Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2019, т. 16, № 3, 79–91

УДК 517.5+ 519.21

М. В. Працьовитий [1] ***С. П. Ратушняк*** [2]

[1,2] *ІМ НАН України, НПУ імені М.П. Драгоманова, Київ;*
prats4444@gmail.com,ratush404@gmail.com

Незалежність цифр Q_2-зображення випадкової величини з заданим розподілом

Let ξ be a random variable with a given (uniform, exponential.) probability distribution on a segment $[0;1]$. We study conditions for Q_2-digits (ξ_n) of random variable $\xi = \Delta^{Q_2}_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n\ldots}$ to be independent. For ξ with exponential distribution, we prove that digits are independent if and only if parameters q_0 and q_1 of this system of representation are equal to $\frac{1}{2}$. Otherwise digits are dependent and this dependence is more complicated than Markov dependence. If the function of distribution of random variable with independent Q_2-digits has a positive derivative at all Q_2-binary points, then its distribution is uniform or exponential, moreover in the latter case the Q_2-representative is binary.

Key words: Q_2-representation of numbers, random variable, independent digits, exponential distribution.

Для в.в. ξ з заданим на $[0;1]$ розподілом (рівномірним, експоненційним) вивчається питання незалежності цифр її Q_2-зображення: $\xi = \Delta^{Q_2}_{\xi_1\xi_2...\xi_n...}$. Доведено: при експоненційному розподілі в.в. ξ її цифри є незалежними тоді і тільки тоді, коли основи q_0 і q_1 цієї системи зображення дорівнюють $\frac{1}{2}$. В решті випадків цифри мають залежність складнішу марківської. Якщо функція розподілу в.в. з незалежними Q_2-цифрами має додатну похідну у всіх Q_2-бінарних точках, то її розподіл є рівномірним або експоненційним, причому для останнього Q_2-зображення є двійковим.
Ключові слова: Q_2-зображення чисел, випадкова величина, незалежність цифр, експоненційний розподіл.

Вступ

Існує багато різних систем зображення (іншими словами - кодування) дробової частини дійсних чисел, які використовують двосимвольний алфавіт $A = \{0, 1\}$. Такі системи кодування чисел є ефективним засобом розвитку ймовірнісної теорії дійсних чисел [6] і теорії сингулярних розподілів випадкових величин [4]. Традиційними в цьому відношенні є задачі: 1) вивчити розподіл цифр зображення випадкової величини за наперед заданим її розподілом; 2) вивчити розподіл випадкової величини за заданими розподілами її цифр у певному зображенні. Ці задачі ми розглядаємо у даній роботі, акцентуючи увагу на Q_2-зображенні чисел [4, 8], на рівномірному та екпоненційному розподілах.

Нехай q_0 — задане дійсне число з інтервалу $(0;1)$, $q_1 \equiv 1 - q_0$; $A = \{0, 1\}$ — алфавіт двосимвольних систем зображення чисел, $L = A \times A \times ... \times A \times ...$ — простір послідовностей нулів та одиниць.

Двоосновне Q_2-зображення дійсних чисел відрізка $[0;1]$ встановлює наступне відоме твердження.

Теорема 1 ([3]). *Для довільного дійсного числа x з відрізка* $[0;1]$

існує така послідовність $(\alpha_n) \in L$, *що*

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\beta_{\alpha_n} \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j} \right) \equiv \Delta^{Q_2}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots}, \qquad (1)$$

де $\beta_{\alpha_n} \equiv \alpha_n \cdot q_{1-\alpha_n}$, *а саме:* $\beta_0 = 0, \beta_1 = q_0$.

Означення 1 ([3]). *Подання числа* x *у вигляді ряду (1) називається його* Q_2-представленням, *а скорочений запис* $x = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots}$ – Q_2-зображенням *числа* x. *При цьому* α_n *називають* n-ою цифрою *(символом) цього зображення.*

Числа, які мають єдине Q_2-зображення називаються Q_2-*унарними* (їх переважна більшіть), а ті числа, які мають два різні зображення — Q_2-*бінарними* (їх зліченна множина). Зображення Q_2-бінарних чисел мають вигляд: $\Delta^{Q_2}_{c_1 \ldots c_m 1(0)} = \Delta^{Q_2}_{c_1 \ldots c_m 0(1)}$.

Означення 2 ([3]). *Нехай* $(c_1, c_2, ..., c_m)$– *фіксований набір чисел з* A. Циліндром рангу m з основою $c_1 c_2 ... c_m$ *називається множина* $\Delta^{Q_2}_{c_1 c_2 \ldots c_m}$ *всіх чисел* $x \in [0;1]$, *які мають наступне* Q_2-*зображення* $x = \Delta^{Q_2}_{c_1 c_2 \ldots c_m \alpha_{m+1} \alpha_{m+2} \ldots \alpha_{m+k} \ldots}$, $\alpha_{m+j} \in A$.

Легко довести, що Q_2-циліндри є відрізками, а саме:

$$\Delta^{Q_2}_{c_1 c_2 \ldots c_m} = \left[\Delta^{Q_2}_{c_1 c_2 \ldots c_m (0)}; \Delta^{Q_2}_{c_1 c_2 \ldots c_m (1)} \right].$$

Означення 3 ([3]). Циліндричним Q_2-інтервалом рангу m з основою $c_1 c_2 ... c_m$ *називається внутрішність циліндра* $\Delta^{Q_2}_{c_1 c_2 \ldots c_m}$, *тобто множина* $\nabla^{Q_2}_{c_1 c_2 \ldots c_m} = (\Delta^{Q_2}_{c_1 c_2 \ldots c_m (0)}; \Delta^{Q_2}_{c_1 c_2 \ldots c_m (1)})$.

Властивості циліндричних множин (циліндрів, інтервалів):

1) $\Delta^{Q_2}_{c_1 c_2 \ldots c_m} = \Delta^{Q_2}_{c_1 c_2 \ldots c_m 0} \cup \Delta^{Q_2}_{c_1 c_2 \ldots c_m 1}$;

2) $|\Delta^{Q_2}_{c_1 c_2 \ldots c_m}| = \prod_{j=1}^{m} q_{c_j} \to 0 \ \ (m \to \infty)$;

3) $\nabla^{Q_2}_{c_1 c_2 \ldots c_m 0} \cap \nabla^{Q_2}_{c_1 c_2 \ldots c_m 1} = \varnothing$;

4) $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \Delta^{Q_2}_{c_1c_2\ldots c_k} = x \equiv \Delta^{Q_2}_{c_1c_2\ldots c_k\ldots}$ – точка відрізка$[0;1]$;

5) $\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_m} \cap \Delta^{Q_2}_{a_1\ldots a_m\ldots a_k} = \begin{cases} \Delta_{a_1\ldots a_m\ldots a_k}, & \text{якщо } c_i = a_i, i = \overline{1,m}, \\ \emptyset, & \text{якщо існує } c_i \neq a_i. \end{cases}$

Розподіл випадкової величини $\xi = \Delta^{Q_2}_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n\ldots}$, цифри Q_2-зображення якої є незалежними і набувають значень 0 і 1 з ймовірностями p_{0n} і $p_{1n} \equiv 1 - p_{0n}$ відповідно, в значній мірі є вивченим. Відомо [3], що *він має чистий лебегівський тип: дискретний — тоді і тільки тоді, коли* $M \equiv \prod\limits_{n=1}^{\infty} \max\{p_{0n}, p_{1n}\} > 0$, *абсолютно неперервним, коли* $K = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{i=0}^{1} (1 - \frac{p_{in}}{q_i})^2 < \infty$, *і сингулярний при* $M = 0$ *і* $K = \infty$.

Добре вивченими є тополого-метричні властивості спектра (мінімального замкненого носія) розподілу. Не вивченими є асимптотична поведінка модуля характеристичної функції випадкової величини ξ, її модуль неперевності та ін. питання. Природним є запитання: скільки у цьому класі розподілів таких, що мають додатну похідну функції розподілу на всьому відрізку [0;1] або деякому інтервалі? На це запитання при умові, що Q_2-зображення є класичним двійковим, вичерпну відповідь дано у роботі [1].

1. Цифра зображення числа як функція цього числа

Цифра $\alpha_n = \alpha_n(x)$ Q_2-зображення числа x є коректно означеною функцією на множині Q_2-унарних точок і стає такою на множині Q_2-бінарних точок після введення домовленості не використовувати зображення з періодом (1). Вона є константою на кожному циліндричному інтервалі n-го рангу, будучи обмеженою і маючи скінченне число розривів першого роду, є інтегровною на [0;1]:

$$\int\limits_0^1 \alpha_n(x)dx = 1 \cdot \sum_{i_1 \in A} \dots \sum_{i_{n-1} \in A} |\Delta^{Q_2}_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} 1}| =$$

$$= q_1 \sum_{i_1 \in A} \dots \sum_{i_{n-1} \in A} |\Delta^{Q_2}_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}}| = q_1.$$

Дві множини A і B з $[0;1]$ називаються [2] *метрично незалежними*, якщо для міри Лебега $\lambda(\cdot)$ виконується рівність

$$\lambda(A \cap B) = \lambda(A) \cdot \lambda(B) \Leftrightarrow \frac{\lambda(A \cap B)}{\lambda(A)} = \frac{\lambda(B)}{1}.$$

Нехай $\Delta^{k_i}_{c_i} \equiv \{x : \alpha_{k_i}(x) = c_i\}$. Множини $\Delta^{k_1}_{c_1}$ і $\Delta^{k_2}_{c_2}$ при $k_1 \neq k_2$ є метрично незалежними, оскільки

$$\lambda(\Delta^{k_1}_{c_1} \cap \Delta^{k_2}_{c_2}) = q_{c_i} q_{c_2} = \lambda(\Delta^{k_1}_{c_1}) \cdot \lambda(\Delta^{k_2}_{c_2}).$$

Аналогічно, якщо $(k_1, k_2, ..., k_m)$ — зростаючий набір натуральних чисел, то

$$\lambda(\Delta^{k_1}_{c_1} \cap \Delta^{k_2}_{c_2} \cap ... \cap \Delta^{k_m}_{c_m}) = \prod_{j=1}^{m} q_{c_j} = \prod_{j=1}^{m} \lambda(\Delta^{k_j}_{c_j}).$$

Лема 2. *Якщо ξ — випадкова величина з заданим розподілом, то цифра ξ_n її Q_2-зображення є випадковою величиною, причому*

$$P\{\xi_n = i\} = P\{\xi \in \bigcup_{c_1 \in A} \dots \bigcup_{c_{n-1} \in A} \Delta^{Q_2}_{c_1 \dots c_{n-1} i}\}. \qquad (2)$$

Доведення. Справді, оскільки ξ — вимірна функція на $[0;1]$, тобто така, що для будь-якого дійсного x множина $\{\omega : \xi(\omega) < x\}$ є борелівською, то очевидно, що множина $\{u : \xi_n(u) = i \in A\}$ борелівська. При цьому вказана ймовірність є наслідком рівності подій $\{\alpha_n(x) = i\} = \{x \in \bigcup\limits_{c_1 \in A} \dots \bigcup\limits_{c_{k-1} \in A} \Delta^{Q_2}_{c_1 \dots c_{k-1} i}\}$. □

2. Рівномірний розподіл

Лема 3. *Якщо випадкова величина ξ має рівномірний на $[0;1]$ розподіл, то цифри (ξ_n) її Q_2-зображення $\xi = \Delta^{Q_2}_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n\ldots}$ є незалежними і мають розподіли $P\{\xi_n = 0\} = q_0,\ P\{\xi_n = 1\} = q_1$.*

Доведення. Оскільки ξ має рівномірний на $[0;1]$ розподіл, то він є неперевним, тобто $P\{\xi = x\} = 0$ для довільного $x \in [0;1]$, і

$$P\{\xi \in \Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_m}\} = \lambda(\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_m}) = \prod_{i=1}^{m} q_{c_i}$$

для будь-якого набору $(c_1, ..., c_m)$ нулів та одиниць. Тому

$$P\{\xi_1 = i\} = P(\xi \in \Delta^{Q_2}_{i}) = q_i,\ i = 0, 1.$$

Зауважимо, що подія $\{\xi \in \Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_m}\}$ рівносильна одночасному виконанню подій $\{\xi_i = c_i\}$, $i = \overline{1, m}$. Для умовних ймовірностей:

$$P\{\xi_n = 0 / \Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{n-1}}\} = \frac{P\{\xi \in \Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{n-1}0}\}}{P\{\xi \in \Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{n-1}}\}} = \frac{q_0 \prod\limits_{i=1}^{n-1} q_i}{\prod\limits_{i=1}^{n-1} q_i} = q_0,$$

$$P\{\xi_n = 1 / \Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{n-1}}\} = \frac{P\{\xi \in \Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{n-1}1}\}}{P\{\xi \in \Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{n-1}}\}} = \frac{q_1 \prod\limits_{i=1}^{n-1} q_i}{\prod\limits_{i=1}^{n-1} q_i} = q_1.$$

Як бачимо, умовні ймовірності не залежать від набору $(c_1, ..., c_{n-1})$, а отже, і $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{n-1}$. Тому

$$P\{\xi_n = i / \xi \in \Delta^{Q_2}_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_{n-1}}\} = P\{\xi_n = i\} = q_i,$$

що й вимагалося довести. □

Наслідок 4. *Якщо випадкова величина має рівномірний розподіл на $[0,1]$, то її двійкові цифри є незалежними, однаково розподіленими і рівноймовірними.*

3. Експоненційний розподіл на $[0;1]$

Традиційно експоненційним розподілом ймовірностей з параметром λ на R^1 називається розподіл, що має щільність

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot e^{-cx} \text{ при } x \geq 0, \\ 0 \text{ при } x < 0. \end{cases}$$

Експоненційним розподілом в.в. X на відрізку $[0;1]$ з параметром $c \in R$, $c \neq 0$, називається розподіл з щільністю

$$f_c(x) = \frac{c}{e^c - 1} \cdot e^{cx}.$$

Коректність цього означення слідує з $\int_0^1 f_c(x)dx = 1$.

Лема 5. *Якщо випадкова величина X має експоненційний розподіл з параметром c на відрізку $[0;1]$, то її функція розподілу F_c має вигляд*

$$F_c(x) = \frac{e^{cx} - 1}{e^c - 1}$$

і при цьому $P\{X \in [a;b]\} = \frac{e^{ca}(e^{c(b-a)}-1)}{e^c-1}$.

Доведення. Перша частина твердження є очевидною, оскільки $F_c'(x) = f_c(x)$ *і* $F_c(0) = 0,\ F_c(1) = 1$. Тоді

$$P\{X \in [a;b]\} = F_c(b) - F_c(a) = \frac{e^{cb} - 1}{e^c - 1} - \frac{e^{ca} - 1}{e^c - 1} =$$
$$= \frac{e^c - e^{ca}}{e^c - 1} = \frac{e^{ca}(e^{c(b-a)} - 1)}{e^c - 1}.$$

Лему доведено. □

Зауваження 1. *Поклавши* $\frac{c}{e^c-1} = 0$ *при* $c = 0$, *маємо* $f_0(x) = 1$. *Тому в цьому контексті рівномірний розподіл на відрізку* $[0;1]$ *можна вважати частинним випадком експоненційного.*

Лема 6. *Характеристична функція φ експоненційного розподілу на відрізку $[0;1]$ з параметром c має вигляд*

$$\varphi(t) = \frac{c}{z} \cdot \frac{e^z - 1}{z}, \text{ де } z = it + c.$$

Доведення. Справді,

$$\varphi(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x) dx,$$

згідно з означенням характеристичної функції розподілу зі щільністю $f(x)$. Тому для експоненційного розподілу на $[0;1]$ маємо

$$\varphi(t) = \int\limits_0^1 e^{itx} f_c(x) dx = \int\limits_0^1 e^{itx} \cdot \frac{ce^{cx}}{e^c - 1} dx =$$
$$= \frac{c}{e^c - 1} \cdot \int\limits_0^1 e^{(it+c)x} dx = \frac{c}{e^c - 1} \int_0^1 e^{zx} dz =$$
$$= \frac{c}{e^c - 1} \cdot \frac{1}{z} e^{zx}|_0^1 = \frac{c}{e^c - 1} \cdot \frac{e^z - 1}{z}.$$

Лему доведено. □

Лема 7. *[1] Якщо $q_0 = \frac{1}{2}$ і в.в. ξ має експоненційний розподіл на $[0;1]$ зі щільністю $f_c(x) = \frac{ce^{cx}}{e^c - 1}$, то цифри (ξ_n) її Q_2-зображення (в цьому випадку воно є двійковим) є незалежними і мають розподіли:*

$$P\{\tau_n = 0\} = \frac{1}{1 + e^{\frac{c}{2^n}}} \equiv p_{0n}, P\{\tau_k = 1\} = \frac{e^{\frac{c}{2^n}}}{1 + e^{\frac{c}{2^n}}} \equiv p_{1n}. \qquad (3)$$

Теорема 8. *Якщо $q_0 \neq \frac{1}{2}$ і при цьому $\xi = \Delta^{Q_2}_{\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n \ldots}$ має експоненційний розподіл на відрізку $[0;1]$ зі щільністю $f_c(x) = \frac{ce^{cx}}{e^c - 1}$, то цифри (ξ_n) її Q_2-зображення є залежними, причому залежність складніша марківської.*

Доведення. При виконанні умов теореми з урахуванням леми 5 і виразів кінців та довжин циліндрів, маємо

$$P(X \in \Delta_0^{Q_2}) = \frac{e^{cq_0}-1}{e^c-1},\ P\{X \in \Delta_1^{Q_2}\} = \frac{e^{cq_0}(e^{cq_1}-1)}{e^c-1};$$

$$P\{X \in \Delta_{00}^{Q_2}\} = \frac{e^{q_0^2c}-1}{e^c-1},\ P\{X \in \Delta_{01}^{Q_2}\} = \frac{e^{q_0^2c}(e^{q_0q_1c}-1)}{e^c-1};$$

$$P\{X \in \Delta_{10}^{Q_2}\} = \frac{e^{q_0c}(e^{q_0q_1c}-1)}{e^c-1},\ P\{X \in \Delta_{11}^{Q_2}\} = \frac{e^{(1-q_1^2)c}(e^{q_1^2c}-1)}{e^c-1}.$$

Тоді

$$P\{\xi_2 = 0/\xi_1 = 0\} = \frac{P\{\xi \in \Delta_{00}^{Q_2}\}}{P\{\xi_1 = 0\}} = \frac{e^{q_0^2c}-1}{e^{q_0c}-1},$$

$$P\{\xi_2 = 0/\xi_1 = 1\} = \frac{P\{\xi \in \Delta_{10}^{Q_2}\}}{P\{\xi_1 = 1\}} = \frac{e^{q_0q_1c}-1}{e^{q_1c}-1},$$

$$P\{\xi_2 = 1/\xi_1 = 0\} = \frac{P\{\xi \in \Delta_{01}^{Q_2}\}}{P\{\xi_1 = 0\}} = \frac{e^{q_0^2c}(e^{q_0q_1c}-1)}{e^{q_0c}-1},$$

$$P\{\xi_2 = 1/\xi_1 = 1\} = \frac{P\{\xi \in \Delta_{11}^{Q_2}\}}{P\{\xi_1 = 1\}} = \frac{e^{(1-q_1^2)c}(e^{q_1^2c}-1)}{e^{q_0c}(e^{q_1c}-1)}.$$

Оскільки при $q_0 \neq \frac{1}{2}$ виконується нерівність

$$P\{\xi_2 = i/\xi_1 = 0\} \neq P\{\xi_2 = i/\xi_1 = 1\},$$

то ξ_1 і ξ_2 не є незалежними $(i = 0, 1)$, тобто є залежними.

Оскільки

$$P\{\xi_3 = 0/\xi_2 = 0, \xi_1 = 0\} = \frac{P\{\xi \in \Delta_{000}^{Q_2}\}}{P\{\xi \in \Delta_{00}^{Q_2}\}} = \frac{e^{q_0^3c}-1}{e^{q_0^2c}-1};$$

$$P\{\xi_3 = 0/\xi_2 = 0, \xi_1 = 1\} = \frac{P\{\xi \in \Delta_{100}^{Q_2}\}}{P\{\xi \in \Delta_{10}^{Q_2}\}} = \frac{e^{q_1q_0^2c}-1}{e^{q_1q_0c}-1} \neq$$
$$\neq P\{\xi_3 = 0/\xi_2 = 0, \xi_1 = 0\},$$

то залежність в.в. (ξ_n) є складнішою, ніж марківська [5]. □

Аналогічні задачі можна ставити для різних розподілів в.в ξ на $[0,1]$. Природним є запитання про те, для яких розподілів в.в. ξ цифри її Q_2-зображення є незалежними.

4. Розподіл випадкової величини, породжений розподілами цифр її Q_2-зображення

Природним є запитання: чи є серед розподілів випадкових величин ξ, породжених розподілами незалежних цифр їх Q_2-зображення такі, що мають нетривіальну щільність, крім тих, що фігурували у лемах 5, 7? Цьому питанню підпорядковані наступні міркування.

Лема 9. *В.в.* $\tau = \Delta^{Q_2}_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_n\ldots}$*, двійкові цифри* τ_n*, якої є незалежними і набувають значень 0 і 1 з ймовірностями* q_0 *і* q_1 *відповідно* $(0 < q_0 < 1,\ q_0 + q_1 = 1)$ *має сингулярно неперервний розподіл при* $q_0 \neq 0,5$ *і рівномірний при* $q_0 = 0,5$*, а її функція розподілу має вираз*

$$F_\tau(x = \Delta^2_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}) = \alpha_1 q_{1-\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty}(\alpha_k q_{1-\alpha_k}\prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j}).$$

Зауважимо, що нижче буде доведено більш загальне твердження, тому тут ми лише виразимо функцію розподілу і покажемо, що її похідна рівна нулю майже скрізь.

Лема 10. *[4] Якщо в точці* x_0 *існує похідна функції розподілу* F_ξ *випадкової величини* $\xi = \Delta^{Q_2}_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n\ldots}$ *з незалежними цифрами* (ξ_n)*, що мають розподіли* $P\{\xi_n = 0\} = p_{0n} \geq 0$ *і* $P\{\xi_n = 1\} = p_{1n} \geq 0$*,* $p_{0n} + p_{1n} = 1$*, то вона обчислюється за формулою*

$$F'_\xi(x_0) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_{\alpha_n(x_0)n}}{q_{\alpha_n(x_0)}}.$$

Лема 11. *Якщо в Q_2-бінарній точці $x_0 = \Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{m-1}0(1)} = \Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{m-1}1(0)}$ існує скінчена похідна $F'_\xi(x_0)$, то*

$$\frac{p_{0m}}{q_0}\prod_{i=m+1}^{\infty}\frac{p_{1i}}{q_1} = \frac{p_{1m}}{q_1}\prod_{i=m+1}^{\infty}\frac{p_{0i}}{q_0}. \tag{4}$$

Доведення. Оскільки $F'_\xi(x_0) > 0$, то згідно з попередньою лемою, маємо

$$\frac{p_{0m}}{q_0}\prod_{i=1}^{m-1}\frac{p_{c_i i}}{q_{c_i}}\prod_{i=m+1}^{\infty}(\frac{p_{1i}}{q_1}) = \frac{p_{1m}}{q_1}\prod_{i=1}^{m-1}\frac{p_{c_i i}}{q_{c_i}}\prod_{i=m+1}^{\infty}(\frac{p_{0i}}{q_0}).$$

Звідки отримуємо (4). □

Лема 12. *Якщо $F'(\Delta^{Q_2}_{\underbrace{0\ldots0}_{k-1}1(0)}) > 0$, то*

$$\frac{q_1}{q_0 e^{c_k}}\prod_{i=k+1}^{\infty}\frac{q_0 e^{c_i}}{q_1} = 1. \tag{5}$$

Доведення. Оскільки похідна $F'(\Delta^{Q_2}_{\underbrace{0\ldots0}_{k-1}1(0)})$ існує і додатна, то вона згідно з лемою має вирази

$$F'(x_0) = (\prod_{i=1}^{k-1}\frac{1}{q_1(1+e^{c_i})})\frac{1}{q_0(1+e^{c_k})}\prod_{i=k+1}^{\infty}\frac{e^{c_i}}{q_1(1+e^{c_i})} \equiv A_k;$$

$$F'(x_0) = (\prod_{i=1}^{k-1}\frac{1}{q_0(1+e^{c_i})})\frac{e^{c_k}}{q_1(1+e^{c_k})}\prod_{i=k+1}^{\infty}\frac{1}{q_0(1+e^{c_i})} \equiv B_k.$$

Тоді

$$1 = \frac{A_k}{B_k} = \frac{q_1}{q_0 e^{c_k}}\prod_{i=k+1}^{\infty}\frac{q_0 e^{c_i}}{q_1},$$

що й вимагалось довести. □

Наслідок 13. *Якщо (5), то або* $e^{c_i} = \frac{q_1}{q_0}$, $i \in \{k, k+1, k+2, ...\}$, *або*

$$\begin{cases} q_0 = \frac{1}{2} = q_1, \\ c_k = c_{k+1} + c_{k+2} + ... \end{cases}$$

Теорема 14. *Якщо функція розподілу* F_ξ *випадкової величини* ξ, *цифри* (ξ_n) Q_2*-зображення* $\xi = \Delta^{Q_2}_{\xi_1\xi_2...\xi_n...}$ *якої є незалежними і мають розподіли* $P\{\xi_n = 0\} = p_{0n} \geq 0$ *і* $P\{\xi_n = 1\} = p_{1n} \geq 0$, $p_{0n} + p_{1n} = 1$, *має додатну похідну у всіх точках виду* $\Delta^{Q_2}_{\underbrace{0...0}_{k-1}1(0)}$, $k \in N$, *то виконується одна з умов:*
1) $p_{0n} = q_0$ *для будь-якого* $n \in N$;
2) $q_0 = \frac{1}{2}$ *і* $p_{0n} = \frac{1}{1+e^{\frac{c}{2^n}}}$, $p_{1n} = \frac{e^{\frac{c}{2^n}}}{1+e^{\frac{c}{2^n}}}$.

У першому випадку ξ *має рівномірний розподіл, а в другому — експоненційний розподіл на* $[0;1]$ *зі щільністю* $f(x) = \frac{ce^{cx}}{e^c-1}$, $c \in R$.

Доведення. Якщо $p_{ik} = 0$ для деякого k, то функція F_ξ є сталою на кожному циліндричному інтервалі $\nabla^{Q_2}_{c_1...c_{k-1}i}$, а отже, і на $\nabla^{Q_2}_{\underbrace{0...0}_{k-1}i}$, а тому $F'_\xi(\Delta^{Q_2}_{\underbrace{0...0}_{k-1}1(0)}) = 0$ або не існує. Отже, для всіх $k \in N$ виконуються нерівності $0 \neq p_{ik} \neq 1$. Тому розподіл цифри ξ_k можна представити у вигляді

$$p_{ok} = \frac{1}{1+e^{c_k}}, \quad p_{1k} = \frac{e^{c_k}}{1+e^{c_k}}. \tag{6}$$

Тоді для кожного $k \in N$ виконується рівність(5). Тому згідно з наслідком з леми 5 або $e^{c_i} = \frac{q_1}{q_0}$ (що рівносильно $p_{0i} = q_0$) для будь-якого $i \in N$, або $q_0 = \frac{1}{2}$ і разом з цим для будь-якого $k \in N$ виконується рівність $c_k = c_{k+1} + c_{k+2} + ...$, що рівносильно $c_k = \frac{c}{2^k}$, де $0 \neq c \in R$. $\square$

Література

[1] *Marsaglia G.* Random variables with independent binary digits — Ann. Math. Statist, 1971. — 42, № 2. — P. 1922-1929. Те ж саме. Случайные величины з независимыми двоичными цыфрами, Дж. Марсалья — Кибернет. сб. — 1983. — **20**.— С. 216-224.

[2] *Кац М.* Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел (пер. с. англ.) — М.:Из-во иностранной литературы, — 1963. — 156 с.

[3] *Працевитый Н.В.* Случайные величины с независимыми Q_2-символами // Асимптотические методы в исследовании стохастических моделей. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. — С.92–102.

[4] *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних роподілів. — Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 1998 — 296с.

[5] *Працьовитий М.В.* Фрактальні властивості розподілів випадкових величин, Q_2-знаки яких утворюють однорідний ланцюг Маркова // Асимпотичний аналіз випадкових еволюцій. — Київ: Ін-т математики АН України, 1994 — С.245–254.

[6] *Працьовитий М.В., Ратушняк С.П.* Влативості та розподіли значень фрактальних функцій, пов'язаних з Q_2-зображенням дійсних чисел // Теорія ймовірностей та математична статистика., Вип. 2(99)/2018. — С. 187–202.

[7] *Salem R.* On some singular monotonic functions with are stricly increasing // Trans. Amer. Math. Soc. — 1943. — 53. — P. 423–439.

[8] *Турбин А.Ф., Працевитый Н.В.* Фрактальные множества, функции, распределения. - Київ: Наукова думка, 1992. - 208 с.