Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2019, т. 16, № 3, 60–78

УДК 519.21

О. П. Макарчук, К. С. Сальник

1*Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені В. Винниченка, м. Кропивницький; makolpet@gmail.com*

[2]*Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені В. Винниченка, м. Кропивницький*

Лебегівські властивості розподілу випадкової величини, представленої s-ковим дробом з надлишковим набором цифр

In this paper we study the Lebesgue structure and the asymptotic properties of the characteristic function of the random variable represented by an s-adic fraction with a redundant set of digits.

У роботі досліджується лебегівська структура та асимптотичні властивості характеристичної функції випадкової величини, представленої s-ковим дробом з надлишковим набором цифр.

Вступ.

Нехай ξ_k — послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень 0,1,...,$m-1$ з ймовірностями $p_{0k}, p_{1k}, ..., p_{(m-1)k}$ відповідно. Випадкова величина

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k s^{-k}$$

називається випадковою величиною, зображеною s-им дробом з надлишковим набором цифр.

За теоремою Джессена-Вінтнера [11] випадкова величина ξ має чистий розподіл, тобто чисто дискретний, або чисто абсолютно неперервний, або чисто сингулярний.

За теоремою П. Леві [12] випадкова величина ξ має чисто дискретний розподіл тоді і тільки тоді, коли

$$\prod_{k=1}^{\infty} \max_{0\le i\le m-1}\{p_{ik}\} > 0 \tag{1}$$

Якщо $m < s$ і

$$\prod_{k=1}^{\infty} \max_{0\le i\le m-1}\{p_{ik}\} = 0,$$

то випадкова величина ξ має сингулярний розподіл канторівського типу.

При $m = s$ ξ є випадковою величиною з незалежними s-ими цифрами, лебегівська структура якої добре вивчена [6].

При $m > s$ проблема визначення лебегівського типу випадкової величини ξ є складною і нерозв'язаною повністю на даний момент.

Характеристичною функцією випадкової величини ψ називається комплекснозначна функція

$$f_\psi(t) = M(e^{it\psi}),$$

де $M(\cdot)$ – математичне сподівання.

Розглянемо величину

$$L_\psi = \lim_{|t|\to\infty} \sup |f_\psi(t)|.$$

Теорема 1. *[2] Якщо розподіл випадкової величини* ψ
1) дискретний, то

$$Ł_\psi = 1;$$

2) абсолютно неперервний, то

$$L_\psi = 0;$$

3) сингулярний, то L_ψ може набувати довільного значення з відрізку $[0;1]$.

В роботі [9] Жиро навів приклад сингулярного розподілу ψ, для якого $L_\psi = 0$. Приклад характеристичної функції сингулярного розподілу ψ, для якого $L_\psi = 1$ наведено Вінтнером в роботі [11] та Єссеєном в [8]. Сингулярні розподіли ψ, для яких L_ψ набуває заданого значення з відрізку $[0;1]$ побудовані Шварцем [10].

2. Лебегівська структура розподілу випадкової величини, представленої s-ковим дробом з надлишковим набором цифр.

Означення 1. *Нехай n – натуральне число, m – невід'ємне число, яке не перевищує $\frac{s^n-1}{s-1}$,*

Для стохастичної матриці $||\bar{p}|| = (p_{0k}, p_{1k}, ..., p_{(m-1)k})$ розміру $(m-1)\times +\infty$ означимо величину(число)

$$S^{||\bar{p}||}_{m,n} = \sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n \\ \frac{\alpha_1}{s^1}+\frac{\alpha_2}{s^2}+\dots+\frac{\alpha_2}{s^2}=\frac{m}{s^n} \\ \alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r\in\{0,\dots,m-1\}}} \prod_{j=1}^{n} p_{\alpha_{ij}j}$$

за означенням покладемо для кожного натурального n і $r<0$:

$$S^{||\bar{p}||}_{r,n} = 0.$$

Лема 2. *Нехай $||\bar{p}|| = (p_{0k}, p_{1k}, ..., p_{(m-1)k})$ довільна стохастична матриця $(m-1)\times +\infty$, тоді для многочлена*

$$\sum_l a_l^{(n)} z^l = h_n(z) = \prod_{j=1}^{n} \big(p_{0(n-j+1)} +$$

$$+p_{1(n-j+1)}z^{s^{i-1}}+\ldots+p_{(m-1)(n-j+1)}z^{(m-1)s^{j-1}}\Big).$$

виконується нерівність:

$$a_l^{(n)}\leq\prod_{i=1}^{n}\max\{\sum_{\substack{0\leq j\leq m-1\\ j\equiv 0(mods)}}p_{jr};...;\sum_{\substack{0\leq j\leq m-1\\ j\equiv s-1(mods)}}p_{jr}\}\ \ \forall n\in N.$$

Доведення.

Доведення проведемо за індукцією по n.

При $n=1$ маємо:

$$h_1(z)=p_{01}+p_{11}z^{s^0}+...+p_{(m-1)1}z^{(m-1)s^0},$$

$$a_l^{(1)}=p_{l1}\leq\sum_{\substack{0\leq j\leq m-1\\ j\equiv l(mods)}}p_j\leq\prod_{i=1}^{n}\max\{\sum_{\substack{0\leq j\leq m-1\\ j\equiv 0(mods)}}p_{j1};...;\sum_{\substack{0\leq j\leq m-1\\ j\equiv s-1(mods)}}p_{j1}\}\ .$$

Нехай твердження правильне для деякого натурального n, тобто для многочлена

$$h_n(z)=\prod_{j=1}^{n}(p_{0(n-j+1)}+p_{1(n-j+1)}z^{s^{i-1}}+...+p_{(m-1)(n-j+1)}z^{(m-1)s^{j-1}})=$$

$$=(p_{0n}+p_{1n}z^{s^0}+...+p_{(m-1)n}z^{(m-1)s^0})\cdot\ldots\cdot(p_{01}+\ldots+p_{(m-1)1}z^{(m-1)s^{n-1}})$$

виконується нерівність:

$$a_l^{(n)}\leq\prod_{i=1}^{n}\max\{\sum_{\substack{0\leq j\leq m-1\\ j\equiv 0(mods)}}p_{jr};...;\sum_{\substack{0\leq j\leq m-1\\ j\equiv s-1(mods)}}p_{jr}\}.$$

Зрозуміло, що

$$h_n(z^s)=\prod_{j=1}^{n}(p_{0(n-j+1)}+p_{1(n-j+1)}z^{s^i}+...+p_{(m-1)(n-j+1)}z^{(m-1)s^j})=$$

$$= (p_{0n}+p_{1n}z^{s^1}+...+p_{(m-1)n}z^{(m-1)s^1})\cdot...\cdot(p_{01}+\ldots+p_{(m-1)1}z^{(m-1)s^n}),$$

$$h_{n+1}(z) = \prod_{j=1}^{n}(p_{0(n-j+1)}+p_{1(n-j+1)}z^{s^{i-1}}+...+p_{(m-1)(n-j+1)}z^{(m-1)s^{j-1}}) =$$

$$= (p_{0(n+1)}+\ldots+p_{(m-1)(n+1)}z^{(m-1)s^0})\cdot...\cdot(p_{01}+\ldots+p_{(m-1)1}z^{(m-1)s^n})$$

звідки

$$h_{n+1}(z) = h_n(z^s)(p_{0(n+1)} + p_{1(n+1)}z^{s^0} + ... + p_{(m-1)(n+1)}z^{(m-1)s^0}).$$

Отже,

$$a_l^{(n+1)} = \sum_{l\equiv v(mod s)} a_{l-v}^{(n)} \cdot p_{v(n+1)} \leq$$

$$\leq \prod_{i=1}^{n}\max\{\sum_{\substack{0\leq j\leq m-1\\ j\equiv 0(mod s)}} p_{jr};...;\sum_{\substack{0\leq j\leq m-1\\ j\equiv s-1(mod s)}} p_{j(n+1)}\}\sum_{\substack{0\leq j\leq m-1\\ j\equiv l(mod s)}} p_{jr} \leq$$

$$\leq \prod_{i=1}^{n}\max\{\sum_{\substack{0\leq j\leq m-1\\ j\equiv 0(mod s)}} p_{j(n+1)};...;\sum_{\substack{0\leq j\leq m-1\\ j\equiv s-1(mod s)}} p_{j(n+1)}\}\cdot$$

$$\cdot\max\{\sum_{\substack{0\leq j\leq m-1\\ j\equiv 0(mod s)}} p_{j(n+1)};...;\sum_{\substack{0\leq j\leq m-1\\ j\equiv s-1(mod s)}} p_{j(n+1)}\} =$$

$$= \prod_{i=1}^{n+1}\max\{\sum_{\substack{0\leq j\leq m-1\\ j\equiv 0(mod s)}} p_{jr};...;\sum_{\substack{0\leq j\leq m-1\\ j\equiv s-1(mod s)}} p_{jr}\}.$$

Лему доведено. □

Лема 3. *Якщо для нескінченної стохастичної матриці* $||(p_{0k},...,p_{(m-1)k})||, (k \in N)$ *виконується умова*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\max\{\sum_{\substack{0\leq j\leq m-1\\ j\equiv 0(mod s)}} p_{jn};...;\sum_{\substack{0\leq j\leq m-1\\ j\equiv s-1(mod s)}} p_{jn}\} - \frac{1}{s}) < +\infty, \quad (2)$$

то для кожного натурального n *і* $r \in \{0, 1, ..., (m-1)\cdot(s^n - 1)\}$ *виконується нерівність:*

$$S^{||\bar{p}||}_{r,n} \leq \frac{C}{s^n},$$

де

$$C = \prod_{n=1}^{\infty}(s \cdot \max\{\sum_{\substack{0\leq j\leq m-1\\ j\equiv 0 (mod s)}} p_{jn}; ...; \sum_{\substack{0\leq j\leq m-1\\ j\equiv s-1 (mod s)}} p_{jn}\}). \qquad (3)$$

Доведення. Розглянемо вираз

$$g(z) = \prod_{j=1}^{n}(p_{0j} + p_{1j}z^{\frac{1}{s^j}} + ... + p_{(m-1)j}z^{\frac{(m-1)}{s^j}}) =$$

$$= (p_{01}+p_{11}z^{\frac{1}{s^1}}+...+p_{(m-1)1}z^{\frac{(m-1)}{s^1}})\cdot...\cdot(p_{0n}+p_{1n}z^{\frac{1}{s^j}}+...+p_{(m-1)n}z^{\frac{(m-1)}{s^n}})$$

Нехай

$$g(z) = \sum_j a_j z^{\frac{j}{s^n}}.$$

Якщо в k-ому ($k \in \{1, ..., n\}$) множнику добутку

$$g(z) = \prod_{j=1}^{n}(p_{0j} + p_{1j}z^{\frac{1}{s^j}} + ... + p_{(m-1)j}z^{\frac{(m-1)}{s^j}})$$

взяти член $p_{i_k k}z^{\frac{i_k}{s^k}}$, де $i_k \in \{0, 1, ..., m-1\}, \forall k \in \{1, ..., n\}$ і всі ці члени перемножити отримаємо вираз

$$z^r \prod_{k=1}^{n} p_{i_k k},$$

де

$$r = \sum_{k=1}^{n} \frac{i_k}{s^k},$$

тобто

$$a_{s^n\cdot r}=\sum\prod_{k=1}^{n}p_{\alpha_{i_{k-1}}},$$

де сума береться по все можливим наборам $(i_1;i_2;...;i_n)$ для яких

$$r=\sum_{k=1}^{n}\frac{i_k}{s^k}.$$

Отже,

$$a_{s^n\cdot r}=S^{||\bar{p}||}_{2^n\cdot r,n},s^n\cdot r\in\{0,1,...,(m-1)\cdot(s^n-1)\}\qquad(4)$$

Розглянемо многочлен

$$h(z)=\prod_{i=1}^{n}(p_{0(n-i+1)}+p_{1(n-i+1)}z^{s^{i-1}}+...+p_{(m-1)(n-i+1)}z^{(m-1)\cdot s^{i-1}}).$$

Оскільки

$$h(z)=g(z^{s^n}),$$

то враховуючи лему 2, маємо:

$$a_j\leq\prod_{i=1}^{n}\max\{\sum_{\substack{0\leq j\leq m-1\\ j\equiv 0(mods)}}p_{jr};...;\sum_{\substack{0\leq j\leq m-1\\ j\equiv s-1(mods)}}p_{jr}\}\ ,$$

тому

$$S^{||\bar{p}||}_{r,n}\leq\frac{C}{s^n}.$$

Зрозуміло, що

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\max\{\sum_{\substack{0\leq j\leq m-1\\ j\equiv 0(mods)}}p_{jn};...;\sum_{\substack{0\leq j\leq m-1\\ j\equiv s-1(mods)}}p_{jn}\}-\frac{1}{s})<+\infty,$$

звідки

$$\sum_{n=1}^{\infty}(s\cdot\max\{\sum_{\substack{0\le j\le m-1\\ j\equiv 0(mod s)}}p_{jn};...;\sum_{\substack{0\le j\le m-1\\ j\equiv s-1(mod s)}}p_{jn}\}-1)<+\infty,$$

Оскільки

$$p_{0k}+p_{1k}+...+p_{(m-1)k}=1,$$

то

$$s\cdot\max\{\sum_{\substack{0\le j\le m-1\\ j\equiv 0(mod s)}}p_{jn};...;\sum_{\substack{0\le j\le m-1\\ j\equiv s-1(mod s)}}p_{jn}\}\ge 1,$$

тому

$$+\infty>\prod_{n=1}^{\infty}(s\cdot\max\{\sum_{\substack{0\le j\le m-1\\ j\equiv 0(mod s)}}p_{jn};...;\sum_{\substack{0\le j\le m-1\\ j\equiv s-1(mod s)}}p_{jn}\})=C.$$

Зрозуміло, що

$$\prod_{n=1}^{k}(s\cdot\max\{\sum_{\substack{0\le j\le m-1\\ j\equiv 0(mod s)}}p_{jn};...;\sum_{\substack{0\le j\le m-1\\ j\equiv s-1(mod s)}}p_{jn}\})\le$$

$$\le\prod_{n=1}^{\infty}(s\cdot\max\{\sum_{\substack{0\le j\le m-1\\ j\equiv 0(mod s)}}p_{jn};...;\sum_{\substack{0\le j\le m-1\\ j\equiv s-1(mod s)}}p_{jn}\})=C.$$

Звідки

$$\prod_{n=1}^{k}(\max\{\sum_{\substack{0\le j\le m-1\\ j\equiv 0(mod s)}}p_{jn};...;\sum_{\substack{0\le j\le m-1\\ j\equiv s-1(mod s)}}p_{jn}\})\le\frac{C}{s^k},$$

тому

$$S_{m,n}^{||\bar{p}||}\le\frac{C}{s^n}.$$

$\square$

Лема 4. *Якщо розподіл випакдової величини* ξ *неперервний і* $u = [\frac{m-1}{s-1}]$, *то для кожного натурального* n *і довільного* $m \in \{0, 1, ..., (m-1) \cdot (s^n - 1)\}$, *виконується рівність*

$$F_\xi(\frac{m+1}{s^n}) - F_\xi(\frac{m}{s^n}) =$$

$$S_{r,n}^{||\bar{p}||} P\{ W_{n+1} \in [0;1]\} + S_{r-1,n}^{||\bar{p}||} P\{ W_{n+1} \in [1;2]\} + ...+$$

$$+S_{r-u,n}^{||\bar{p}||} P\{ W_{n+1} \in [u; u+1]\},$$

де

$$W_{n+1} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\xi_{n+j}}{s^j}.$$

Доведення.

Зрозуміло, що з неперервності розподілу випадкової величини ξ випливає неперервність розподілу W_{n+1}.

Оскільки

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_{n+j}}{s^j} \in [0; \frac{m-1}{(s-1) \cdot s^n}],$$

якщо $\alpha_{n+j} \in \{ 0, 1, ..., m-1\}$ для кожного натурального j, то умова

$$\frac{\xi_1}{s^1} + \frac{\xi_2}{s^2} + ... \in [\frac{m}{s^n}; \frac{m+1}{s^n}]$$

може виконуватись лише тоді, коли

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{\xi_1}{s^1} + \dfrac{\xi_2}{s^2} + ... + \dfrac{\xi_n}{s^n} = \dfrac{r}{s^n}; \\ \dfrac{\xi_{n+1}}{s^{n+1}} + \dfrac{\xi_{n+2}}{s^{n+2}} + ... \in [0; \dfrac{1}{s^n}]; \end{cases} \\ \text{..} \\ \begin{cases} \dfrac{\xi_1}{s^1} + \dfrac{\xi_2}{s^2} + ... + \dfrac{\xi_n}{s^n} = \dfrac{r-u}{s^n}; \\ \dfrac{\xi_{n+1}}{s^{n+1}} + \dfrac{\xi_{n+2}}{s^{n+2}} + ... \in [\dfrac{u}{s^n}; \dfrac{u+1}{s^n}]. \end{cases} \end{array}\right.$$

зрозуміло, що для кожного $h \in \{\ 0, 1, ..., u\}$:

$$P\{\ \frac{\xi_1}{s^1} + \frac{\xi_2}{s^2} + ... + \frac{\xi_n}{s^n} = \frac{r-h}{s^n}\} = S^{||\bar{p}||}_{r-h,n},$$

а також

$$P\{\ \frac{\xi_{n+1}}{s^{n+1}} + \frac{\xi_{n+2}}{s^{n+2}} + ... \in [\frac{h}{s^n}; \frac{h+1}{s^n}]\} = P\{\ \frac{\xi_{n+1}}{s^1} + \frac{\xi_{n+2}}{s^2} + ... \in [h; h+1]\},$$

звідки і випливає потрібне. □

Лема 5. *Якщо виконується умова* (2)*, то*

$$F_\xi(\frac{m}{s^n}) - F_\xi(\frac{r}{s^n}) \leq C(\frac{m}{s^n} - \frac{r}{s^n}), \forall m, r \in \{0, 1, ..., (m-1) \cdot s^n - 2\}, m \geq r$$

де константа C *визначається рівністю* (3).

Доведення.

Оскільки

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\max\{\sum_{\substack{0 \leq j \leq m-1 \\ j \equiv 0 (mod s)}} p_{jn}; ...; \sum_{\substack{0 \leq j \leq m-1 \\ j \equiv s-1 (mod s)}} p_{jn}\} - \frac{1}{s}) < +\infty,$$

то

$$\lim_{n \to \infty} \max\{\sum_{\substack{0 \leq j \leq m-1 \\ j \equiv 0 (mod s)}} p_{jn}; ...; \sum_{\substack{0 \leq j \leq m-1 \\ j \equiv s-1 (mod s)}} p_{jn}\} = \frac{1}{s},$$

звідки

$$\prod_{n=1}^{\infty} \max\{\sum_{\substack{0 \leq j \leq m-1 \\ j \equiv 0 (mod s)}} p_{jn}; ...; \sum_{\substack{0 \leq j \leq m-1 \\ j \equiv s-1 (mod s)}} p_{jn}\} = 0.$$

і за теоремою Леві розподіл ξ неперервний.

Враховуючи лему 3 та 4 отримаємо:

$$F_\xi(\frac{m+1}{s^n}) - F_\xi(\frac{m}{s^n}) =$$

$$S^{||\bar{p}||}_{r,n}P\{\ W_{n+1}\in[0;1]\}+S^{||\bar{p}||}_{r-1,n}P\{\ W_{n+1}\in[1;2]\}+...+$$

$$+S^{||\bar{p}||}_{r-u,n}P\{\ W_{n+1}\in[u;u+1]\}\leq\frac{C}{s^n}\cdot P\{\ W_{n+1}\in[0;u]\}=\frac{C}{s^n}.$$

Якщо $m>r$, то враховуючи останню нерівність маємо:

$$F_\xi(\frac{m}{s^n})-F_\xi(\frac{r}{s^n})=\sum_{i=0}^{m-r-1}(F_\xi(\frac{m-i}{s^n})-F_\xi(\frac{m-i-1}{s^n}))\leq C(\frac{m-r}{s^n})$$

Лему доведено. □

Теорема 6. *Якщо для нескінченної стохастичної матриці* $||(p_{0k},...,p_{(m-1)k})||$, *де* $(k\in N)$ *виконується умова* (2), *то* $F_\xi(x)$ *задовольняє умову Ліпшиця:*

$$|F_\xi(x_1)-F_\xi(x_2)|\leq C\cdot|x_1-x_2|\ \ \forall x_1,x_2\in R,$$

де стала C *визначається рівністю* (3).

Доведення. Нехай $x_2,x_1\in[0;\frac{m-1}{s-1}),x_2\geq x_1$. Оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[s^nz]}{s^n}=z,$$

то існує натуральне число N_0 таке, що

$$[s^nx_2]<\frac{m-1}{s-1}\cdot s^n-2,\forall n\in N,n>N_0$$

Враховуючи лему 5 маємо:

$$F_\xi(\frac{[s^nx_2]}{2^n})-F_\xi(\frac{[s^nx_1]}{2^n})\leq C(\frac{[s^nx_2]}{s^n}-\frac{[s^nx_1]}{s^n})\ \ \forall n\in N,n>N_0$$

Оскільки функція $F_\xi(x)$ неперервна, то з попередньої рівності при $n\to\infty$ маємо:

$$F_\xi(x_2)-F_\xi(x_1)\leq C(x_2-x_1)\ \ \forall x_2,x_1\in[0;\frac{m-1}{s-1}),x_2\geq x_1.$$

Покажемо, що

$$F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1) \le C(x_2 - x_1) \ \ \forall x_2, x_1 \in [0; \frac{m-1}{s-1}], x_2 \ge x_1$$

для цього достатньо показати, що

$$F_\xi(\frac{m-1}{s-1}) - F_\xi(x_1) \le C(\frac{m-1}{s-1} - x_1) \ \ \forall x_1 \in [0; \frac{m-1}{s-1}].$$

Оскільки остання нерівність при $x_1 = \frac{m-1}{s-1}$ виконується, розглянемо випадок, коли $x_1 \in [0; \frac{m-1}{s-1})$. Зрозуміло, що існує достатньо велике натуральне число N_1 таке, що

$$F_\xi(\frac{m-1}{s-1} - \frac{1}{n}) - F_\xi(x_1) \le C(\frac{m-1}{s-1} - \frac{1}{n} - x_1) \ \ \forall n \in N, n > N_1.$$

Спрямувавши в останній нерівності $n \to \infty$ отримаємо потрібне.

Оскільки при $x \le 0$:

$$F_\xi(x) = 0,$$

при $x \ge \frac{m-1}{s-1}$:

$$F_\xi(x) = 1,$$

при $x_2, x_1 \in [0; \frac{m-1}{s-1}]$:

$$|F_\xi(x_1) - F_\xi(x_2)| \le C \cdot |x_1 - x_2|,$$

то

$$|F_\xi(x_1) - F_\xi(x_2)| \le C \cdot |x_1 - x_2| \ \ \forall x_1, x_2 \in R.$$

□

3. Асимптотичні властивості модуля характеристичної функції випадкової величини ξ.

Теорема 7. *Для виконання рівності*

$$L_\xi = 1 \tag{5}$$

необхідно і достатньо, щоб

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{0\le i<j\le m-1}p_{i(n+1)}p_{j(n+1)}}{s^{2\cdot 1}}+\frac{\sum_{0\le i<j\le m-1}p_{i(n+2)}p_{j(n+2)}}{s^{2\cdot 2}}+...=0.$$

Доведення.

Достатність. Зрозуміло, що

$$f_{\frac{\psi_k}{s^k}}(t)=p_{0k}e^{\frac{it\cdot 0}{s^k}}+...+p_{(s-1)k}e^{\frac{it(s-1)}{s^k}}=\sum_{j=0}^{m-1}p_{jk}\sin(\frac{tj}{s^k})+i\sum_{j=0}^{m-1}p_{jk}\cos(\frac{tj}{s^k}),$$

тому

$$|f_{\frac{\xi_k}{s^k}}(t)|^2=(\sum_{j=0}^{m-1}p_{jk}\sin(\frac{tj}{s^k}))^2+(\sum_{j=0}^{m-1}p_{jk}\cos(\frac{tj}{s^k}))^2=$$

$$=1-4\sum_{0\le i<j\le m-1}p_{ik}p_{jk}sin^2(\frac{t(j-i)}{2s^k}).$$

Оскільки

$$f_\xi(t)=f_{\frac{\xi_1}{s^1}+\frac{\xi_2}{s^2}+...}(t)=f_{\frac{\xi_k}{s^1}}(t)f_{\frac{\psi_k}{s^2}}(t)\cdot ...,$$

то

$$|f_\xi(t)|^2=\prod_{k=1}^{\infty}(1-4\sum_{0\le i<j\le m-1}p_{ik}p_{jk}sin^2(\frac{t(j-i)}{2s^k})).$$

Оскільки для довільних $z_1,z_2,...,z_n\in[-1;1]$ виконується нерівність

$$(1-z_1)(1-z_2)...(1-z_n)\ge 1-(z_1+z_2+...+z_n)$$

і для кожного дійсного z :

$$|sin(z)|\le|z|,$$

то

$$|f_\xi(2\pi s^n)|^2 = \prod_{k=1}^{\infty}(1-4\sum_{0\le i<j\le m-1} p_{i(n+k)}p_{j(n+k)}sin^2(\frac{t(j-i)}{2s^k})) \geq$$

$$\geq 1-\sum_{k=1}^{\infty}(4\sum_{0\le i<j\le m-1} p_{i(n+k)}p_{j(n+k)}(\frac{t(j-i)}{2s^k})^2) \geq$$

$$\geq 1-(\pi(m-1))^2\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{s^{2k}}\sum_{0\le i<j\le m-1} p_{i(n+k)}p_{j(n+k)}).$$

Оскільки для кожного $n \in N$:

$$|f_\xi(2\pi s^n)|^2 \leq 1,$$

то врахуючи умову теореми, маємо:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, |f_\xi(2\pi s^n)|^2 = 1,$$

тому

$$L_\xi = 1.$$

Необхідність. Нехай

$$L_\xi = 1.$$

Зрозуміло, що існують послідовності (t_n) і (l_n) такі, що

$$|f_\psi(2\pi s^n)| \to 1 (n \to +\infty),$$

$$\pi s^{l_n} \leq t_n < \pi s^{l_n+1}.$$

Позначимо

$$k^* = inf\{\ l | l \in N, s^l \geq m-1\}.$$

Нехай

$$A = \prod_{k=1}^{l_n+k^*}(1-4\sum_{0\le i<j\le m-1} p_{ik}p_{jk}sin^2(\frac{t(j-i)}{2s^k}))$$

і

$$B=\prod_{k=l_n+k^*+1}^{\infty}(1-4\sum_{0\leq i<j\leq m-1}p_{ik}p_{jk}sin^2(\frac{t(j-i)}{2s^k}))=$$

$$=\prod_{k=l_n+1}^{\infty}(1-4\sum_{0\leq i<j\leq m-1}p_{i(k+k^*)}p_{j(k+k^*)}sin^2(\frac{t(j-i)}{2s^{k+k^*}}))$$

Зрозуміло, що

$$\frac{t_n(j-i)}{2s^{l_n+k^*+1}}=\frac{1}{s^{l_n+1}}\cdot\frac{t_n(j-i)}{2s^{k^*}}<\frac{1}{s^{l_n+1}}\cdot\frac{\pi\cdot s^{l_n+1}\cdot(m-1)}{2s^{k^*}}<\frac{\pi}{2}$$

і

$$\frac{t_n(j-i)}{2s^{l_n+1+k^*}}\geq\frac{1}{s^{l_n+1}}\cdot\frac{t_n}{2s^{k^*}}\geq\frac{1}{s^{l_n+1}}\cdot\frac{\pi\cdot s^{l_n}}{2s^{k^*}}\geq\frac{\pi}{2\cdot s\cdot s^{k^*}}.$$

Оскільки $A\leq 1$, то маємо:

$$|f_\xi(t_n)|^2\leq\prod_{r=1}^{\infty}(1-4\sum_{0\leq i<j\leq m-1}p_{i(r+l_n+k^*)}p_{j(r+l_n+k^*)}sin^2(\frac{\pi}{2\cdot s^{k^*}\cdot s^r})).$$

Оскільки

$$\lim_{n\to\infty}|f_\xi(t_n)|^2=1,$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{r=1}^{\infty}(1-4\sum_{0\leq i<j\leq m-1}p_{i(r+l_n+k^*)}p_{j(r+l_n+k^*)}sin^2(\frac{\pi}{2\cdot s^{k^*}\cdot s^r}))=1,$$

тому

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\ln(1-4\sum_{0\leq i<j\leq m-1}p_{i(r+l_n+k^*)}p_{j(r+l_n+k^*)}sin^2(\frac{\pi}{2\cdot s^{k^*}\cdot s^r}))=0.$$

Оскільки, $\ln(z+1)\leq z$ для кожного $z\in(-1;+\infty)$, то

$$\sum_{r=1}^{\infty}\ln(1-4\sum_{0\leq i<j\leq m-1}p_{i(r+l_n+k^*)}p_{j(r+l_n+k^*)}sin^2(\frac{\pi}{2\cdot s^{k^*}\cdot s^r}))\leq$$

$$\leq \sum_{r=1}^{\infty}(-4 \sum_{0\leq i<j\leq m-1} p_{i(r+l_n+k^*)}p_{j(r+l_n+k^*)}sin^2(\frac{\pi}{2\cdot s^{k^*}\cdot s^r})) \leq 0.$$

Таким, чином

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{\infty}(4 \sum_{0\leq i<j\leq m-1} p_{i(r+l_n+k^*)}p_{j(r+l_n+k^*)}sin^2(\frac{\pi}{2\cdot s^{k^*}\cdot s^r})) = 0.$$

Оскільки,

$$\sin(z) \geq \frac{2z}{\pi} \ \ \forall z \in [0;\frac{\pi}{2}],$$

то

$$\sum_{r=1}^{\infty}(\sum_{0\leq i<j\leq m-1} p_{i(r+l_n+k^*)}p_{j(r+l_n+k^*)}sin^2(\frac{\pi}{2\cdot s^{k^*}\cdot s^r})) \geq$$

$$\geq \sum_{r=1}^{\infty}(\sum_{0\leq i<j\leq m-1} p_{i(r+l_n+k^*)}p_{j(r+l_n+k^*)}(\frac{1}{s^{k^*}\cdot s^r})^2),$$

звідки

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{\infty}(\sum_{0\leq i<j\leq s-1} p_{i(r+l_n+1)}p_{j(r+l_n+1)}(\frac{1}{s^{k^*}\cdot s^r})^2) = 0$$

і

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{\sum_{0\leq i<j\leq m-1}p_{i(n+1)}p_{j(n+1)}}{s^{2\cdot 1}}+\frac{\sum_{0\leq i<j\leq m-1}p_{i(n+2)}p_{j(n+2)}}{s^{2\cdot 2}}+... = 0.$$

□ З умови (1) випливає умова (5), адже, як зазначалось, якщо ξ — дискретна, то $L_\xi = 1$.

Однак в цьому можливо переконатись безпосередньо, дійсно, якщо виконується умова (1), то

$$\max\{p_{0k};...;p_{(m-1)k}\} \to 1 (k\to +\infty),$$

тому для кожного $j \in \{\ 0, 1, ..., m-1\}$:

$$\max\{p_{0k}; ...; p_{(s-1)k}\} \neq p_{jk}$$

виконується рівність

$$\lim_{k\to+\infty} p_{jk} = 0.$$

Маємо:

$$\sum_{0\leq i<j\leq m-1} p_{i(n+1)}p_{j(n+1)} = \frac{1}{2}(1 - \sum_{0\leq j\leq m-1} p^2_{i(n+1)}) \to 0(n \to +\infty),$$

тобто для кожного ε існує $n_0 : \forall n > n_0$ виконується нерівність:

$$\sum_{0\leq i<j\leq m-1} p_{i(n+1)}p_{j(n+1)} < \varepsilon,$$

а тому при $n > n_0$

$$\frac{\sum_{0\leq i<j\leq m-1} p_{i(n+1)}p_{j(n+1)}}{s^{2\cdot 1}} + \frac{\sum_{0\leq i<j\leq m-1} p_{i(n+2)}p_{j(n+2)}}{s^{2\cdot 2}} + ... <$$

$$< \frac{\varepsilon}{s^{2\cdot 1}} + \frac{\varepsilon}{s^{2\cdot 2}} + ... = \frac{\varepsilon}{s^2 - 1} \to 0(\varepsilon \to 0).$$

Обернене твердження не є правильним, дійсно, для послідовності стохастичних векторів $(p_{0n}, p_{1n}, ..., p_{(m-1)n})$ заданих наступним чином:

$$\underbrace{\overline{e}, ...\overline{e}}_{1}, \overline{q}, \underbrace{\overline{e}, ...\overline{e}}_{2}, \overline{q}, ..., \overline{q}, \underbrace{\overline{e}, ...\overline{e}}_{n}, ...,$$

де

$$\overline{e} = (1; 0; ...; 0), \overline{q} = (\frac{1}{s}; \frac{1}{s}; ...; \frac{1}{s}; \underbrace{0; ...; 0}_{m-s}),$$

очевидно

$$\prod_{k=1}^{\infty} \max_{0\leq i\leq m-1}\{p_{ik}\} = 0,$$

хоча, з іншого боку, при $k = \frac{(n-1)n}{2} + n - 2$ маємо:

$$\frac{\sum_{0\leq i<j\leq m-1} p_{i(k+1)}p_{j(k+1)}}{s^{2\cdot 1}} + \frac{\sum_{0\leq i<j\leq m-1} p_{i(k+2)}p_{j(k+2)}}{s^{2\cdot 2}} + ... <$$

$$< \frac{s^{-2}C_s^2}{s^{2(n+1)}} + \frac{1}{s^{2\cdot(n+2)}} + \frac{1}{s^{2\cdot(n+3)}} + ... =$$

$$= \frac{s^{-1}(s-1)}{2s^{2(n+1)}} + \frac{1}{(s^2-1)s^{2(n+1)}} \to 0\ (n \to +\infty).$$

Література

[1] *Гончаренко.Я.В.* Асимптотичні властивості характеристичної функції випадкової величин з незалежними двійковими цифрами та згортки сингулярних розподілів. // Наукові записки НПУ ім. М.П. Драгоманова. Фіз.-мат. науки.– №3.– 2002.– С. 376-390.

[2] *Лукач Е.* Характеристические функции // М.: Наука.– 1979.– 424 с.

[3] *Працьовитий М.В., Макарчук О.П* Розподіл випадкової величин, зображеної двійковим дробом з двома надлишковими цифрами // Науковий часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки.– 2010.– №11.– С. 160-169.

[4] *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів // Київ: Вид-во НПУ ім. М.П. Драгоманова, 1998. – 296 с.

[5] *Працьовитий М.В.,Торбін.Г.М.* Один клас випадкових величин типу Джессена-Вінтнера // Доп.НАН України. – 1998. – №4. – С. 48-54.

[6] *Турбин А.Ф.,Працевитый Н.В.* Фрактальные множества, функции, распределения.–Киев: Наук.думка, 1992. – 2008 с.

[7] *Albeverio,S.,Goncharenko.Y.,Pratsiovyti,M.,Torbin,G.* Convolutions of distributions of random variables with independent binary digits // Random Oper. Stochastic Equations, 2007.– **15**, №1.– P. 89-97.

[8] *Eseen C.G* Fourier analysis of distribution functions.– Acta Mathematica, 1945, 77, P. 1-125.

[9] *Girault M.,* Les fonctions caracteristiques el leurs transformations.– Publ. Inst. Statist. Univ. Paris.– 1954.– 4.– P. 223-239.

[10] *Schvartz L.* Sur le module de la fonction caracteristicue du calcul des probabilites. – C. R. Acad. Sci. Paris.– 1941.– P. 418-421.

[11] *Jessen ,B., Wintner, A.* Distribution function and Riemann Zeta-function, //Trans. Amer. Math. Soc. 38.– 1935.– P. 48-88.

[12] *Levy P.* Sur les sries don't les termes sont des variables independantes// Studia math.– 3.– 1931.– P. 119-155.