1 - \alpha_1(\alpha_2 c_2 - \alpha_1 b_1) - \alpha_2 c_2}{\alpha_1 c_1} =$$

$$= -\frac{\alpha_2 c_2}{2\alpha_2 b_2 - \alpha_2(\alpha_1 c_1 - \alpha_2 b_2) - \alpha_1 c_1}, \tag{17}$$

Отже, довільний розв'язок системи (16) породжує розв'язок системи (1)(з умовами (17) на коефіцієнти) вигляду:

$$U = (\varphi_0 + \varphi_1 \cos(\gamma x) + C_0 \varphi_1 \sin(\gamma x))^{\frac{1}{\alpha_1}},$$
$$V = (\psi_0 + \kappa\varphi_1 \cos(\gamma x) + \kappa C_0 \varphi_1 \sin(\gamma x))^{\frac{1}{\alpha_2}}.$$

Нами також встановлено, що за допомогою анзаців (6) і (9) можливо провести редукцію системи (3) до систем ЗДР лише у випадку, коли вони стають частинними випадками відповідно анзаців (5) і (7).

3. Точні розв'язки. Отримані системи ЗДР (13), (14), (16) є нелінійними і жодна з них в загальному вигляді не інтегрується в термінах елементарних функцій. Проте нам вдалося знайти випадки, коли можна знайти їх частинні розв'язки. Зокрема для системи (14) при $C_0 = 0$ можна побудувати її частинні розв'язки, наклавши деякі додаткові умови на коефіцієнти.

I. Нехай $a_2 = -a_1$, $b_1 = b_2 = c_1 = c_2 = b$, $\alpha_1 = \pm\sqrt{2}$, $\alpha_2 = \mp\sqrt{2}$, $\kappa = -(2\pm\sqrt{2}+3)$. При цих умовах отримуємо розв'язки системи (14) вигляду

$$\varphi_0 = C_1 e^{\pm\sqrt{2}a_1 t}, \quad \psi_0 = -C_1 e^{\pm\sqrt{2}a_1 t},$$
$$\varphi_1 = C_2 \exp\left(\pm\sqrt{2}a_1 t - \tfrac{2bC_1}{a_1} e^{\pm\sqrt{2}a_1 t}\right).$$

У підсумку отримуємо відповідні розв'язки

$$\begin{aligned} U^{\pm\sqrt{2}} &= u = C_1 e^{\pm\sqrt{2}a_1 t} + \\ &\qquad + C_2 \exp\left(\pm\sqrt{2}a_1 t - \tfrac{2bC_1}{a_1} e^{\pm\sqrt{2}a_1 t} \pm \sqrt{2b} \pm \sqrt{2}x\right), \\ V^{\mp\sqrt{2}} &= v = -C_1 e^{\pm\sqrt{2}a_1 t} + \\ &\qquad + \kappa C_2 \exp\left(\pm\sqrt{2}a_1 t - \frac{2bC_1}{a_1} e^{\pm\sqrt{2}a_1 t} \pm \sqrt{2b} \pm \sqrt{2}_1 x\right), \end{aligned} \tag{18}$$

де $C_1 \geq 0$, C_2 – довільні сталі, системи

$$U_t = (U^{\pm\sqrt{2}} U_x)_x + U(a_1 + bU^{\pm\sqrt{2}}) + bUV^{\mp\sqrt{2}},$$
$$V_t = (V^{\mp\sqrt{2}} V_x)_x + V(-a_1 + bV^{\mp\sqrt{2}}) + bVU^{\pm\sqrt{2}}.$$

II. Нехай $a_2 = -a_1(\alpha_1 + 1) \neq 0$, $b_1 = b_2 = 0$, $c_1 = c_2 = c$ та $\alpha_2 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_1+1}$. Тоді розв'язками системи (14) є

$$\begin{aligned}
&\varphi_0 = (1+\alpha_1)a_1 e^{\alpha_1 a_1 t} A(t), \quad \psi_0 = -a_1 e^{\alpha_1 a_1 t} A(t),\\
&\varphi_1 = C_2 c^2 e^{\alpha_1 a_1 t} A^2(t),
\end{aligned}$$

де $A(t) = (ce^{\alpha_1 a_1 t} + C_1 a_1(1+\alpha_1))^{-1}$ і C_1, C_2 – довільні сталі.

У підсумку отримуємо відповідні розв'язки

$$\begin{aligned}
&U^{\alpha_1} = u = (1+\alpha_1)a_1 e^{\alpha_1 a_1 t} A(t) + C_2 c^2 e^{\alpha_1 a_1 t} A^2(t) e^{\pm\sqrt{\frac{c}{1+\alpha_1}}\alpha_1 x},\\
&V^{-\frac{\alpha_1}{\alpha_1+1}} = v = -a_1 e^{\alpha_1 a_1 t} A(t) - C_2 c^2 e^{\alpha_1 a_1 t} A^2(t) e^{\pm\sqrt{\frac{c}{1+\alpha_1}}\alpha_1 x}
\end{aligned} \tag{19}$$

системи

$$\begin{aligned}
&U_t = (U^{\alpha_1} U_x)_x + a_1 U + cUV^{-\frac{\alpha_1}{\alpha_1+1}},\\
&V_t = (V^{-\frac{\alpha_1}{\alpha_1+1}} V_x)_x - (\alpha_1+1)a_1 V + cVU^{\alpha_1}.
\end{aligned}$$

III. Нехай $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$, $c_1 = c_2 = c$ та $\alpha_2 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_1+1}$. Розв'язками системи (14) є

$$\varphi_0 = \frac{1+\alpha_1}{\alpha_1 c(t-t_0)}, \quad \psi_0 = -\frac{1}{\alpha_1 c(t-t_0)}, \quad \varphi_1 = \frac{C_1}{(t-t_0)^2}.$$

Отже, розв'язками системи

$$\begin{aligned}
&U_t = (U^{\alpha_1} U_x)_x + cUV^{-\frac{\alpha_1}{\alpha_1+1}},\\
&V_t = (V^{-\frac{\alpha_1}{\alpha_1+1}} V_x)_x + cVU^{\alpha_1},
\end{aligned}$$

є функції

$$\begin{aligned}
&U^{\alpha_1} = u = \frac{1+\alpha_1}{\alpha_1 c(t-t_0)} + \frac{C_1}{(t-t_0)^2} e^{\pm\sqrt{\frac{c}{\alpha_1+1}}\alpha_1 x},\\
&V^{-\frac{\alpha_1}{\alpha_1+1}} = v = -\frac{1}{\alpha_1 c(t-t_0)} + \frac{C_1}{(t-t_0)^2} e^{\pm\sqrt{\frac{c}{\alpha_1+1}}\alpha_1 x}.
\end{aligned} \tag{20}$$

Важливо відзначити, що розв'язки (19) (при $C_1 c a_1(1+\alpha_1) < 0$) та (20) є прикладами вибухаючих розв'язків спеціального типу – неодночасно вибухаючі (non-simultaneous blow-up), які порівняно недавно стали вивчатися (див. [4, 5]). Справді при $\alpha_1 > 0$ компонента U

в (19) і (20) перетворюється в нескінченність відповідно за скінченний проміжок часу $t = \frac{1}{\alpha_1 a_1} \ln|\frac{C_1 a_1 (1+\alpha_1)}{c}|$ та $t = t_0$. Одночасно компонента V залишається обмеженою. Якщо ж $-1 < \alpha_1 < 0$, то за скінченний проміжок часу “вибухає” компонента V, а компонента U залишається обмеженою. Врешті-решт при $\alpha_1 < -1$ цей ефект неодночасного вибухання зникає, а U та V стають обмеженими для будь-якого скінченного моменту часу t.

[1] Murray J.D. Mathematical biology. – Berlin: Springer, 1989. – 750 p.

[2] Cherniha R.M., King J.R. Nonlinear reaction-diffusion systems with variable diffusivities: Lie symmetries, ansätze and exact solutions // J. Math. Anal. Appl. – 2005. – **308**. – P. 11–35.

[3] Cherniha R.M. A constructive method for construction of new exact solutions of nonlinear evolution equations // Rep. Math. Phys. – 1996. – **38**. – P. 301–312.

[4] Quiros F., Rossi J.D. Non-simultaneous blow-up in a semilinear parabolic system // Z. Angew. Math. Phys. – 2001. – **52**. – P. 342–346.

[5] Brändle C., Quiros F., Rossi J.D. The role of non-linear diffusion in non-simultaneous blow-up // J. Math. Anal. Appl. – 2005. – **308**. – P. 92–104.