Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 211–216

УДК 517.912:512.816

Ортогонально-симплектична супералгебра: структура і реалізації

В.О. МАРЧЕНКО, Ю.Д. МОСКАЛЕНКО

Полтавський держ. пед. університет ім. В.Г. Короленка
E-mail: math@pdpu.poltava.ua

Проведено класифікацію градуйованих підалгебр ортогонально-симплектичної супералгебри $Osp(2,n)$. Побудовано реалізації супералгебри $Osp(2,1)$ в класі диференціальних операторів першого порядку з матричними коефіцієнтами.

Subalgebras of the orthogonal-symplectic superalgebra $Osp(2,n)$ are classified. Some realizations of superalgebra $Osp(2,1)$ in vector fields are constructed.

1. Вступ. Дослідження структури алгебр Лі є важливим для розв'язування багатьох задач групового аналізу диференціальних рівнянь, основи якого заклав С. Лі [1]. Систематичне дослідження підалгебр алгебр симетрій квантової механіки було розпочато у роботі Патери, Вінтернітца і Цассенхауза [2], у якій був запропонований загальний метод класифікації підалгебр скінченновимірної алгебри Лі. У запропонованій роботі проведено дослідження підалгебр ортогонально-симплектичної супералгебри.

2. Ортогонально-симплектична супералгебра. Ортогонально-симплектична супералгебра $Osp(2,n)$ має таке матричне представлення [3]:

$$\begin{pmatrix} X & \overline{\theta} & \overline{\omega} \\ -\overline{\omega}^T & \alpha & \beta \\ \overline{\theta}^T & \gamma & -\alpha \end{pmatrix}, \quad \text{де } X \in AO(n);\ \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R};\ \overline{\theta},\overline{\omega} \in \mathbb{R}^n.$$

Нехай I_{ab} – матриця порядку $n+2$, яка містить одиницю на перетині a-го рядка і b-го стовпця, а решта елементів є нулями. Тоді базис $Osp(2,n)$ можна задати такими матрицями:

$$J_{ab} = I_{ab} - I_{ba}, \quad D = I_{n+2,n+2} - I_{n+1,n+1}, \quad S = -I_{n+2,n+1},$$

$$T = I_{n+1,n+2}, \quad G_a = I_{a,n+1} + I_{n+2,a}, \quad P_a = I_{a,n+2} - I_{n+1,a},$$

де $a, \ b = 1, 2, \ldots, n$; $a < b$.

Елементи J_{ab}, D, S, T утворюють базис парної частини супералгебри, елементи P_a, G_a – базис непарної частини супералгебри. Базисні елементи задовольняють таким комутаційним і антикомутаційним співвідношенням:

$$\begin{aligned}
&[J_{ab}, J_{cd}] = \delta_{ad}J_{bc} + \delta_{bc}J_{ad} - \delta_{ac}J_{bd} - \delta_{bd}J_{ac},\\
&[P_a, J_{bc}] = \delta_{ab}P_c - \delta_{ac}P_b, \quad [G_a, J_{bc}] = \delta_{ab}G_c - \delta_{ac}G_b,\\
&[D, P_a] = -P_a, \quad [D, G_a] = G_a, \quad [S, P_a] = G_a, \quad [S, G_a] = 0,\\
&[T, P_a] = 0, \quad [T, G_a] = -P_a, \quad [D, S] = 2S, \quad [D, T] = -2T,\\
&[T, S] = D, \quad [G_a, G_b]_+ = -2\delta_{ab}S, \quad [P_a, P_b]_+ = -2\delta_{ab}T,\\
&[G_a, P_b]_+ = \delta_{ab}D - J_{ab},
\end{aligned}$$

де $a, b, c, d = 1, 2, \ldots, n$; δ_{ab} – символ Кронекера. Тут символ $[\cdot, \cdot]$ означає комутатор, а $[\cdot, \cdot]_+$ – антикомутатор елементів алгебри.

Легко бачити, що всі ці комутаційні співвідношення збігаються з аналогічними для базисних елементів алгебри Галілея [4], тому ортогонально-симплектичну супералгебру $Osp(2, n)$ можна розглядати як одне з можливих суперузагальнень алгебри Галілея.

3. Підалгебри ортогонально-симплектичної супералгебри. Нехай $L = L^0 + L^1$ – супералгебра Лі, L^0 – її парна частина, L^1 – непарна частина. Підалгебру супералгебри L, яка є теж супералгеброю, будемо називати градуйованою підалгеброю. Градуйована підалгебра F супералгебри L має вигляд $F = F^0 + F^1$, де F^0 – підалгебра алгебри L^0, $[F^0, F^1] \subset F^1$, $[F^1, F^1] \subset F^0$. Отже, задача класифікації градуйованих підалгебр супералгебри L зводиться до класифікації підалгебр F^0 алгебри L^0, знаходження підпросторів F^1 простору L^1, інваріантних відносно F^0, і перевірки умови $[F^1, F^1] \subset F^0$. Структуру супералгебри L будемо досліджувати відносно G-спряженості, де G – група внутрішніх автоморфізмів алгебри Лі L^0. Стосовно супералгебри $Osp(2, n)$ такою групою G буде група $O(n) \times Sl(2, \mathbb{R})$.

Нехай

$$\begin{aligned}
&W[k, l] = \langle P_a \mid a = k, \ldots, l\rangle, \quad V[k, l] = \langle G_a \mid a = k, \ldots, l\rangle,\\
&X_{ab} = J_{2a-1,2b-1} + J_{2a,2b}, \quad Y_{ab} = J_{2a-1,2b} + J_{2a,2b-1},
\end{aligned}$$

$$X[k,l] = \langle X_{ab} \mid a = k,\dots,l\rangle, \quad Y[k,l] = \langle Y_{ab} \mid a = k,\dots,l\rangle,$$
$$J[k,l] = \langle J_{ab} \mid a = k,\dots,l\rangle,$$
$$L_a = \langle G_{2a-1} + P_{2a}, G_{2a} - P_{2a-1}\rangle, \quad L[k,l] = \sum_{i=k}^{l} L_i,$$
$$(\lambda(S+T)+J)[k,l] = \langle \lambda(S+T) + J_{2a-1,2a} \mid a = k,\dots,l\rangle.$$

Теорема. *З точністю до $O(n) \times Sl(2,\mathbb{R})$-спряженості градуйовані підалгебри супералгебри $Osp(2,n)$ визначаються такими супералгебрами:*

$$A; \quad AO(k) \oplus ASl(2,R) + W[1,k] + V[1,k] + C_{k+1};$$
$$B + \langle T\rangle + W[1,k]; \quad \langle J_{12} + S + T, G_1 + P_2\rangle \oplus C_3;$$
$$\langle S+T\rangle + J[1,k] + X[1,k] + Y[1,k] + L[1,k] + C_{2k+1};$$
$$(S+T+J)[1,k] + X[1,k] + Y[1,k] + L[1,k] + C_{2k+1},$$

де A – підалгебра алгебри $AO(n) \oplus ASl(2,\mathbb{R})$, B – підалгебра алгебри $AO(k) \oplus AO[k+1,n] \oplus \langle D\rangle$, C_i – підалгебра алгебри $AO[i,n]$.

Доведення. Нехай $F = F^0 + F^1$ – градуйована підалгебра супералгебри $Osp(2,n)$, F^0 – її парна частина, F^1 – непарна частина.

Якщо $F^1 = 0$, то F є підалгеброю алгебри $AO(n) \oplus ASl(2,R)$. Нехай $F^1 \neq 0$, тоді з точністю до спряженості можливі випадки [4]:

$$1)\ P_1 \in F^1; \quad 2)\ G_1 + P_2 \in F^1.$$

Випадок 1. $P_1 \in F^1$, тому $-P_1^2 = T \in F^0$, а тому $F^1 = W[1,k] + I(V[1,k] + W[k+1,l])$, де $I(A,B)$ – підпряма сума просторів A та B [4]. Отже, або $F^1 = W[1,k]$, або F^1 містить елемент вигляду $G_1 + \sum_{i=k+1}^{l} a_i P_i$. Але в останньому випадкові $[G_1 + \sum_{i=k+1}^{l} a_i P_i, P_1]_+ = D \in F^0$, тому $\langle T, D\rangle$ – підалгебра F^0, а $F^1 = W[1,k] + V[1,k]$ [4]. Маємо $G_1 \in F^1$, отже $S = -G_1^2 \in F^0$, $J_{ab} = -[G_a, P_b]_+ \in F^0$ для всіх $a,b = 1,\dots,k$. Звідси випливає, що $F^0 = AO(k) \oplus ASl(2,R) \oplus C_{k+1}$.

Випадок 2. $G_1 + P_2 \in F^1$, тому $-(G_1+P_2)^2 = J_{12} + S + T \in F^0$. Тоді F^1 збігається з одним із просторів $R = \langle G_1 + P_2\rangle + \langle G_3 + +\lambda_1 P_4, G_4 + \lambda_1^{-1} P_3\rangle + \dots + \langle G_{2k-1} + \lambda_{k-1} P_{2k}, G_{2k} + \lambda_{k-1}^{-1} P_{2k-1}\rangle$ або $R + \langle G_2 - P_1\rangle$, де $0 < \lambda_1 \le \dots \le \lambda_{k-1} \le 1$ [4].

Якщо $\dim F^1 = 1$, то маємо супералгебру $\langle J_{12} + S + T, G_1 + P_2\rangle$. Нехай $\dim F^1 > 1$, тоді або $F^1 = \langle G_1 + P_2, G_2 - P_1\rangle$, або оператори $G_3 + \lambda_1 P_4$ та $G_4 + \lambda_1^{-1} P_3$ належать F^1. В останньому випадкові

$[G_3 + +\lambda_1 P_4, G_4 + \lambda_1^{-1} P_3]_+ = (\lambda_1 - \lambda_1^{-1})D \in F^0$. Якщо $\lambda_1 \neq \lambda_1^{-1}$, то $D \in F^0$, але тоді $ASl(2,R)$ виключається в F^0 і все зводиться до випадку 1. Отже, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{k-1} = 1$ і тому $R = \langle G_1 + P_2 \rangle + L[2,k]$. Але внаслідок співвідношень $-(G_3 + P_4)^2 = J_{34} + S + T$, $[J_{34} + S + T, G_1 + P_2] = G_2 - P_1$ випливає, що $F^1 = R + \langle G_2 - P_1 \rangle = L[1,k]$. Залишається скористатися рівностями: $X_{ab} = -[G_{2a-1} + P_{2a}, G_{2b-1} + P_{2b}]_+$, $Y_{ab} = -[G_{2a-1} + P_{2a}, G_{2b} + P_{2b-1}]_+$, $J_{2a-1,2a} + S + T = -(G_{2a-1} + P_{2a})^2$, і тому $(S+T+J)[1,k] + X[1,k] + Y[1,k] + L[1,k]$ міститься в F. Легко перевірити, що одержана структура є супералгеброю. Єдиним її нетривіальним розширенням є супералгебра $\langle S+T \rangle + J[1,k] + X[1,k] + Y[1,k] + L[1,k]$. Відсутність інших розширень цих супералгебр випливає з того, що включення в алгебру інших елементів з $AO(2k)$ призводить до випадку $F^0 = AO(2k) \oplus \langle S+T \rangle$, але простір $L[1,k]$ не є інваріантним відносно $AO(2k)$. Теорема доведена.

4. Реалізації ортогонально-симплектичної супералгебри. Нехай $L = L^0 + L^1$ – деяка супералгебра, $\langle X_1, \ldots, X_n \rangle$ – базис парної частини L^0, $\langle Y_1, \ldots, Y_m \rangle$ – базис непарної частини L^1. Будемо шукати реалізації L вигляду $X_i = \xi_i^p \partial_{x_p}$, $Y_j = f_j^g \partial_{x_g}$, де $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, m$; $p, g = 1, \ldots, k$, причому $\xi_i^p = \xi_i^p(x_1, \ldots, x_k)$ – скалярні функції, $\dot{f}_j = f_j^g(x_1, \ldots, x_k)$ – матричні функції дійсної змінної. Дві реалізації $\langle X_1, \ldots, X_n \rangle + \langle Y_1, \ldots, Y_m \rangle$ та $\langle X_1', \ldots, X_n' \rangle + \langle Y_1', \ldots, Y_m' \rangle$ супералгебри L будемо називати еквівалентними, якщо існує невироджена заміна змінних $x_p' = h_p(x)$, $p = 1, \ldots, k$, яка одну реалізацію переводить в іншу з точністю до подібності матричних коефіцієнтів.

Нехай $Osp(2,1) = F^0 + F^1$ – ортогонально-симплектина супералгебра, $F^0 = \langle T, D, S \rangle$, $F^1 = \langle P, G \rangle$, причому

$$\begin{gathered}
[D,S] = 2S, \quad [D,T] = -2T, \quad [T,S] = D, \quad [D,P] = -P, \\
[D,G] = G, \quad [S,P] = G, \quad [S,G] = 0, \quad [T,P] = 0, \\
[T,G] = -P, \quad [G,P]_+ = D, \quad P^2 = -T, \quad G^2 = -S. \qquad (1)
\end{gathered}$$

Будемо шукати реалізації супералгебри $Osp(2,1)$ в класі операторів вигляду:

$\alpha\partial_t + \beta\partial_x$ – для парних елементів супералгебри,

$a\partial_t + b\partial_x + c$ – для непарних елементів супералгебри,

де α, β – скалярні; a, b, c – матричні функції від t, x.

Існує чотири нееквівалентні реалізації алгебри $ASl(2,R) = \langle D, T, S \rangle$ у класі вказаних операторів [5]:

1) $T = \partial_t, \quad D = 2t\partial_t, \quad S = t^2\partial_t;$

2) $T = \partial_t, \quad D = 2t\partial_t + x\partial_x, \quad S = t^2\partial_t + tx\partial_x;$

3) $T = \partial_t, \quad D = 2t\partial_t + x\partial_x, \quad S = (t^2 + x^4)\partial_t + tx\partial_x;$

4) $T = \partial_t, \quad D = 2t\partial_t + x\partial_x, \quad S = (t^2 - x^4)\partial_t + tx\partial_x.$

Відзначимо, що для всіх реалізацій $T = \partial_t$, тому з умови $[T, P] = 0$ випливає, що $P = a\partial_t + b\partial_x + c$, де a, b, c – матричні функції лише від x.

Розглянемо реалізацію 1 алгебри $ASl(2, \mathbb{R})$. З комутаційних співвідношень маємо, що $P = [P, D]$, тобто $a\partial_t + b\partial_x + c = 2a\partial_t$, звідси, $a = b = c = 0$, $P = 0$, що неможливо. Отже, відповідної реалізації супералгебри не існує.

Інші реалізації алгебри $ASl(2, \mathbb{R})$ об'єднаємо за формулою $S = (t^2 + \varepsilon x^4)\partial_t + x\partial_x$, де $\varepsilon = 0, \pm 1$. З умови $P = [P, D]$ випливає, що $P = xA\partial_t + B\partial_x + \frac{1}{x}C$, де A, B, C – сталі матриці. Але $T = -P^2$, тому матимемо систему рівнянь для визначення матриць A, B, C:

$$\begin{aligned} &A^2 = B^2 = [A, B]_+ = [B, C]_+ = O, \quad C^2 = BC, \\ &BA + [A, C]_+ = -E, \end{aligned} \tag{2}$$

де O – нульова матриця, E – одинична матриця.

$G = [S, P]$, тому $G = -(txA + 4\varepsilon x^3 B)\partial_t - (x^2 A + tB)\partial_x - \frac{t}{x}C$. Але тоді, враховуючи співвідношення (2) між матрицями A, B, C, одержимо $G^2 = -(t^2 + 8\varepsilon x^4 BA)\partial_t + tx\partial_x + 4\varepsilon x^2 BC$. З іншого боку $G^2 = -S = -(t^2 + \varepsilon x^4)\partial_t - tx\partial_x$. Прирівнюючи відповідні коефіцієнти, маємо систему рівнянь

$$8\varepsilon BA = \varepsilon E, \quad 4\varepsilon BC = 0.$$

Якщо $\varepsilon = \pm 1$, то $BA = \frac{1}{8}E$, $BC = 0$. Але $[A, B]_+ = 0$, отже, $AB = -\frac{1}{8}E$. Маємо одночасно $B = \frac{1}{8}A^{-1}$ і $B = -\frac{1}{8}A^{-1}$, що неможливо. Реалізацій $OSp(2, 1)$ в цих випадках не існує.

Залишається проаналізувати випадок $\varepsilon = 0$. Безпосередні обчислення свідчать, що оператори

$$\begin{aligned} &T = \partial_t, \quad D = 2t\partial_t + x\partial_x, \quad S = t^2\partial_t + tx\partial_x, \\ &P = xA\partial_t + B\partial_x + \frac{1}{x}C, \quad G = -txA - (x^2 A + tB)\partial_x - \frac{t}{x}C, \end{aligned}$$

де A, B, C – сталі матриці, які визначаються умовами (2), задовольняють співвідношенням (1), тобто реалізують супералгебру $Osp(2{,}1)$.

Знайдемо розв'язок системи (2) у випадку, коли A, B, C – матриці порядку 2. З умови $A^2 = 0$ випливає, що з точністю до подібності $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ($A \neq 0$, так як $BA + [A, C]_+ \neq 0$).

Але тоді з рівності $B^2 = [A, B]_+ = 0$ легко одержати, що $B = \lambda A$, де $\lambda \in \mathbb{R}$. Якщо $\lambda \neq 0$, то $-E = BA + [A, C]_+ = \lambda A^2 + \frac{1}{\lambda}[B, C]_+ = 0$, тому $\lambda = 0$, $B = 0$. Матрицю C знаходимо з системи рівнянь $C^2 = 0$, $[A, C]_+ = -E$, загальним розв'язком якої є $C = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha^2 \\ -1 & -\alpha \end{pmatrix}$, де $\alpha \in \mathbb{R}$.

Отже,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha^2 \\ -1 & -\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Але ця сукупність матриць подібна до такої:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(достатньо розглянути перетворення $\widetilde{X} = VXV^{-1}$, де $V = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$).

Отже, маємо єдину (з точністю до еквівалентності) реалізацію супералгебри $Osp(2, 1)$ у класі вказаних операторів

$$T = \partial_t, \quad D = 2t\partial_t + x\partial_x, \quad S = t^2\partial_t + tx\partial_x,$$
$$P = \begin{pmatrix} 0 & x\partial_t \\ -\frac{1}{x} & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & -tx\partial_t - x^2\partial_x \\ \frac{t}{x} & 0 \end{pmatrix}.$$

[1] Lie S., Engel F. Theorie der Transformations Gruppen. – Leipzig: Teubner, 1888, 1890, 1893. – Bd. 1–3.

[2] Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H. Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. I. General method and the Poincaré group // J. Math. Phys. – 1975. – **16**. – P. 1597–1624.

[3] Березин Ф.А. Введение в алгебру и анализ с антикомутирующими переменными. – Москва: Изд-во МГУ, 1983. – 208 с.

[4] Фущищ В.И., Баранник Л.Ф., Баранник А.Ф. Подгруповой анализ групп Галилея, Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений. – Киев: Наукова думка, 1991. – 304 с.

[5] Жданов Р.З., Лагно В.И. О новых реализациях групп Пуанкаре $P(1, 2)$ и $P(2, 2)$ // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 4. – С. 447–462.