Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 197–200

УДК 517.95

Реалізації двох п'ятивимірних алгебр Лі

М.В. ЛУТФУЛЛІН, Л.О. МАТЯШ

Полтавський держ. пед. університет ім. В.Г. Короленка
E-mail: mwl@imath.kiev.ua, math@pdpu.poltava.ua

Побудовано нееквівалентні реалізації двох п'ятивимірних алгебр Лі в класі векторних полів з довільною скінченною кількістю змінних. Знайдено також відповідні групи автоморфізмів та множини мегаідеалів.

Inequivalent realizations of two five-dimensional Lie algebras are constructed. The corresponding groups of automorphisms and sets of megaideal are found.

Однією з важливих проблем сучасного групового аналізу диференціальних рівнянь є задача опису реалізацій алгебр Лі в певному класі векторних полів. Відомі реалізації більш широких класів алгебр Лі дозволяють ефективно розв'язувати задачі групової класифікації диференціальних рівнянь з частинними похідними, опису гравітаційних полів загального вигляду, інваріантних відносно групи рухів та групи конформних перетворень, інтегрування звичайних диференціальних рівнянь, опису систем звичайних диференціальних рівнянь, що допускають нелінійний принцип суперпозиції тощо (див., наприклад [1–8]).

Важливі та елегантні результати щодо класифікації реалізацій алгебр Лі отримано самим С. Лі. Він прокласифікував невироджені реалізації алгебр у класі векторних полів в просторі однієї дійсної змінної, однієї комплексної змінної та двох комплексних змінних [9, 10]. Використовуючи геометричні підходи, Лі також одержав реалізації у двох дійсних змінних [11, Vol. 3] (сучасний виклад цих результатів див. в [12]). У цій же роботі С. Лі вказує метод повної класифікації всіх алгебр Лі векторних полів у трьох комплексних змінних, проте не наводить відповідних результатів.

Реалізаціям різних частинних класів алгебр Лі присвячено багато робіт. Наприклад, нещодавно побудовано повний опис реалізацій всіх алгебр Лі розмірності $n < 5$ в просторах довільної скінченної кількості змінних [14]. Запропонований в [14] метод, що спирається на поняття мегаідеала, можна застосувати для класифікації реалізацій алгебр Лі більш високих розмірностей. Нами побудовано нееквівалентні реалізації для ряду п'ятивимірних алгебр Лі. Оскільки мегаідеал – це ідеал алгебри Лі, інваріантний відносно довільних її автоморфізмів, то як додатковий результат знайдено відповідні групи автоморфізмів. Як і в [15], використано канонічні комутаційні співвідношення алгебр Лі з класифікації Мубаракзянова [13].

У цій роботі наведено повні переліки нееквівалентних реалізацій для двох п'ятивимірних алгебр Лі. Для кожної розглянутої алгебри A подано ненульові комутаційні співвідношення, загальний вигляд матриць, що визначають повну групу автоморфізмів $\mathrm{Aut}(A)$ та групу внутрішніх автоморфізмів $\mathrm{Int}(A)$, множину M_0 власних мегаідеалів (окрім $\{0\}$ та самої алгебри A) і перелік нееквівалентних реалізацій в класі векторних полів з довільною скінченною кількістю змінних.

Нижче використано такі позначення: e_i – базисні елементи алгебри Лі; θ_i, α_{ij} – довільні дійсні параметри; що задовольняють умови, за яких відповідні матриці невироджені; $i, j = 1, 2, \ldots, 5$; $\partial_k = \partial/\partial_{x_k}$; c – довільна стала.

$\boldsymbol{A_{5.27}}$: $[e_2, e_3] = e_1$, $[e_1, e_5] = e_1$, $[e_3, e_5] = e_3 + e_4$, $[e_4, e_5] = e_1 + e_4$;

$$\mathrm{Int}\colon \begin{pmatrix} e^{\theta_5} & -\theta_3 & e^{\theta_5}\theta_2 & \theta_5 e^{\theta_5} & \theta_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\theta_5} & 0 & \theta_3 \\ 0 & 0 & \theta_5 e^{\theta_5} & e^{\theta_5} & \theta_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{Aut}\colon \begin{pmatrix} \alpha_{33} & -\alpha_{35} & \alpha_{13} & -\alpha_{33}\alpha_{25} + \alpha_{43} & \alpha_{15} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha_{25} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 & \alpha_{35} \\ 0 & 0 & \alpha_{43} & \alpha_{33} & \alpha_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

M_0: $\langle e_1\rangle$, $\langle e_1, e_2\rangle$, $\langle e_1, e_4\rangle$, $\langle e_1, e_2, e_3, e_4\rangle$;

Реалізації:

1) ∂_1, ∂_3, $x_3\partial_1 + \partial_4$, ∂_2, $(x_1 + x_2)\partial_1 + (x_2 + x_4)\partial_2 + x_4\partial_4 + \partial_5$;

2) ∂_1, ∂_3, $x_3\partial_1 + \partial_4$, ∂_2, $(x_1 + x_2)\partial_1 + (x_2 + x_4)\partial_2 + x_4\partial_4$;

3) ∂_1, ∂_3, $x_3\partial_1 + x_4\partial_2 + x_5\partial_3$, ∂_2, $(x_1 + x_2)\partial_1 + x_2\partial_2 + x_4\partial_3 - \partial_4 - x_5\partial_5$;

4) ∂_1, ∂_3, $x_3\partial_1+\ln(cx_4)\partial_2+x_4\partial_3$, ∂_2, $(x_1+x_2)\partial_1+x_2\partial_2+\ln(cx_4)\partial_3-x_4\partial_4$;

5) ∂_1, ∂_3, $x_3\partial_1+x_4\partial_2$, ∂_2, $(x_1+x_2)\partial_1+x_2\partial_2+x_4)\partial_3-\partial_4$;

6) ∂_1, ∂_3, $x_3\partial_1+\partial_4$, $x_2\partial_1$, $(x_1+x_2x_4)\partial_1-\partial_2+x_4\partial_4$;

7) ∂_1, ∂_3, $x_3\partial_1+x_4\partial_3$, $x_2\partial_1$, $x_1\partial_1-\partial_2-x_2\partial_3-x_4\partial_4$;

8) ∂_1, ∂_3, $x_3\partial_1+ce^{x_2}\partial_3$, $x_2\partial_1$, $x_1\partial_1-\partial_2-x_2\partial_3$.

$\boldsymbol{A_{5.29}}$: $[e_2,e_3]=e_1$, $[e_1,e_5]=e_1$, $[e_2,e_5]=e_2$, $[e_3,e_5]=e_4$;

$$\mathrm{Int}\colon \begin{pmatrix} e^{\theta_5} & -\theta_3 e^{\theta_5} & \theta_2 & 0 & \theta_1 \\ 0 & e^{\theta_5} & 0 & 0 & \theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_5 & 1 & \theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{Aut}\colon \begin{pmatrix} \alpha_{22}\alpha_{33} & \alpha_{12} & \alpha_{33}\alpha_{25} & 0 & \alpha_{15} \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 & \alpha_{25} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{43} & \alpha_{33} & \alpha_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

M_0: $\langle e_1\rangle, \langle e_4\rangle$, $\langle e_1,e_2\rangle$, $\langle e_1,e_4\rangle$, $\langle e_1,e_2,e_3,e_4\rangle$;

Реалізації:

1) ∂_1, ∂_3, $x_3\partial_1+\partial_4$, ∂_2, $x_1\partial_1+x_4\partial_2+x_3\partial_3+\partial_5$;

2) ∂_1, ∂_3, $x_3\partial_1+\partial_4$, ∂_2, $x_1\partial_1+x_4\partial_2+x_3\partial_3+x_5\partial_4$;

3) ∂_1, ∂_3, $x_3\partial_1+\partial_4$, ∂_2, $x_1\partial_1+x_4\partial_2+x_3\partial_3+c\partial_4$;

4) ∂_1, ∂_3, $x_3\partial_1+x_4\partial_2+x_5\partial_3$, ∂_2, $x_1\partial_1+x_3\partial_3-\partial_4+x_5\partial_5$

5) ∂_1, ∂_3, $x_3\partial_1+\ln(cx_4)\partial_2+x_4\partial_3$, ∂_2, $x_1\partial_1+x_3\partial_3+x_4\partial_4$;

6) ∂_1, ∂_3, $x_3\partial_1+x_4\partial_2$, ∂_2, $x_1\partial_1+x_3\partial_3-\partial_4$;

7) ∂_1, ∂_3, $x_3\partial_1+\partial_4$, $x_2\partial_1$, $x_1\partial_1+x_2\partial_2+x_3\partial_3$;

8) ∂_1, ∂_3, $x_3\partial_1+x_4\partial_3$, $x_2\partial_1$, $x_1\partial_1+x_2\partial_2+(x_3-x_2)\partial_3+x_4\partial_4$;

9) ∂_1, ∂_3, $x_3\partial_1+cx_2\partial_3$, $x_2\partial_1$, $x_1\partial_1+x_2\partial_2+(x_3-x_2)\partial_3$.

Відзначимо, що наведені результати є відносно компактними. Побудова реалізацій для інших п'ятивимірних алгебр Лі, яких загалом більше 60, хоча і не викликає принципових труднощів, але пов'язана із громіздкими обчисленнями. У зв'язку з цим доцільно розробити алгоритм їх знаходження, який можна повністю реалізувати в системах символьних обчислень.

Автори висловлюють щиру вдячність Р.О. Поповичу за увагу до роботи.

[1] Basarab-Horwath P., Lahno V., Zhdanov R. The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equations // Acta Appl. Math. – 2001. – **69**. – P. 43–94.

[2] Zhdanov R.Z., Lahno V.I. Group classification of heat conductivity equations with a nonlinear source // J. Phys. A: Math. Gen. – 1999. – **32**. – P. 7405–7418.

[3] Крючкович Г.И. Класификация трехмерных римановых пространств по группам движений // Усп. мат. наук. – 1954. – **9**, № 1 (59). – С. 3–40.

[4] Петров А.З. Новые методы в общей теории относительности. – Москва: Наука, 1966. – 495 с.

[5] Mahomed F.M., Leach P.G.L. Symmetry Lie algebras on nth order ordinary differential equations // J. Math. Anal. Appl. – 1990. – **151**. – P. 80–107.

[6] Schmucker A., Czichowski G. Symmetric algebras and normal forms of third order ordinary differential equations // J. Lie Theory. – 1998. – **8**. – P. 129–137.

[7] Bountis T.C., Papageorgiou V., Winternitz P. On the integrability of systems of nonlinear ordinary differential equations with superposition principles // J. Math. Phys. – 1986. – **27**. – P. 1215–1224.

[8] Carinena J.F., Grabowski J., Ramos A. Reduction of time-dependent systems admitting a superposition principle // Acta Appl. Math. – 2001. – **66**. – P. 67–87.

[9] Lie S. Gruppenregister, Gesammetle Abhandlungen, Vol. 5. – Leipzig: B.G. Teubner, 1924. – S. 767–773.

[10] Lie S. Theorie der Transformationsgruppen // Math. Ann. – 1880. – **16**. – P. 441–528; див. також Gesammetle Abhandlungen, Vol. 6. – Leipzig: B.G. Teubner, 1927. – S. 1–94.

[11] Lie S. Theorie der Transformationsgruppen, Vol. 1–3. – Leipzig: B.G. Teubner, 1888, 1890, 1893.

[12] González-López A., Kamran N., Olver P.J. Lie algebras of vector fields in the real plane // Proc. London Math. Soc. (3). – 1992. – **64**. – P. 339–368.

[13] Мубаракзянов Г.М. Классификация вещественных структур алгебр Ли пятого порядка // Изв. высш. учебн. завед. Математика. – 1963. – № 3 (34). – С. 99–106.

[14] Popovych R., Boyko V., Nesterenko M., Lutfullin M. Realizations of real low-dimensional Lie algebras // J. Phys. A: Math. Gen. – 2003. – **36**. – P. 7337–7360 (see math-ph/0301029).

[15] Олексійчук Ю.Ф., Лутфуллін М.В. Про реалізації одного класу п'ятивимірних алгебр Лі / Матеріали звітної наукової конференції викладачів, аспірантів, магістрантів і студентів фіз.-мат. ф-ту // Наукові записки. – Полтава: ПДПУ, 2005. – С. 52–56.