

Динамика резервуара в форме тела вращения, частично заполненного жидкостью, при сложном импульсном нагружении *

*А. В. Константинов¹, О. С. Лимарченко²,
К. В. Кинебас², О. Ю. Паранькина²*

¹ *Институт математики НАН Украины, Киев; akonst.im@mail.ru,*

² *Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко,
Киев; olelim2010@yahoo.com*

The problem of translational motion of the mechanical system “reservoir of revolution – liquid with a free surface“ under rectangular impulse of force applied to reservoir wall is under investigation. We compare reservoir motion under impulse loading in the case of considering and neglecting of liquid mobility effect. Differences in system motion caused by wavy motion of liquid were shown, which mainly result in manifestation of undesired oscillations of the reservoir. We consider variant of elimination of these phenomenon by means of insertion of additional control into the system, namely, compensation of main vector of forces of liquid pressure on reservoir walls. Efficiency of these technique is shown by the examples.

Розглянуто задачу поступального руху механічної системи “резервуар у формі тіла обертання – рідина з вільною поверхнею“ під дією прямокутного імпульсу сили, який прикладається до стінки резервуару. Проведено порівняння руху резервуара під дією імпульсу для випадків врахування і неврахування впливу рідини на резервуар. Показано, які відмінності в рух системи вносить хвильовий рух рідини, що в більшості випадків призводить до виникнення небажаних коливань резервуара. Розглянуто варіант запобігання цього явища шляхом внесення в систему додаткового керування, а саме, компенсації головного вектора сил тиску рідини на стінки бака. Ефективність запропонованого прийому показано на прикладах.

*Работа выполнена при частичной поддержке НИР № 0112U001015

© Константинов А. В., Лимарченко О. С., Кинебас К. В., Паранькина О. Ю., 2016

1 Введение

Инженерные конструкции, содержащие в своем составе резервуары, частично заполненные жидкостью, широко используются в различных областях техники. Баки с жидкостью являются неотъемлемой составной частью космических аппаратов с жидкостным ракетным двигателем, самолетов, вертолетов, судов и других транспортных средств. Во всех перечисленных случаях представляет практический интерес поведение таких конструкций в условиях действия импульсных, управляющих, вибрационных и других типов нагрузок. При этом, как показывает практика, колебания свободной поверхности жидкости могут сильно исказить программную траекторию движения несущего тела, не позволяя достигнуть желаемой цели управления. В этой связи актуальным является рассмотрение возможности снижения вклада колебаний свободной поверхности жидкости на движение несущего тела во время управляемого движения на основе нелинейной многомодовой модели [1], описывающей совместное движение резервуара и жидкости под действием активных внешних сил или моментов. При этом модель [1] позволяет задать практически любую форму стенки резервуара. В [1–3] исследовалось совместное движение резервуара и частично заполняющей его жидкости для целого класса канонических форм резервуаров (цилиндра, конуса, сферы и т. д.). Отметим, что модели системы “резервуар в форме тела вращения – жидкость со свободной поверхностью” для случая заданного движения резервуара также предложены в работах И. А. Луковского [4–6].

Рассматривается динамика резервуара в форме тела вращения, частично заполненного жидкостью, которое движется поступательно в горизонтальной плоскости. Необходимо внести в систему такое управляющее воздействие, чтобы резервуар с жидкостью совершал движение максимально близкое к случаю отсутствия влияния жидкости на движение несущего тела. В случае прямоугольного импульса силы резервуар с “затвердевшей” жидкостью, получив во время действия импульса ускорение, набирает определенную скорость и с этой скоростью совершает равномерное прямолинейное движение. Изучению динамики системы “резервуар – жидкость со свободной поверхностью” при сложном импульсном возбуждении посвящены работа О. С. Лимарченко [1], в которой рассматривалось поступательное движение резервуара и колебания резервуара на маятниковом под-

весе, когда к стенкам резервуара прикладывался набор тестовых импульсов. В обоих случаях минимальные значения возмущения свободной поверхности жидкости и главного вектора сил давления жидкости на стенки резервуара наблюдались под действием прямоугольного импульса, что предопределяет практическое значение такой формы импульса.

В случае “затвердевшей” жидкости под действием прямоугольного импульса система движется точно по программной траектории, а наличие свободной поверхности жидкости вносит искажения в эту программную траекторию. Компенсировать эти искажения предполагается за счет внесения в систему дополнительной управляющей силы, равной по модулю главному вектору сил давления, действующих со стороны жидкости на стенку резервуара, и противоположной по направлению.

2 Объект исследования и математическая модель

Рассмотрим резервуар в форме тела вращения (цилиндра или гиперболоида), частично заполненный жидкостью. Резервуар полагается абсолютно твердым телом, которое движется поступательно; жидкость считаем идеальной, несжимаемой, однородной, а ее начальное движение безвихревым.

Следуя методике работы [1], математическая модель системы “резервуар – жидкость со свободной поверхностью” строится на основе вариационного принципа Гамильтона-Остроградского

$$\delta I = 0, \quad \text{где } I = \int_{t_1}^{t_2} L dt,$$

при этом функция Лагранжа задается в классической форме Гамильтона-Остроградского как разность между кинетической и потенциальной энергией

$$L = \frac{1}{2} \rho \int_{\tau} (\vec{\nabla} \varphi + \dot{\vec{\varepsilon}})^2 d\tau + \frac{1}{2} M_T (\dot{\vec{\varepsilon}})^2 - (M_T + M_F) g \varepsilon_z - \\ - \frac{1}{2} \rho g \int_S (\xi^2 - H^2) dS + \vec{F} \cdot \vec{\varepsilon},$$

где ρ – плотность жидкости; τ – область, занимаемая жидкостью; S – невозмущенная свободная поверхности жидкости; H – глубина жидкости в резервуаре; $d\tau = r dr d\theta dz$ – цилиндрические координаты, причем ось Oz направлена противоположно вектору \vec{g} ускорения свободного падения, а система координат неподвижно связана с резервуаром; $\vec{\nabla} = i_1 \frac{\partial}{\partial r} + i_2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + i_3 \frac{\partial}{\partial z}$; φ – потенциал скоростей жидкости; ξ – возмущение свободной поверхности жидкости по отношению к невозмущенной свободной поверхности жидкости; M_T – масса резервуара; M_F – масса жидкости; $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$ – вектор перемещения резервуара; \vec{F} – главный вектор внешних сил, действующих на резервуар.

Основная идея решения задачи в вариационной постановке заключается в сведении описания задачи к минимальному числу независимых переменных, описывающих движение резервуара с жидкостью, т. е. фактически требуется построить разложения искомым переменных, удовлетворяющие всем кинематическим граничным условиям. Так как безвихревое движение идеальной однородной несжимаемой жидкости полностью определяется движением ее границ, возмущения свободной поверхности жидкости ξ и радиус-вектор перемещения резервуара $\varepsilon(t)$ полностью характеризуют движение объема жидкости и поэтому потенциал скоростей жидкости следует считать зависимой переменной.

Нелинейная краевая задача динамики ограниченного объема жидкости со свободной поверхностью в отличие от цилиндрического случая содержит сложности при решении, связанные с тем, что область определения формы возмущенной поверхности изменяется во времени и не совпадает с невозмущенной свободной поверхностью. Поэтому для описания движения жидкости и по аналогии с работами [1, 2] вводится недекартова параметризация области, занимаемой жидкостью τ , т. е.

$$\alpha = \frac{r}{f(z)}, \quad \beta = \frac{z}{H}. \quad (1)$$

Здесь $r = f(z)$ – уравнение образующей полости, заданное в цилиндрической системе координат, а $z = 0$ совпадает с невозмущенной свободной поверхностью жидкости S . В параметрах α, θ, β , которые вводятся вместо цилиндрической системы координат, область, занимаемая жидкостью, принимает цилиндрическую форму $\alpha \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi]$, а в невозмущенном состоянии $\beta \in [-1, 0]$. Поэтому уравнение свободной поверхности жидкости в возмущенном состоянии можно

представить в виде, разрешенном относительно β , т. е. $\beta = \frac{1}{H}\xi(\alpha, \theta, t)$.

Следуя методике работ [1, 2], разложения искомым переменных представим в виде

$$\xi = \bar{\xi}(t) + \sum_i a_i \bar{\psi}_i(\alpha) T_i(\theta); \quad \varphi = \dot{\bar{\epsilon}} \cdot \vec{r} + \sum_i b_i \psi_i(\alpha, \beta) T_i(\theta), \quad (2)$$

причем

$$\bar{\psi}_i = \frac{\partial \psi_i}{\partial z} = \frac{1}{H} \frac{\partial \psi_i}{\partial \beta} - \frac{\alpha f'}{f} \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha} \quad \text{при } \beta = 0.$$

Условие разрешимости исходной задачи Неймана для потенциала скоростей φ заключается в выполнении граничных условий непротекания: через боковые стенки Σ_0 в невозмущенном состоянии; через возмущенную свободную поверхность S и через продолжение боковой поверхности $\Delta\Sigma$, до которого может достигать жидкость на гребнях волн,

$$\int_{\Sigma_0} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Sigma + \int_{\Delta\Sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Sigma + \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = 0. \quad (3)$$

Выполнение этих кинематических по своей природе условий разрешимости (3) следует производить независимо для каждой поверхности и с высокой точностью. Если граничные условия на стенах в невозмущенном состоянии удовлетворяются на основе решения линейной задачи, то для выполнения условий на свободной поверхности необходимо удовлетворять нелинейным соотношениям

$$\Delta V = \int_{\tau} d\tau - \int_{\tau_0} d\tau = H \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\xi/H} [f(H\beta)]^2 \alpha d\alpha d\beta d\theta = 0,$$

– для определения величины $\bar{\xi}$ и

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{1}{f^2} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \frac{1}{\alpha^2 f^2} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{\alpha f'}{f} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad \text{при } \beta = \frac{1}{H}\xi(\alpha, \theta, t)$$

для уточненного выполнения граничного условия на свободной поверхности жидкости и исключения нелинейной зависимости между потенциалом скоростей и возмущениями свободной поверхности жидкости. Для удовлетворения граничному условию на продолжении боковой границы $\Delta\Sigma$ применяется метод вспомогательной области [2],

который позволил построить координатные функции для большинства практически важных резервуаров (цилиндр, усеченный конус, гиперboloид, параболоид, эллипсоид) с точностью до 10^{-5} на поверхности Σ_0 и с точностью 10^{-3} на продолжении боковой границы $\Delta\Sigma$. Условия на свободной поверхности удовлетворялись с точностью до кубических членов.

На основе разработанного метода, базирующегося на идеях аналитической механики, вариационных методов математической физики и асимптотических методов нелинейной механики, построена [1–3] математическая модель механической системы "резервуар нецилиндрической формы – жидкость со свободной поверхностью" минимальной размерности, позволяющая исследовать поступательные движения механической системы при различных видах кинематического возмущения и динамического возбуждения. Эта модель представляет собой систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно независимых параметров a_i – коэффициентов разложения в ряд возмущений свободной поверхности жидкости ξ по формам колебаний свободной поверхности ψ_i и ε_i – компонент вектора перемещений центра невозмущенной свободной поверхности жидкости относительно некоторой неподвижной системы отсчета

$$\begin{aligned}
& \sum_i \ddot{a}_i \left\{ V_{ri}^1 + \sum_j a_j V_{rij}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j V_{rijk}^3 \right\} + \quad (4) \\
& + \ddot{\varepsilon} \cdot \left\{ \vec{U}_r^1 + \sum_i a_i \vec{U}_{ri}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \vec{U}_{rij}^3 + \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k \vec{U}_{rijk}^4 \right\} = \\
& = \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j V_{ijr}^{2*} + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k V_{ijk r}^{3*} - g \left\{ \sum_i a_i W_{ir}^2 + \right. \\
& \quad \left. + \frac{3}{2} \sum_{i,j} a_i a_j W_{ijr}^3 + \sum_{i,j,k} W_{ijk r}^4 \right\}, \\
& \frac{\rho}{M_T + M_F} \left\{ \sum_i \ddot{a}_i \left[\vec{U}_i^1 + \sum_{i,j} a_j \vec{U}_{i,j}^2 + \sum_{i,j,k} a_j a_k \vec{U}_{ijk}^3 \right] \right\} + \ddot{\varepsilon} = \quad (5) \\
& = \frac{\vec{F}}{M_T + M_F} - g\vec{k} - \frac{\rho}{M_T + M_F} \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j \left\{ \vec{U}_{ij}^2 + 2 \sum_k \dot{a}_k \vec{U}_{ijk}^3 \right\}.
\end{aligned}$$

Система (4) – (5) включает в себя $N + 3$ уравнений (N – число рассматриваемых форм колебаний жидкости) и описывает динамику совместного движения резервуара и жидкости при различных видах кинематического возмущения и динамического возбуждения. Уравнения (4) описывают динамику амплитуд a_i форм колебаний свободной поверхности жидкости, а уравнения (5) – динамику поступательного движения резервуара ε_i , однако эти уравнения взаимозависимы и включают силы взаимодействия между компонентами механической системы.

Совокупность коэффициентов, входящих в уравнения (4) – (5), определяет свойства рассматриваемой механической системы и особенности проявления в ней внутренних линейных и нелинейных связей. Эти коэффициенты определяются через квадратуры от решения краевой задачи по определению форм колебаний свободной поверхности жидкости для произвольного числа форм колебаний жидкости [3].

Поскольку уравнение (5) является законом Ньютона для квазитвердого поступательного движения резервуара под действием внешних сил, можно в аналитической форме получить формулу для вычисления главного вектора сил давления жидкости на стенку резервуара

$$\vec{P} = -\rho \sum_i \ddot{a}_i \left[\vec{U}_i^1 + \sum_{i,j} a_j \vec{U}_{i,j}^2 + \sum_{i,j,k} a_j a_k \vec{U}_{ijk}^3 \right] - \\ - \rho \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j \left[\vec{U}_{ij}^2 + 2 \sum_k \dot{a}_k \vec{U}_{ijk}^3 \right].$$

3 Результаты вычислительных экспериментов

Рассмотрим круговой цилиндрический резервуар с вертикальной продольной осью, совершающий поступательные движения в плоскости xOy . Резервуар радиусом $R = 1$ м частично заполнен водой массой M_F до глубины $H=R$, масса резервуара принята $M_T = 0,25M_F$. К стенке резервуара прикладывается прямоугольный импульс силы длительностью $0,2T$, где T – период колебаний первой антисимметричной формы a_1 . При этом амплитуда импульса подбирается такой, чтобы колебания свободной поверхности жидкости попадали в нелинейный диапазон изменения амплитуд волн, т. е. возмущения свободной поверхности на стенке резервуара достигали вели-

чин $(0, 2 \div 0, 25)R$. Рассматриваются три случая движения (в скобках указаны номера кривых на всех последующих рисунках): 1) система с жидкостью со свободной поверхностью без компенсации главного вектора сил давления жидкости на стенки резервуара (кривая 1); 2) система с жидкостью со свободной поверхностью с компенсацией главного вектора сил давления жидкости на стенки резервуара (кривая 2); 3) система с “затвердевшей жидкостью” (кривая 3). Как и

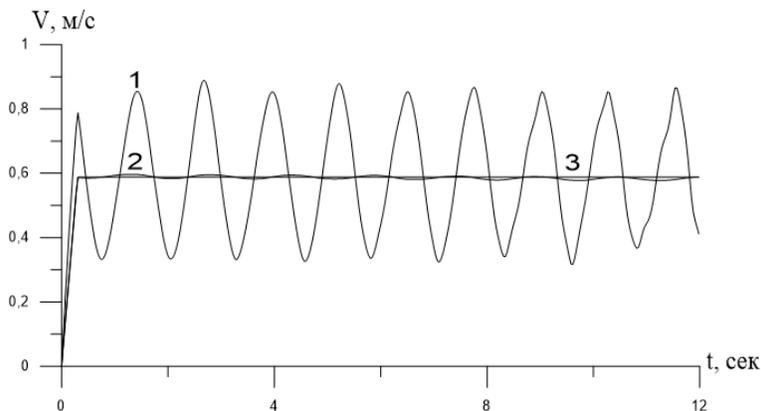


Рис 1. Изменение скорости движения цилиндрического резервуара во времени.

ожидалось (Рис. 1, кривая 3), в случае с “затвердевшей жидкости” система во время действия импульса набирает определенную скорость и после прекращения действия импульса движется с набранной скоростью равномерно и прямолинейно. Колебания свободной поверхности при отсутствии компенсации главного вектора сил давления жидкости на стенку резервуара приводят к тому, что в начальной фазе движения резервуар с жидкостью разгоняется быстрее, чем резервуар с “затвердевшей жидкостью” (Рис. 1, кривая 1). Это объясняется тем, что дополнительные степени свободы системы с жидкостью приводят к некоторому запаздыванию проявления инерционных свойств жидкой составляющей системы. Жидкость не сразу вовлекается в квазитвердую форму движения, а это происходит через возбуждение волновой формы движения. Условно можно считать, что в начальной фазе наличие жидкости “ускоряет” движение системы. Затем в силу теоремы о движении центра инерции системы жидкость тормозит

движение резервуара. Резервуар с жидкостью является более “податливой” системой, чем бак с “затвердевшей” жидкостью, т. е. для того, чтобы сообщить баку с жидкостью некоторое ускорение за достаточно малый промежуток времени, нужна сила меньше, чем в случае “затвердевшей” жидкости. Внесение в систему компенсации главного вектора сил давления жидкости на стенку резервуара (Рис. 1, кривая 2) приводит к тому, что за время действия импульса компенсации сил давления жидкости на стенки резервуара замедляет движение резервуара. Как видно из рисунка, при наличии компенсации скорость резервуара практически мало отличается от скорости резервуара с “затвердевшей” жидкостью. Имеют место незначительные гармонические колебания заданной скорости, связанные с тем, что главный вектор сил давления жидкости на стенку резервуара компенсируется с некоторым запаздыванием, поскольку компенсация выполняется согласно используемой модели [1] уже после действия сил давления жидкости на стенку резервуара (величины сил давления берутся с предыдущего шага интегрирования уравнений движения).

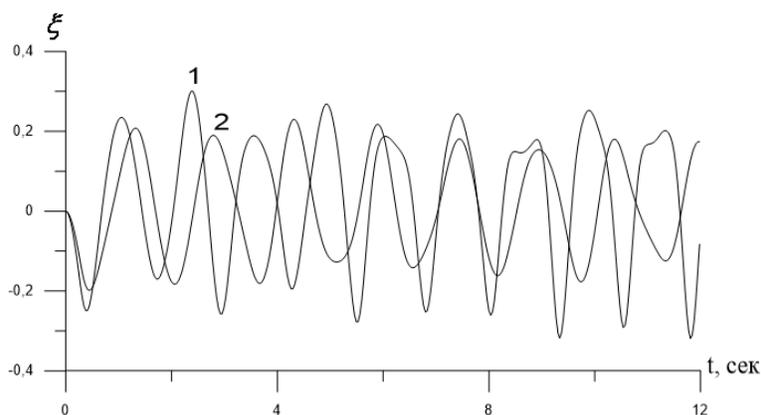


Рис 2. Изменение во времени амплитуд колебаний свободной поверхности жидкости на стенке цилиндрического резервуара.

При отсутствии компенсации главного вектора сил давления жидкости на стенку резервуара свободная поверхность жидкости совершает нелинейные колебания (Рис. 2, кривая 1), при этом существенно влияние высших форм колебаний. При наличии компенсации главного вектора сил давления жидкости на стенку резервуара (Рис. 2, кри-

вая 2) свободная поверхность совершает колебания, близкие к гармоническим, при этом период колебаний увеличивается тем больше, чем больше величина скорости, которую необходимо обеспечить резервуару.

Для случая резервуара в форме двуполостного гиперboloида вращения рассмотрена задача торможения движения резервуара прямоугольным импульсом силы. Длительность импульса как и ранее выбиралась как 20% периода колебаний жидкости по первой форме. Его амплитуда выбиралась из соображений попадания амплитуд волн в нелинейную область изменения возмущений (примерно на уровне 0,15–0,2 радиуса свободной поверхности). Первоначально резервуар двигался со скоростью 1 м/с, волновое движение жидкости отсутствовало. После приложения импульса силы исследовалось изменение во времени скорости движения резервуара и ее отклонение от постоянного значения на этапе движения системы по инерции, а также амплитуды возмущений жидкости на свободной поверхности у стенки резервуара. Эти результаты приведены для случая совместного движения системы тело–жидкость для случая действия только прямоугольного импульса силы (кривая 1) и действия импульса с компенсацией главного вектора сил давления жидкости на стенки резервуара (кривая 2).

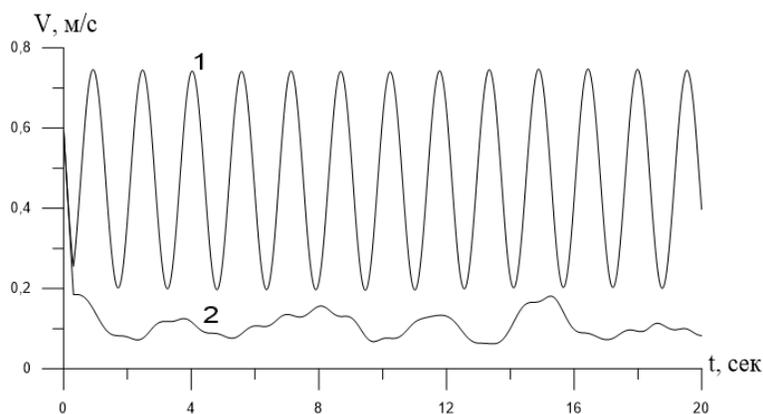


Рис 3. Изменение скорости движения резервуара в форме гиперboloида во времени.

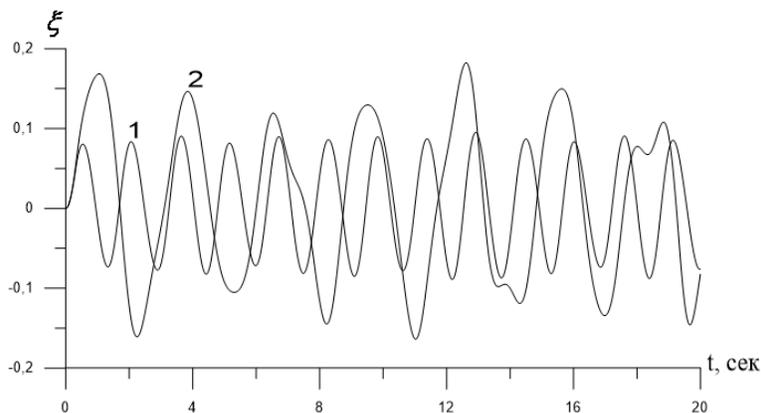


Рис 4. Изменение во времени амплитуд колебаний свободной поверхности жидкости на стенке резервуара в форме гиперboloида.

На Рис. 3 и 4 приведены изменения во времени скорости движения резервуара и возмущений свободной поверхности жидкости. Как видно из рисунков, торможение с компенсацией значительно более эффективно, чем без нее. Амплитуды колебаний скорости уменьшились примерно в 5 раз, кроме того, если без компенсации колебания скорости происходят примерно на уровне 0,4 м/с, то в случае с компенсацией – на уровне примерно 0,1 м/с при том же прямоугольном импульсе силы, осуществляющем торможение.

Анализ изменения волнообразования показывает, что в случае без компенсации колебания свободной поверхности ближе к гармоническим и меньше по амплитуде, чем в случае варианта торможения с компенсацией давления жидкости на стенки резервуара (обращаем внимание, что при разгоне резервуара имел место противоположный эффект). При этом заметно также, что в случае с компенсацией период колебаний жидкости также возрастает.

4 Выводы

В работе рассмотрена динамика совместного движения механической системы “резервуар в форме тела вращения – жидкость со свободной поверхностью” под действием прямоугольного импульса силы, приложенного к стенке резервуара в горизонтальном направлении. Под

действием такого импульса резервуар с "затвердевшей" жидкостью набирает скорость и двигается прямолинейно и равномерно. Показано, что колебания свободной поверхности жидкости обеспечивают более быстрый разгон резервуара (набор скорости), однако в дальнейшем система движется с переменным ускорением в зависимости от направления движения волн на поверхности жидкости. Компенсация главного вектора сил давления жидкости на стенку резервуара позволяет приблизить движения системы к идеальному случаю "затвердевшей жидкости", однако наличие запаздывания обуславливает появление флуктуаций значения скорости резервуара с большим периодом колебаний. Такое исследование стало возможно благодаря получению величины главного вектора сил давлений жидкости в аналитической форме для произвольных движений системы и произвольного числа форм колебаний жидкости, удерживаемых в модели.

- [1] Лимарченко О.С., Ясинский В.В. Нелинейная динамика конструкций с жидкостью. — Киев: НТТУ "КПИ" 1997. — 338 с.
- [2] Limarchenko O. S. Peculiarities of application of perturbation techniques in problems of nonlinear oscillations of liquid with a free surface in cavities of non-cylindrical shape // Ukr. math. journal. — 2007. — **59**, 1. — С. 44–70.
- [3] Limarchenko O. S., Semenova I. Yu. Nonlinear wave generation on a fluid in a moving parabolic tank // Int. Appl. Mech. — 2011. — **46**, 8. — P. 864–868.
- [4] Луковский И.А. Нелинейные колебания жидкости в сосудах сложной геометрической формы. — К.: Наукова думка, 1975. — 136 с.
- [5] Луковский И.А. Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость. — К.: Наукова думка, 1990. — 295 с.
- [6] Луковский И.А. Математические модели нелинейной динамики твердых тел с жидкостью. — К.: Наукова думка, 2010. — 408 с.