Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2019, т. 16, № 3, 101–114

УДК 511.72, 517.5

М. В. Працьовитий, С. О. Скрипник, А. С. Чуйков

[1] *Інститут математики НАН України, НПУ імені М. П. Драгоманова, Київ; prats4444@gmail.com,*
[2] *Інститут математики НАН України, Київ; chyikov.artem@gmail.com,*
[3] *Інститут математики НАН України, Київ.*

Ланцюгове D_2-зображення дійсних чисел і деякі функції, з ним пов'язані

The properties of the representation of real numbers by continued fractions whose elements are equal to 0 and 1 (Denjoy's continued fractions) are studied. The geometry of this representation (properties of cylindrical sets, geometric content of digits, etc.) is investigated. Two projectors of D_2-continued fraction representation of numbers into classical binary and nega-binary representations are studied. Functional equations that satisfy these functions are given. The Lebesgue measure and the Hausdorff-Bezikovich fractal dimension of their sets of values are calculated. For one of these functions an equivalent definition of the system of two functional equations is given.

Keywords: Denjoy's continued fraction, D_2-continued fraction representation of real number, nega-binary representation, Lebesgue measure, Hausdorff-Besicovitch fractal dimension.

Вивчаються властивості зображення дійсних чисел за допомогою ланцюгових дробів, елементами яких є 0 та 1 (ланцюгових дробів Данжуа). Досліджується геометрія цього зображення (властивості циліндричних множин, геометричний зміст цифр тощо). Вивчаються два проектори D_2-зображення чисел в класичне двійкове та нега-двійкове зображення, а саме функції, які ланцюговому D_2-зображенню числа x ставлять у відповідність число y, записане тими ж цифрами у іншому зображенні. Наводяться функціональні співвідношення, яким задовольняють вказані функції, обчислюється міра Лебега та розмірність Гаусдорфа-Безиковича множин їх значень. Для однієї з функцій дається еквівалентне означення системою двох функціональних рівнянь.
Ключові слова: ланцюговий дріб Данжуа, ланцюгове D_2-зображення дійсного числа, нега-двійкове зображення, міра Лебега, фрактальна розмірність Гаусдорфа-Безиковича.

Вступ

Двосимвольні системи зображення (кодування) дійсних чисел привертали і продовжують привертати увагу багатьох дослідників. До таких систем відносяться класичне двійкове зображення та його узагальнення Q_2-зображення [11], [13], медіантне зображення [9], ланцюгове A_2-зображення [10], [8] тощо. Причому, ланцюгове зображення породжує складну несамоподібну геометрію, що ускладнює вивчення об'єктів, заданих за допомогою ланцюгових дробів. Дана робота присвячена вивченню зображення чисел за допомогою ланцюгових дробів, елементами яких можуть бути лише 0 або 1.

Arnaud Denjoy встановив [2], що кожне дійсне число x розкладається у *ланцюговий* (скінченний або нескінченний) *дріб Данжуа* вигляду

$$x = d_0 + \cfrac{1}{d_1 + \cfrac{1}{d_2 + \ddots + \cfrac{1}{d_n + \ddots}}}, \tag{1}$$

де $d_0 \in Z$ таке, що $x - d_0 \geq 0$ і $d_n \in D_2 \equiv \{0, 1\}, n \in N$. Подальші дослідження такого розкладу проводили M. Iosifescu і C. Kraaikamp (див. [1], [5], [6]).

Розклад числа x у дріб вигляду (1) називатимемо його D_2-представленням, а формальний запис

$$x = [d_0; d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots]^{D_2}$$

називатимемо його D_2-зображенням.

Зв'язок між ланцюговим дробом Данжуа та елементарним ланцюговим дробом визначається формулою, яка наведена в [6]:

$$x = [d_0; (0,1)^{a_0 - d_0}, (1,0)^{a_1 - 1}, 1, (1,0)^{a_2 - 1}, 1, \ldots]^{D_2}, \quad \forall Z \ni d_0 \leq x, \tag{2}$$

де вираз $(1, 0)^k$ означає, що група елементів $(1, 0)$ зустрічається k разів, причому вона відсутня, якщо $k = 0$; $a_i, i = 0, 1, 2, \ldots$ — елементи розкладу числа x у елементарний ланцюговий дріб.

Зауважимо, що для будь-якого d_0 кожне раціональне число, аналогічно до елементарних ланцюгових дробів, має два зображення:

$$x_1 = [d_1, d_2, \ldots, d_n, 1, 0, 1]^{D_2} \equiv [d_1, d_2, \ldots, d_n, 1, 1]^{D_2} = x_2. \tag{3}$$

Зауважимо також, що у розкладі (2) не існує двох сусідніх нулів. Якщо це обмеження зняти, то кожне число матиме нескінченну кількість зображень, оскільки

$$\frac{1}{a + \frac{1}{b}} = \frac{1}{a + \cfrac{1}{0 + \cfrac{1}{0 + \frac{1}{b}}}}. \tag{4}$$

Перші n елементів $a_1, a_2, \ldots, a_n$ елементарного ланцюгового дробу дають $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ елементів ланцюгового дробу Данжуа, рівних 1, і $a_1 + a_2 + \ldots + a_n - n$ елементів, рівних 0. Нехай Z_k —

це кількість нулів серед перших k елементів $d_1, \ldots, d_k$ числа x, а W_k — кількість одиниць. Використовуючи результат Хінчина [7], що для майже всіх x відносно міри Лебега $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_j = \infty$ можна зробити висновок, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Z_k}{W_k} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j - n}{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j} = 1,$$

тобто майже всі x асимптотично мають однакову кількість нулів і одиниць у розкладі в ланцюговий дріб Данжуа.

Нехай $x \in R$, $d_0 \in Z, x - d_0 \geq 0$. Дріб $C_n = [d_0; d_1, d_2, \ldots, d_n]^{D_2}$ називається підхідним дробом. Значення C_n обчислюється, використовуючи рівності: $1/0 = \infty$ та $1/\infty = 0$. Це означає, що $C_n = C_{n-2}$ при $d_n = 0$. Причому послідовність підхідних дробів p_n/q_n елементарного ланцюгового дробу є підпослідовністю підхідних дробів C_n ланцюгового дробу Данжуа. Закони утворення підхідних дробів для ланцюгового дробу Данжуа та елементарного ланцюгового дробу аналогічні:

$$\begin{cases} p_{-1} = 1, p_0 = d_0, p_n = d_n p_{n-1} + p_{n-2}; \\ q_{-1} = 0, q_0 = 1, q_n = d_n q_{n-1} + q_{n-2}, \qquad n \geq 1. \end{cases}$$

Наприклад, дріб $\dfrac{11}{4}$ розкладається у елементарний ланцюговий дріб та ланцюговий дріб Данжуа наступним чином:

$$\frac{11}{4} = [2; 1, 3] = [d_0; (0,1)^{2-d_0}, 1, 1, 0, 1, 1]^{D_2}, Z \ni d_0 < \frac{11}{4}.$$

Послідовності чисельників і знаменників підхідних дробів для числа $\dfrac{11}{4}$ при $d_0 = 0$ подано у табл. (1).

i	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p_i	1	0	1	1	1	2	3	5	3	8	11
q_i	0	1	0	1	0	1	1	2	1	3	4

Табл. 1: Підхідні дроби розкладу числа 11/4

1. Геометрія ланцюгового D_2-зображення

Нехай x записаний у вигляді ланцюгового дробу Данжуа (2), причому нехай $d_0 = 0$ і $x \in (0;1]$. Тоді $a_0 = 0$ і

$$x = [(1,0)^{a_1-1}, 1, (1,0)^{a_2-1}, 1, \dots, (1,0)^{a_n-1}, 1, \dots]^{D_2} =: [1, d_2, \dots, d_n, \dots]^{D_2}.$$

Дослідимо геометрію ланцюгового D_2-зображення. Для цього будемо використовувати тотожність:

$$[1, d_2, \dots, d_n, \infty]^{D_2} = [1, d_2, \dots, d_n + 1/\infty]^{D_2} = [1, d_2, \dots, d_n]^{D_2}.$$

Означення 1. *Циліндром рангу m з основою $1c_2 \cdots c_m$ називаеться множина*

$$\Delta^{D_2}_{1c_2\cdots c_m} = \{x | x = [1, d_2, \dots, d_m, \dots]^{D_2}, d_i(x) = c_i, i = \overline{2,m}\}.$$

Циліндри мають наступні властивості.

1) Циліндр $\Delta^{D_2}_{1c_2\cdots c_m}$ є відрізком, причому:
   (a) Якщо m – парне (непарне) і $c_m = 1$, то:
   $[1, c_2, \dots, c_{m-1}]^{D_2}$ – правий (лівий) кінець циліндра,
   $[1, c_2, \dots, c_m]^{D_2}$ – лівий (правий) кінець циліндра.
   (b) Якщо m – парне (непарне) і $c_m = 0$, то:
   $[1, c_2, \dots, c_m]^{D_2}$ – правий (лівий) кінець циліндра,
   $[1, c_2, \dots, c_m, 1]^{D_2}$ – лівий (правий) кінець циліндра.

Дійсно, якщо m-парне і c_m=1, то

$$\min \Delta^{D_2}_{1c_2\dots c_m} = [1, c_2, \dots, c_m, (1,0)]^{D_2} = [1, c_2, \dots, c_m]^{D_2},$$

$$\max \Delta^{D_2}_{1c_2\ldots c_m} = [1, c_2, \ldots, c_m, (0,1)]^{D_2} =$$

$$= [1, c_2, \ldots, c_{m-1}, (1,0)]^{D_2} = [1, c_2, \ldots, c_{m-1}]^{D_2}.$$

Якщо ж m-парне і c_m=0, то

$$\min \Delta^{D_2}_{1c_2\ldots c_m} = [1, c_2, \ldots, c_m, (1,0)]^{D_2} = [1, c_2, \ldots, c_m]^{D_2},$$

$$\max \Delta^{D_2}_{1c_2\ldots c_m} = [1, c_2, \ldots, c_m, 1, (1,0)]^{D_2} = [1, c_2, \ldots, c_m, 1]^{D_2}$$

(оскільки елемент на $(m+1)$-му місці не може дорівнювати 0). При непраному m міркування аналогічні.

Припущення 1. $\min \Delta^{D_2}_{1c_2\ldots c_{2k-1}10} = \max \Delta^{D_2}_{1c_2\ldots c_{2k-1}11}$, $\min \Delta^{D_2}_{1c_2\ldots c_{2k}11} = \max \Delta^{D_2}_{1c_2\ldots c_{2k}10}$.

2) Діаметр циліндра $\Delta^{D_2}_{1c_2\ldots c_m}$ виражається формулою:

$$\left|\Delta^{D_2}_{1c_2\ldots c_m}\right| = \begin{cases} \left|[1, c_2, \ldots, c_m]^{D_2} - [1, c_2, \ldots, c_{m-1}]^{D_2}\right|, c_m = 1, \\ \left|[1, c_2, \ldots, c_m]^{D_2} - [1, c_2, \ldots, c_m, 1]^{D_2}\right|, c_m = 0. \end{cases}$$

Випливає з першої властивості.

3) $\Delta^{D_2}_{1c_2\ldots c_{m-1}0} = \Delta^{D_2}_{1c_2\ldots c_{m-1}01}$, $\Delta^{D_2}_{1c_2\ldots c_{m-1}1} = \bigcup\limits_{i=0}^{1} \Delta^{D_2}_{1c_2\ldots c_{m-1}1i}$.

Випливає з того, що дроби Данжуа не містять двох послідовних нулів.

Лема 2. *Має місце рівність:*

$$[1, 1, d_3, \ldots, d_n, \ldots]^{D_2} + [1, 0, 1, d_3, \ldots, d_n, \ldots]^{D_2} = 1.$$

Доведення. Нехай $a = 1 + [d_3, d_4, \ldots]^{D_2}$, тоді

$$[1, 1, d_3, \ldots, d_n, \ldots]^{D_2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{a}} = \frac{a}{a+1};$$

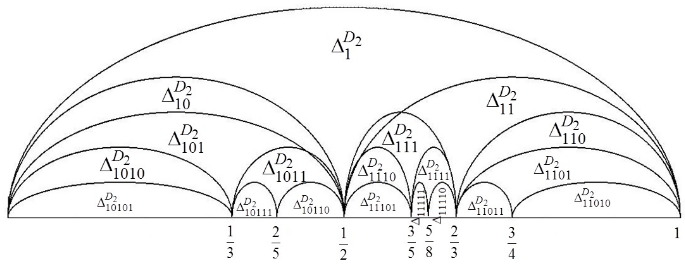

Рис. 1: Розташування циліндрів D_2-зображення

$$[1, 0, 1, d_3, \ldots, d_n, \ldots]^{D_2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{0 + \frac{1}{a}}} = \frac{1}{a+1}.$$

Звідси

$$[1, 1, d_3, \ldots, d_n, \ldots]^{D_2} + [1, 0, 1, d_3, \ldots, d_n, \ldots]^{D_2} = \frac{a}{a+1} + \frac{1}{a+1} = 1.$$

□

Лема 3. *Має місце рівність:* $\left|\Delta^{D_2}_{11c_3c_4\ldots c_n}\right| = \left|\Delta^{D_2}_{101c_3c_4\ldots c_n}\right|$.

Доведення. Нехай $c_n = 1$. За властивості 1) і леми 2 маємо:

$$\left|\Delta^{D_2}_{11c_3c_4\ldots c_n}\right| = \left|[11c_3c_4\ldots c_{n-1}]^{D_2} - [11c_3c_4\ldots c_n]^{D_2}\right| =$$

$$= \left|\left(1 - [101c_3c_4\ldots c_{n-1}]^{D_2}\right) - \left(1 - [101c_3c_4\ldots c_n]^{D_2}\right)\right| =$$

$$= \left|[101c_3c_4\ldots c_n]^{D_2} - [101c_3c_4\ldots c_{n-1}]^{D_2}\right| = \left|\Delta^{D_2}_{101c_3c_4\ldots c_n}\right|.$$

При $c_n = 0$ міркування аналогічні. □

З леми 2 випливає наступна геометрична інтерпретація: циліндри виду $\Delta^{D_2}_{11c_3\ldots c_n}$ n-го рангу розташовані симетрично відносно точки $x = 0,5$ до циліндрів виду $\Delta^{D_2}_{101c_3\ldots c_n}$ $(n+1)$-го рангу.

2. Функції, які задані проекторами цифр ланцюгового D_2-зображення в цифри двійкового та нега-двійкового зображень

Розглянемо функцію, яка в усіх ірраціональних точках півінтервалу $(0;1]$ означена рівністю:

$$f([0;d_1,d_2,\ldots,d_n,\ldots]^{D_2})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{2^n}=\Delta^2_{d_1d_2\ldots d_n\ldots}.$$

Лема 4. *Для всіх* $x\in I\cap(0;1]$ *функція* f *задовольняє функціональне рівняння*

$$1+f(x)=2f\left(\frac{1}{1+x}\right).$$

Доведення. Справді, для довільного $x=[0;d_1,d_2,...,d_n,...]$

$$1+f(x)=1+\frac{d_1}{2}+\frac{d_2}{2^2}+\ldots=2\left(\frac{1}{2}+\frac{d_1}{2^2}+\frac{d_2}{2^3}+\ldots\right)=$$

$$=2f\left([1,d_1,d_2,\ldots]^{D_2}\right)=2f\left(\frac{1}{1+x}\right).$$

□

Відомо, що для довільного $x\in[0;1]$ існує послідовність $(\omega_n),\omega_n\in\{0,1\}$, така що

$$x=\frac{2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\omega_n}{(-2)^n}=\frac{2}{3}-\frac{\omega_1}{2}+\frac{\omega_2}{2^2}-\frac{\omega_3}{2^3}+\ldots\equiv\bar{\Delta}^2_{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n\ldots}.$$

Таке подання числа називається *нега-двійковим зображенням.* Розглянемо функцію φ, яка у раціональних та ірраціональних точках півінтервалу $(0;1]$ означена відповідними рівностями:

$$\varphi\left([d_1,d_2,\ldots,d_n]^{D_2}\right)=\bar{\Delta}^2_{d_1d_2\ldots d_n},$$

$$\varphi\left([d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots]^{D_2}\right) = \bar{\Delta}^2_{d_1 d_2 \ldots d_n \ldots}.$$

Розглянемо два різні зображення раціонального числа (3). Оскільки

$$\varphi(x_1) = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{k} \frac{d_n}{(-2)^n} + \frac{1}{(-2)^{k+1}} + \frac{0}{(-2)^{k+2}} + \frac{1}{(-2)^{k+3}} =$$

$$= \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{k} \frac{d_n}{(-2)^n} + \frac{5}{(-2)^{k+3}},$$

$$\varphi(x_2) = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{k} \frac{d_n}{(-2)^n} + \frac{1}{(-2)^{k+1}} + \frac{1}{(-2)^{k+2}} = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{k} \frac{d_n}{(-2)^n} + \frac{-1}{(-2)^{k+2}},$$

то

$$\varphi(x_1) - \varphi(x_2) = \frac{3}{(-2)^{k+3}} \neq 0,$$

і тому, щоб забезпечити коректність функції $\varphi(x)$, будемо розглядати лише перше зображення, у якому передостаній елемент рівний нулю.

Лема 5. *Функція φ є монотонно зростаючою і її можна подати у вигляді*

$$\varphi(x) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^{n+1} \left(2^{2a_n} - 1\right) \prod_{i=1}^{n} \left(2^{1-2a_i}\right) \right).$$

Доведення. Виконаємо перетворення

$$\varphi(x) = \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{2} - \frac{0}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \ldots - \frac{0}{2^{2a_1-2}} + \frac{1}{2^{2a_1-1}} \right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{2^{2a_1}} - \frac{0}{2^{2a_1+1}} + \ldots - \frac{0}{2^{2a_1+2a_2-3}} + \frac{1}{2^{2a_1+2a_2-2}} \right) -$$

$$- \left(\frac{1}{2^{2a_1+2a_2-1}} - \frac{0}{2^{2a_1+2a_2}} + \ldots - \frac{0}{2^{2a_1+2a_2+2a_3-4}} + \frac{1}{2^{2a_1+2a_2+2a_3-3}} \right) + \ldots =$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\frac{1-(\frac{1}{4})^{a_1}}{1-\frac{1}{4}} + \frac{1}{2^{2a_1}}\frac{1-(\frac{1}{4})^{a_2}}{1-\frac{1}{4}} - \frac{1}{2^{2a_1+2a_2-1}}\frac{1-(\frac{1}{4})^{a_3}}{1-\frac{1}{4}} + \ldots =$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}2^{n-2\sum\limits_{i=1}^{n-1}a_i}\left(2^{2a_n-1}\right) =$$

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n+1}\left(2^{2a_n}-1\right)\prod_{i=1}^{n}\left(2^{1-2a_i}\right)\right).$$

Монотонність функції випливає з схожого розміщення циліндрів, які йдуть справа-наліво на непарних кроках і зліва-направо на парних кроках. □

Лема 6. *Функція φ задовольняє функціональні рівняння:*

$$\varphi\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{1}{4}\varphi(x),\ \ \varphi\left(\frac{1}{1+x}\right) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\varphi(x),\ \ \varphi\left(\frac{1}{x}-1\right) = 1-2\varphi(x).$$

Доведення. Нехай $x = [0; d_1, d_2, ...]$. Оскільки $\dfrac{x}{x+1} = [1, 0, d_1, d_2, \ldots]^{D_2}$, то

$$\varphi\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} - \frac{d_1}{2^3} + \frac{d_2}{2^4} - \ldots =$$

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\left(-\frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{d_1}{2} + \frac{d_3}{2^2} - \ldots\right) = \frac{1}{6} + \frac{1}{4}\left(-\frac{2}{3} + \varphi(x)\right) = \frac{1}{4}\varphi(x).$$

Оскільки $\dfrac{1}{1+x} = [1, d_1, d_2, \ldots]^{D_2}$, то

$$\varphi\left(\frac{1}{1+x}\right) = \frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{d_1}{2^2}-\frac{d_2}{2^3}+\ldots = \frac{1}{6}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3} - \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2^2} - \ldots\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} - f(x)\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\varphi(x).$$

Підставимо у друге функціональне рівняння x замість $\frac{1}{x} - 1$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{1}{x} - 1\right),$$

звідси випливає третє рівняння. □

Теорема 7. *Функція $\varphi(x)$ є єдиним розв'язком системи двох функціональних рівнянь*

$$\varphi\left(\frac{1}{i+x}\right) = 1 - \frac{i}{2} - \frac{1}{2}\varphi(x), i \in A$$

у класі обмежених на $[0;1]$ функцій.

Доведення. Нехай $x = [0; d_1, d_2, ...]$. Позначимо $u_n := [d_{n+1}, d_{n+2}, \ldots]^{D_2}$. Оскільки $x = \dfrac{1}{d_1 + u_1}$ і $d_1 \in D_2$, то:

$$\varphi(x) = \varphi\left(\frac{1}{d_1 + u_1}\right) = 1 - \frac{d_1}{2} - \frac{1}{2}\varphi\left(u_1\right).$$

Аналогічно, оскільки $u_1 = \dfrac{1}{d_2 + u_2}$ і $d_2 \in D_2$, то:

$$\varphi\left(u_1\right) = \varphi\left(\frac{1}{d_2 + u_2}\right) = 1 - \frac{d_2}{2} - \frac{1}{2}\varphi\left(u_2\right).$$

Отже,

$$\varphi(x) = 1 - \frac{d_1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{d_2}{2} - \frac{1}{2}\varphi\left(u_2\right)\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2^2} + \frac{1}{2^2}\varphi\left(u_2\right).$$

За n кроків отримаємо:

$$\varphi(x) = \frac{1 \cdot \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1 + \frac{1}{2}} - \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2^2} + \ldots + \frac{(-1)^n d_n}{2^n} + \frac{(-1)^n}{2^n}\varphi(u_n).$$

З обмеженості функції $\varphi(x)$ і з того, що при $n \to \infty$

$$\frac{(-1)^n}{2^n} \to 0 \qquad \text{та} \qquad \frac{1 \cdot \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1 + \frac{1}{2}} \to \frac{2}{3}$$

маємо збіжність процесу:

$$\varphi(x) = \frac{2}{3} - \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2^2} + \ldots + \frac{(-1)^n d_n}{2^n} + \ldots .$$

□

Задання функцій зі складними локальними властивостями за допомогою систем функціональних рівнянь займались різні вчені, зокрема, R. Girgenson [4], O. Dovgoshey [3], М.В. Працьовитий та А.В. Калашніков [12] та ін.

Нехай $E(\varphi)$ – множина значень функції $\varphi(x)$. Тоді

$$E(\varphi) = \{y \mid y = \bar{\Delta}^2_{d_1 d_2 \ldots d_n \ldots}, d_n + d_{n+1} \neq 0 \ \ \forall n \in N\}.$$

Теорема 8. *Множина $E(\varphi)$ значень функції φ належить відрізку $[0;1/2]$ і є ніде не щільною самоподібною фрактальною множиною нульової міри Лебега, розмірність Гаусдорфа-Безиковича якої $\alpha_0(E) = \log_2 \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.*

Доведення. Оскільки $\forall x \in (0;1]$ $d_1 = 1$, то значення функції зосереджені на множині чисел, які у своєму нега-двійковому зображенні мають першу цифру, рівну одиниці, тобто на множині $[0;1/2]$.

Доведемо, що $E(\varphi)$ є ніде не щільною за означенням. Справді, нехай $(a;b)$ – довільний інтервал, що належить $(0;1]$. Легко вказати циліндр $\bar{\Delta}^2_{d_1 d_2 \ldots d_n} \subset (a;b)$. Тоді інтервал $\mathrm{int}\bar{\Delta}^2_{d_1 d_2 \ldots d_n 00}$ не містить жодної точки множини $E(\varphi)$. Отже, $E(\varphi)$ – ніде не щільна.

Доведемо тепер, що $\lambda(E) = 0$.

З того, що $E = (E \cap \bar{\Delta}^2_{101}) \cup (E \cap \bar{\Delta}^2_{100}) \cup (E \cap \bar{\Delta}^2_{11})$ і

$$\lambda(E \cap \bar{\Delta}^2_{100}) = 0, \quad E \overset{\frac{1}{2}}{\sim} E \cap \bar{\Delta}^2_{11}, \quad E \overset{\frac{1}{4}}{\sim} E \cap \bar{\Delta}^2_{101}, \tag{5}$$

то $\lambda(E) = \lambda(E)/4 + \lambda(E)/2 \quad \Rightarrow \quad \lambda(E)/4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda(E) = 0.$

Для знаходження розмірності Гаусдорфа-Безиковича скористаємось (5), звідки отримуємо рівняння:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha} = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \log_2 \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

$\square$

Література

[1] Dajani K., Kraaikamp C. The mother of all continued fractions // Colloq. Math. — 2000. — 84/85. part 1. — P. 109-123.

[2] Denjoy A. Compl*é*ment *à* la notice publi*è*e en 1934 sur les travaux scientifiques de M. Arnaud Denjoy — Hermann, Paris, 1942.

[3] Dovgoshey O. The Cantor function / O. Dovgoshey, O. Martio, V. Ryazanov, M. Vuorinen// Expo. Math — 24 (2006). — P. 1-37.

[4] Girgenson R. Constructing singular functions via Farey fractions // J. Math. Anal. Appl. — 203 (1996).— P. P.127-141.

[5] Iosifescu M., Kraaikamp C. Metric properties of Denjoy's canonical continued fraction expansion // Tokyo J.Math. — 31 (2008). — no. 2. — P. 495-510.

[6] Iosifescu M., Kraaikamp C. On Denjoy's canonical continued fraction expansion // Osaka J.Math. — 40 (2003). — no. 1. — P. 235-244.

[7] Khintchine A. Ya. Metrische Kettenbruchproblemen // Compositio Math — 1 (1935). — P. 361-382.

[8] Pratsiovytyi M.V., Chuikov A.S. Continuous distributions whose functions preserve tails of a A-continued fraction representation of numbers. Random Operators and Stochastic Equations. — 2019. Vol. 27 (3). — P. 199-206.

[9] Безбородов В. К. Медіантне зображення дійсних чисел // Студентські фізико-математичні етюди — 2008.— №. 7. — С. 73-81.

[10] Дмитренко С. О., Кюрчев Д. В., Працьовитий М. В. Ланцюгове A_2-зображення дійсних чисел та його геометрія // Укр. мат. журнал. — 61 (2009). — № 4. — С. 452-463.

[11] Працьовитий М. В., Василенко Н. А. Одна сім'я неперервних функцій з всюди щільною множиною особливостей // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ. — 2011, — № 12. — С. 152-167.

[12] Працьовитий М. В., Калашніков А. В., Безбородов В. К. Про один клас сингулярних функцій,що містить класичну функцію Мінковського // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ, 2010. — № 11. — С. 207-213.

[13] Працьовитий М. В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ, 1998. — 296 с.