Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 201–210

УДК 517.9

Симетрійна класифікація одного класу хвильових рівнянь

О.В. МАГДА

Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: magda@imath.kiev.ua

Здійснено повну групову класифікацію квазілінійних рівнянь гіперболічного типу з довільним елементом, що залежить від трьох змінних.

Complete group classification of quasi-linear hyperbolic-type differential equations with arbitrary element dependent on three variables is presented.

1. Вступ. Диференціальні рівняння з частинними похідними гіперболічного типу займають важливе місце серед фундаментальних рівнянь математичної фізики. До них, зокрема, приводять задачі (наближеного) опису процесів коливань різноманітної природи в термінах диференціальних рівнянь. При цьому, як правило, обмежуються першим наближенням, одержуючи лінійні рівняння. Основна перевага такого підходу полягає у тому, що лінійні диференціальні рівняння задовольняють принцип лінійної суперпозиції. Цей принцип обумовлює ефективність застосування існуючого на даний час математичного апарату для аналізу та розв'язування таких рівнянь.

В ряді випадків опис процесів коливань в термінах лінійних рівнянь є незадовільним, оскільки відповідна математична модель не "відчуває" більш тонких нелінійних ефектів, притаманних досліджуваному процесові. Класичним прикладом є солітонні рівняння, що описують суттєво нелінійний ефект фазового зсуву взаємодіючих солітонних розв'язків. Розв'язки лінеаризованих солітонних рівнянь очевидно не мають такої властивості. Отже, наступному (більш точному) наближенню реального процесу відповідає нелінійна математична задача, для розв'язування і дослідження якої є досить обмежений математичний апарат. Більше цього, якщо досліджуються диференціальні рівняння з довільними функціями, то взагалі не існує загальних методів для їх точного інтегрування.

Ця ситуація суттєво змінюється, якщо відповідні нелінійні диференціальні рівняння мають нетривіальні симетрійні властивості.

Дійсно, за цієї умови для їх аналізу можна застосувати потужні методи теорії груп та алгебр Лі (див., наприклад, [1–4]). У зв'язку із цим актуальною є задача виокремлення із заданого класу нелінійних рівнянь тих, які допускають нетривіальні групи симетрії. Відзначимо, що задача класифікації рівнянь за їх групами симетрії є центральною проблемою класичного групового аналізу диференціальних рівнянь [1]. Відповідна процедура називається груповою класифікацією диференціальних рівнянь. Групова класифікація дозволяє окреслити коло задач, до яких можна застосовувати потужні теоретико-групові методи. Одним із результатів такої класифікації є можливість побудови точних розв'язків складних нелінійних рівнянь.

Дана стаття присвячена груповій класифікації квазілінійних диференціальних рівнянь гіперболічного типу

$$u_{tx} = f(t, x, u), \quad f_{uu} \neq 0. \tag{1}$$

Тут і далі, $u = u(t, x)$. Проблему групової класифікації лінійних рівнянь другого порядку з двома незалежними змінними вивчав ще С. Лі. Він, зокрема, довів теорему, яка стверджує, що лінійне диференціальне рівняння другого порядку з двома незалежними змінними допускає не більш ніж трипараметричну групу нетривіальних перетворень [5]. Повний розв'язок задачі групової класифікації лінійних рівнянь вигляду (1) було одержано Л.В. Овсянніковим [6] (див., також, [1]). Також відзначимо роботу [7], де було проведено групову класифікацію лінійних хвильових рівнянь

$$u_{tt} = f^2(x)u_{xx}.$$

Також слід відзначити роботи, де одержано (повний або частковий) розв'язок задачі групової класифікації таких одновимірних нелінійних хвильових рівнянь:

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} = u_{xx} + F(t, x, u), && [3, 9],\\
&u_{tt} = -\lambda u_{xx} + F(u, u_x), && [10],\\
&u_{tt} = [f(u)u_x]_x, && [11, 12],\\
&u_{tt} = f(u_x)u_{xx}, && [13],\\
&u_{tt} = [f(x, u)u_x]_x, && [14],\\
&u_{tt} = [f(u)u_x + g(x, u)]_x, && [15],
\end{aligned}
$$

$$u_{tt} = f(x, u_x)u_{xx} + g(x, u_x)_x, \qquad [16].$$

2. Метод класифікації та деякі попередні результати. До класу рівнянь (1) був застосований метод групової класифікації, алгоритм якого розроблений в [17]. Оскільки виконання першого кроку алгоритму методу групової класифікації для рівняння (1) вимагає хоча й громіздких, але стандартних обчислень, ми тут на них не зупиняємося, а відразу наводимо отримані результати.

Твердження 1. *Група інваріантності рівняння* (1) *генерується інфінітезимальним оператором*

$$Q = \tau(t)\partial_t + \xi(x)\partial_x + (ku + r(t, x))\partial_u, \tag{2}$$

де стала k та функції τ, ξ, r, f задовольняють рівність

$$r_{tx} + [k - \tau' - \xi']f = \tau f_t + \xi f_x + [ku + r]f_u. \tag{3}$$

Твердження 2. *Групу еквівалентності $\mathcal{E}$ рівняння* (1) *складають перетворення*

$$\begin{aligned} &1)\ \ \bar{t} = T(t), \quad \bar{x} = X(x), \quad v = mu + Y(t, x), \\ &2)\ \ \bar{t} = T(x), \quad \bar{x} = X(t), \quad v = mu + Y(t, x), \quad T'X'm \neq 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Із рівності (3) випливає, що у випадку довільного значення f $\tau = \xi = k = r = 0$, тобто оператор Q (2) є нульовим. Тому, перш за все, проводимо класифікацію рівнянь вигляду (1), які допускають однопараметричні групи перетворень.

Лема. *З точністю до перетворень з групи $\mathcal{E}$* (4)*, існує тільки три нееквівалентних оператора* (2)*, які можуть бути вибрані у вигляді:*

$$\begin{aligned} &Q = \partial_t + \partial_x + \epsilon u\partial_u \quad (\epsilon = 0, 1); \\ &Q = \partial_t + \epsilon u\partial_u \quad (\epsilon = 0, 1); \\ &Q = u\partial_u, \quad Q = g(t, x)\partial_u \quad (g \neq 0). \end{aligned}$$

Теорема 1. *З точністю до еквівалентності існують два нелінійні рівняння вигляду* (1)*, які інваріантні відносно однопараметричних груп локальних перетворень. Відповідні одновимірні алгебри Лі та значення функцій f у цих рівняннях такі:*

$$A_1^1 = \langle \partial_t + \partial_x + \epsilon u\partial_u \rangle \ \ (\epsilon = 0, 1): \quad f = e^{\epsilon t}\tilde{f}(\theta, \omega),$$

$$\theta = t - x, \quad \omega = e^{-\epsilon t}u, \quad \tilde{f}_{\omega\omega} \neq 0;$$

$$A_1^2 = \langle \partial_t + \epsilon u \partial_u \rangle \quad (\epsilon = 0, 1): \quad f = e^{\epsilon t}\tilde{f}(x, \omega),$$

$$\omega = e^{-\epsilon t}u, \quad \tilde{f}_{\omega\omega} \neq 0.$$

Для доведення теореми достатньо відібрати ті із операторів, що наведені у формулюванні леми, які будуть складати базис одновимірної алгебри інваріантності нелінійного рівняння вигляду (1). Для цього потрібно для кожного з отриманих в лемі операторів розв'язати рівняння (3).

Використовуючи оператори A_1^1 та A_1^2 знаходимо відповідні нелінійні рівняння. Для двох останніх операторів безпосередні обрахунки показали, що вони можуть допускатися лише лінійними рівняннями вигляду (1). Також, безпосереднє використання стандартного алгоритму Лі–Овсяннікова показало, що алгебри A_1^1 та A_1^2, у випадку довільних значень функцій $\tilde{f}$ у відповідних рівняннях, є максимальними алгебрами інваріантності цих рівнянь.

3. Класифікація рівнянь (1), максимальні алгебри інваріантності яких мають розмірність вищу за одиницю. Опис нелінійних рівнянь, які допускають алгебри інваріантності розмірності вищої за 1, ми розпочинаємо з класифікації рівнянь, алгебри інваріантності яких є напівпростими алгебрами Лі, або містять такі алгебри як підалгебри. Виявляється, що в класі операторів (2) не існують реалізації алгебри $so(3)$, а реалізації алгебри $sl(2,\mathbb{R})$ з точністю до еквівалентності, яку визначають перетворення (4) з групи $\mathcal{E}$ рівняння (1), вичерпуються такими алгебрами Лі:

1) $\langle \partial_t, \frac{1}{2}e^{2t}\partial_t, -\frac{1}{2}e^{-2t}\partial_t \rangle$;
2) $\langle \partial_t, \frac{1}{2}e^{2t}(\partial_t + \partial_u), -\frac{1}{2}e^{-2t}(\partial_t - \partial_u) \rangle$;
3) $\langle \partial_t, \frac{1}{2}e^{2t}(\partial_t + x\partial_u), -\frac{1}{2}e^{-2t}(\partial_t - x\partial_u) \rangle$;
4) $\langle \partial_t + \partial_x, \frac{1}{2}e^{2t}\partial_t + \frac{1}{2}e^{2x}\partial_x, -\frac{1}{2}e^{-2t}\partial_t - \frac{1}{2}e^{-2x}\partial_x + {} + \epsilon[e^{-2x} - e^{-2t}]\partial_u \rangle, \quad \epsilon = 0, 1.$

Перш ніж переходити до опису $sl(2,\mathbb{R})$-інваріантних рівнянь вигляду (1), зупинимося на рівнянні Ліувілля

$$u_{tx} = \lambda e^u, \quad \lambda \neq 0. \tag{5}$$

Добре відомо, що максимальна група інваріантності цього рівняння є нескінченнопараметричною групою локальних перетворень, яка генерується оператором

$$Q = h(t)\partial_t + g(x)\partial_x - (h' + g')\partial_u,$$

де функції h та g є довільними гладкими функціями своїх аргументів. Це рівняння лінеаризується (але нелокальними замінами змінних) й інтегрується у загальному вигляді.

Повернемося до отриманих реалізацій алгебри $sl(2,\mathbb{R})$. Подальший їх розгляд як алгебр інваріантності нелінійних рівнянь вигляду (1) показав що, реалізації (1), (3), (4), де $\epsilon = 1$, не можуть бути алгебрами інваріантності нелінійних рівнянь вигляду (1). Реалізація (2) є алгеброю інваріантності рівняння

$$u_{tx} = \tilde{f}(x)e^{-2u}, \quad \tilde{f} \neq 0.$$

Але заміна змінних

$$\bar{t} = t, \quad \bar{x} = x, \quad u = -\tfrac{1}{2}(v - \ln|\tilde{f}|), \quad v = v(t,x)$$

показує, що воно є еквівалентним рівнянню (5).

Нарешті, скориставшись заміною змінних

$$\bar{t} = e^{-2t}, \quad \bar{x} = e^{-2x}, \quad v = u,$$

ми замість реалізації 4), де $\epsilon = 0$, розглянули реалізацію (в початкових позначеннях змінних)

$$\langle \partial_t + \partial_x, t\partial_t + x\partial_x, t^2\partial_t + x^2\partial_x \rangle$$

і отримали, що відповідне інваріантне рівняння має вигляд

$$u_{tx} = (t-x)^{-2}\tilde{f}(u), \quad \tilde{f}_{uu} \neq 0. \tag{6}$$

Якщо в (6) функція $\tilde{f}$ є довільною функцією змінної u, то відповідна реалізація є максимальною алгеброю інваріантності цього рівняння. Подальше використання методу Овсяннікова показало, що розширення симетрії рівняння (6) має місце лише тоді, коли $\tilde{f} = \lambda e^u + 2$. Але заміна змінних

$$\bar{t} = t, \quad \bar{x} = x, \quad u = v(t,x) + 2\ln|t-x|$$

зводить таке рівняння до рівняння Ліувілля.

Отже, з точністю до еквівалентності нелінійні рівняння (1), алгебри інваріантності яких є напівпростими алгебрами Лі або містять їх як підалгебри, вичерпуються рівняннями (5), (6).

Для повної групової класифікації рівняння (1) залишилося описати рівняння, алгебри інваріантності яких є розв'язними алгебрами Лі, розмірність яких вища за одиницю. З даною метою ми, перш за все, провели побудову тих реалізацій двовимірних алгебр Лі $A_{2.1}$, $A_{2.2}$, які можуть бути алгебрами інваріантності нелінійних рівнянь вигляду (1).

Виявилося, що в класі операторів (2) з точністю до еквівалентності існує одна реалізація алгебри $A_{2.1}$:

$$\langle \partial_t + \epsilon_1 u\partial_u, \partial_x + \epsilon_2 u\partial_u \rangle \quad (\epsilon_1 = 0, 1;\ \epsilon_2 = 0, 1),$$

яка задовольняє умовам сформульованої задачі. Відповідне інваріантне рівняння має вигляд

$$u_{tx} = \exp(\epsilon_1 t + \epsilon_2 x)\tilde{f}(\omega), \quad \omega = u\exp(-\epsilon_1 t - \epsilon_2 x). \tag{7}$$

Подальше дослідження рівняння (7) показало, що у випадку $\epsilon_1+\epsilon_2 \neq 0$ дана реалізація є максимальною алгеброю інваріантності рівняння (7). Якщо ж $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$, тобто рівняння має вигляд

$$u_{tx} = f(u), \tag{8}$$

то його максимальною алгеброю інваріантності є тривимірна алгебра Лі операторів симетрії

$$\langle \partial_t, \partial_x, t\partial_t - x\partial_x \rangle,$$

яка ізоморфна алгебрі $A_{3.6}$. Рівняння (8) допускає більш широку симетрію, коли воно є еквівалентним рівнянню Ліувілля (5) або рівнянню

$$u_{tx} = \lambda |u|^{n+1}, \quad \lambda \neq 0, \quad n \neq 0, -1. \tag{9}$$

Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (9) (воно ще відоме в літературі як нелінійне рівняння Даламбера) є чотиривимірна алгебра Лі

$$\langle t\partial_t - \tfrac{1}{n}u\partial_u, x\partial_x - \tfrac{1}{n}u\partial_u, \partial_t, \partial_x \rangle,$$

яка ізоморфна алгебрі Лі $A_{2.2} \oplus A_{2.2}$.

Подальший аналіз рівняння (7), в якому $\epsilon_1 + \epsilon_2 \neq 0$ показав таке.

Якщо $\epsilon_1 = 1$, $\epsilon_2 = 0$, то рівняння (7) допускає розширення симетрійних властивостей у таких двох випадках:

$$u_{tx} = \lambda e^{-mt}|u|^{m+1}, \quad \lambda \neq 0, \quad m \neq 0, -1; \tag{10}$$

$$u_{tx} = \lambda e^{t} \exp(ue^{-t}), \quad \lambda \neq 0. \tag{11}$$

Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (9) є чотиривимірна алгебра Лі

$$\langle \partial_t + u\partial_u, e^{mt}\partial_t, \partial_x, x\partial_x - \tfrac{1}{m}u\partial_u \rangle,$$

яка ізоморфна алгебрі Лі $A_{2.2} \oplus A_{2.2}$ і яке заміною змінних

$$\bar{t} = e^{-mt}, \quad \bar{x} = x, \quad u = v(\bar{t}, \bar{x})$$

зводить рівняння (10) до рівняння вигляду (9).

Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (11) є тривимірна алгебра Лі

$$\langle \partial_t + u\partial_u, \partial_x, x\partial_x - e^{t}\partial_u \rangle,$$

яка ізоморфна алгебрі $A_1 \oplus A_{2.2}$.

Опис $A_{2.2}$-інваріантних рівнянь привів до таких результатів. В класі операторів (2) існують шість нееквівалентних реалізацій алгебри $A_{2.2}$, які задовольняють умовам сформульованої задачі:

$$\begin{aligned}
&1)\ \langle -t\partial_t + x\partial_u, \partial_t \rangle;\\
&2)\ \langle -t\partial_t - x\partial_x, \partial_t + \partial_x \rangle;\\
&3)\ \langle -t\partial_t - x\partial_x + u\partial_u, \partial_t + \partial_x \rangle;\\
&4)\ \langle -t\partial_t + \partial_u, \partial_t \rangle;\\
&5)\ \langle -t\partial_t - x\partial_x - u\partial_u, \partial_t \rangle;\\
&6)\ \langle -t\partial_t - x\partial_x, \partial_t \rangle.
\end{aligned} \tag{12}$$

Інваріантне рівняння, відповідне реалізації 1) має вигляд

$$u_{tx} = \exp(x^{-1}u). \tag{13}$$

Його максимальною алгеброю інваріантності є тривимірна алгебра Лі

$$\langle -t\partial_t + x\partial_u, \partial_t, x\partial_x + u\partial_u \rangle,$$

яка ізоморфна алгебрі $A_{2.2} \oplus A_1$.

Прямою перевіркою неважко переконатися, що заміна змінних

$$\bar{t} = x, \quad \bar{x} = e^t, \quad u = v(\bar{t}, \bar{x})$$

зводить отримане вище рівняння (11) до рівняння (13).

Інваріантне відносно другої з переліку (12) реалізації рівняння має вигляд (6) і вже досліджене під час опису $sl(2,\mathbb{R})$-інваріантних рівнянь.

Реалізація 3) з переліку (11) є максимальною алгеброю інваріантності рівняння

$$u_{tx} = (t-x)^{-3}\tilde{f}(\omega), \quad \omega = (t-x)u. \tag{14}$$

Подальший аналіз рівняння (14) показав, що розширення його симетрії має місце, коли воно зводиться до вже отриманих вище рівнянь.

Інваріантне відносно реалізації 4) з переліку (12) рівняння зводиться до рівняння Ліувілля, а відносно реалізації 6) – до рівняння (8).

До нових результатів привів ще розгляд п'ятої реалізації (11). Відповідне інваріантне рівняння має вигляд

$$u_{tx} = x^{-1}\tilde{f}(\omega), \quad \omega = x^{-1}u,$$

і у випадку довільного значення функції $\tilde{f}$ задає базис його максимальної алгебри інваріантності. Подальша групова класифікація цього рівняння привела до такого, ще невідомого рівняння:

$$u_{tx} = \lambda|x|^{-m-2}|u|^{m+1}, \quad \lambda \neq 0, \quad m \neq 0, -1, -2,$$

максимальна алгебра інваріантності якого є тривимірною алгеброю Лі

$$\langle \partial_t, t\partial_t + x\partial_x + u\partial_u, x\partial_x + \tfrac{m+1}{m}u\partial_u \rangle,$$

яка ізоморфна алгебрі $A_{2.2} \oplus A_1$.

Отримані результати групової класифікації рівнянь вигляду (1), алгебри інваріантності яких мають розмірність вищу за одиницю, зведено в наступному твердженні.

Теорема 2. *Найширшу симетрію серед нелінійних рівнянь вигляду* (1) *має рівняння Ліувілля*

$$u_{tx} = \lambda e^u, \quad \lambda \neq 0,$$

максимальна група інваріантності якого є нескінченнопараметричною групою локальних перетворень. Ця група генерується інфінітезимальними операторами вигляду

$$Q = h(t)\partial_t + g(x)\partial_x - (h'(t) + g'(x))\partial_u,$$

де h та g – довільні гладкі функції своїх аргументів.

Також з точністю до еквівалентності існують ще дев'ять рівнянь вигляду (1), максимальні алгебри інваріантності яких мають розмірність вищу за одиницю. Вигляд функцій f у цих рівняннях, оператори симетрії та тип алгебри інваріантності наведено в таблиці.

№	Вигляд функції f	Оператори симетрії	Тип алгебри інваріантності
1	$f = e^t\tilde{f}(\omega)$, $\omega = ue^{-t}$, $\tilde{f}_{\omega\omega} \neq 0$	$\partial_t + u\partial_u$, ∂_x	$A_{2.1}$
2	$f = e^{t+x}\tilde{f}(\omega)$, $\omega = ue^{-t-x}$, $\tilde{f}_{\omega\omega} \neq 0$	$\partial_t + u\partial_u$, $\partial_x + u\partial_u$	$A_{2.1}$
3	$f = (t-x)^{-3}\tilde{f}(\omega)$, $\omega = (t-x)u$, $\tilde{f}_{\omega\omega} \neq 0$	$-t\partial_t - x\partial_x + u\partial_u$, $\partial_t + \partial_x$	$A_{2.2}$
4	$f = x^{-1}\tilde{f}(\omega)$, $\omega = x^{-1}u$, $\tilde{f}_{\omega\omega} \neq 0$	$-t\partial_t - x\partial_x - u\partial_u$, ∂_t	$A_{2.2}$
5	$f = (t-x)^{-2}\tilde{f}(u)$, $\tilde{f}_{uu} \neq 0$	$\partial_t + \partial_x$, $t\partial_t + x\partial_x$, $t^2\partial_t + x^2\partial_x$	$sl(2,\mathbb{R})$
6	$f = e^{x^{-1}u}$	$-t\partial_t + x\partial_u$, ∂_t, $x\partial_x + u\partial_u$	$A_{2.2} \oplus A_1$
7	$f = \lambda\lvert x\rvert^{-m-2}\lvert u\rvert^{m+1}$, $\lambda \neq 0$, $m \neq 0, -1, -2$	∂_t, $t\partial_t - \frac{1}{m}u\partial_u$, $x\partial_x + \frac{m+1}{m}u\partial_u$	$A_{2.2} \oplus A_1$
8	$f = \tilde{f}(u)$, $\tilde{f}_{uu} \neq 0$	∂_t, ∂_x, $-t\partial_t - x\partial_x$	$A_{3.6}$
9	$f = \lambda\lvert u\rvert^{n+1}$, $\lambda \neq 0$, $n \neq 0, -1$	$t\partial_t - \frac{1}{n}u\partial_u$, $x\partial_x - \frac{1}{n}u\partial_u$, ∂_t, ∂_x	$A_{2.2} \oplus A_{2.2}$

[1] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – Москва: Наука, 1978.

[2] Olver P.J. Applications of Lie groups to differential equations. – New York: Springer-Verlag, 1986.

[3] Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И. Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. – Киев: Наукова думка, 1989.

[4] Fushchych W.I., Zhdanov R.Z. Symmetries and exact solutions of nonlinear Dirac equations. – Kyiv: Mathematical Ukraina Publishers, 1997.

[5] Lie S. Über die Integration durch bestimmte Inegrale einer Klasse linearer partiallen Differentialgleichungen // Arch. Math. – 1881. – **6**, № 3. – S. 328–368.

[6] Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнений С.А. Чаплыгина // Журн. прикл. мех. и техн.физ. – 1960. – № 3. – P. 126–145.

[7] Bluman G.W., Kumei S. On invariance properties of the wave equation // J. Math. Phys. – 1987. – **28**. – P. 307–318.

[8] Lie S. Discussion der differential Gleichung $d^2z/dxdy = F(z)$ // Arch. Math. – 1881. – **8**, № 1. – S. 112–125.

[9] Pucci E., Salvatori M.C. Group properties of a class of semilinear hyperbolic equations // Int. J. Non-Linear Mech. – 1986. – **21**, № 2. – P. 147–152.

[10] Pucci E. Group analysis of the equation $u_{tt} + \lambda u_{xx} = g(u, u_x)$ // Riv. Mat. Univ. Parma. – 1987. – **12**, № 4. – P. 71–87.

[11] Ames W.F., Adams E., Lohner R.J. Group properties of $u_{tt} = [f(u)u_x]_x$ // Int. J. Non-Linear Mech. – 1981. – **16**, № 5–6. – P. 439–447.

[12] Oron A., Rosenau Ph. Some symmetries of the nonlinear heat and wave equations // Phys. Lett. A. – 1986. – **118**, № 4. – P. 172–176.

[13] Suhubi E.S., Bakkaloğlu A. Group poperties and similarity solutions for a quasilinear wave equation in the plane // Int. J. Non-Linear Mech. – 1991. – **26**. – P. 567–584.

[14] Torrisi M., Valenti A. Group properties and invariant solutions for infinitesimal transformations of a nonlinear wave equation // Int. J. Non. Mech. – 1985. – **20**. – P. 135–144.

[15] Torrisi M., Valenti A. Group analysis and some solutions of a nonlinear wave equation // Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena. – 1990. – **38**. – P. 445–458.

[16] Ibragimov N.H., Torrisi M., Valenti A. Preliminary group classification of equations $v_{tt} = f(x, v_x)v_{xx} + g(x, v_x)$ // J. Math. Phys. – 1991. – **32**. – P. 2988–2995.

[17] Zhdanov R.Z., Lahno V.I. Group classification of heat conductivity equations with a nonlinear source // J. Phys. A: Math. Gen. – 1999. – **32**. – 7405–7418.