Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2019, т. 16, № 3, 36–59

УДК 519.21

О. П. Макарчук

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені В. Винниченка, м. Кропивницький; makolpet@gmail.com

Лебегівські властивості розподілу випадкової величини з незалежними s-ковими цифрами

In the paper, we consider random variable ψ with independent s-adic digits. The necessary and sufficient conditions for the probability distribution function of ψ to satisfy Lipschitz and Hölder conditions are discussed.

У роботі розглядається випадкова величини ψ з незалежними s-ковими цифрами. Вивчаються (або: обговорюються) необхідні й достатні умови, коли функція розподілу ψ задовольняє умови Ліпшиця і Гьольдера.

Вступ

Нехай ψ_k – послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень $0,1,...,s-1$ з ймовірностями $p_{0k}, p_{1k}, ..., p_{(s-1)k}$ відповідно.

Випадкова величина

$$\psi = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k s^{-k}$$

називається випадковою величиною з незалежними s-ими цифрами.

За теоремою Джессена-Вінтнера [11] випадкова величина ψ має чистий розподіл, тобто або чисто дискретний, або чисто абсолютно неперервний, або чисто сингулярний.

За теоремою П.Леві [12] розподіл ψ дискретний тоді і тільки тоді, коли

$$\prod_{k=1}^{\infty} \max_{0\leq i\leq s-1}\{p_{ik}\} > 0.$$

Задача про тип розподілу випадкової величини ψ повністю розв'язана Чатерджі [10], а пізніше ця ж задача розв'язується в роботі Марсальї [13].

Теорема 1. *Випадкова величина ψ має чистий розподіл, причому*

1)дискретний тоді і тільки тоді, коли

$$\prod_{k=1}^{\infty} \max\{ p_{0n}; p_{1n}; ...; p_{(s-1)n}\} > 0; \tag{1}$$

2) абсолютно неперервний тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{k=1}^{+\infty}((p_{0k}-\frac{1}{s})^2+...+(p_{(s-1)k}-\frac{1}{s})^2) < +\infty; \tag{2}$$

3)сингулярний тоді і тільки тоді коли

$$\begin{cases} \prod\limits_{k=1}^{\infty} \max\{p_{ik}\}_{0\leq i\leq s-1} = 0; \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}((p_{0k}-\frac{1}{s})^2+...+(p_{(s-1)k}-\frac{1}{s})^2) = +\infty. \end{cases}$$

2.Умови Ліпшиця і Гьольдера для функції розподілу випадкової величини з незалежними s-ими цифрами.

Теорема 2. *Якщо $F_\psi(x)$ задовольняє умову Ліпшиця, тобто існує стала $L>0$ така, що*

$$|F_\psi(x_2)-F_\psi(x_1)|\leq L|x_2-x_1|\forall x_1,x_2\in R,$$

то

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\max_{0\leq i\leq s-1}\{p_{ik}\}-\frac{1}{s})<+\infty.$$

Доведення. Нехай (α_k) — послідовність така, що для кожного натурального k:

$$\alpha_k\in\{0,...,s-1\}=A_s$$

і

$$p_{\alpha_k k}=\max\{p_{0k};...;p_{(s-1)k}\}.$$

Якщо $F_\psi(x)$ задовольняє умову Ліпшиця, то, очевидно, розподіл ψ неперервний.

Зрозуміло, що

$$F_\psi(\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n(s-1)})-F_\psi(\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n(0)})=$$
$$P\{\psi\in[\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n(0)};\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n(s-1)}]\}=$$
$$=P\{\psi_1=\alpha_1\}P\{\psi_2=\alpha_2\}...P\{\psi_n=\alpha_n\}P\{\psi_{n+1}\in A_s\}P\{\psi_{n+2}\in A_s\}...=$$
$$=p_{\alpha_1 1}p_{\alpha_2 2}...p_{\alpha_n n}.$$

Оскільки

$$\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n(s-1)}-\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n(0)}=\frac{1}{s^n},$$

то за умовою

$$F_\psi(\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n(s-1)})-F_\psi(\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n(0)})\leq\frac{L}{s^n},$$

тобто

$$s^n p_{\alpha_1 1} p_{\alpha_2 2} ... p_{\alpha_n n} \leq L, \forall n \in N.$$

Позначимо

$$b_n = s^n p_{\alpha_1 1} p_{\alpha_2 2} ... p_{\alpha_n n},$$

тоді для кожного натурального n:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = s p_{\alpha_{n+1}(n+1)} = s \max\{p_{0(n+1)}; ...; p_{(s-1)(n+1)}\} \geq 1.$$

Отже, для кожного $n \in N$:

$$b_n \leq b_{n+1} \leq L,$$

тобто послідовність (b_n) збіжна, а тому

$$\prod_{k=1}^{\infty} (s \max\{p_{0k}; ...; p_{(s-1)k}\}) > 0.$$

Оскільки

$$s \max\{p_{0k}; ...; p_{(s-1)k}\} \geq 1,$$

то маємо:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (s \max\{p_{0k}; ...; p_{(s-1)k}\} - 1) < +\infty,$$

тому

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\max\{p_{0k}; ...; p_{(s-1)k}\} - \frac{1}{s}) < +\infty.$$

□

Теорема 3. *Якщо*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\max\{p_{0k}; ...; p_{(s-1)k}\} - \frac{1}{s}) < \infty,$$

то $F_\psi(x)$ *задовольняє умову Ліпшиця з сталою*

$$L = \prod_{k=1}^{\infty}(s\max\{p_{0k};...;p_{(s-1)k}\}),$$

яка є непокращуваною.

Доведення.

Нехай (α_k) — послідовність така, що для кожного натурального k:

$$\alpha_k \in \{0,...,s-1\} = A_s$$

і

$$p_{\alpha_k k} = \max\{p_{0k};...;p_{(s-1)k}\}.$$

Якщо

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\max\{p_{0k};...;p_{(s-1)k}\} - \frac{1}{s}) < +\infty,$$

то

$$\lim_{k\to\infty}\max\{p_{0k};...;p_{(s-1)k}\} = \frac{1}{s},$$

тому

$$\prod_{k=1}^{\infty}\max_{0\le i\le s-1}\{p_{ik}\} = 0$$

і за теоремою П.Леві розподіл ψ неперервний.

Оскільки

$$s\max\{p_{0k};...;p_{(s-1)k}\} \ge 1,$$

то маємо:

$$L = \prod_{k=1}^{\infty}(s\max\{p_{0k};...;p_{(s-1)k}\}) > 0,$$

звідки

$$s^n p_{\alpha_1 1}p_{\alpha_2 2}...p_{\alpha_n n} \le L, \forall n \in N.$$

Зрозуміло, що для заданого $n \in N$ і $m \in \{0, 1, ..., s^n - 1\}$, існують $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n \in A_s$ такі, що

$$\frac{m}{s^n} = \Delta^s_{\beta_1\beta_2...\beta_n(0)},$$

тоді

$$\frac{m+1}{s^n} = \Delta^s_{\beta_1\beta_2...\beta_n(s-1)}.$$

Маємо:

$$F_\psi(\frac{m+1}{s^n}) - F_\psi(\frac{m}{s^n}) = P\{\psi \in [\Delta^s_{\beta_1\beta_2...\beta_n(0)}; \Delta^s_{\beta_1\beta_2...\beta_n(s-1)}]\} =$$

$$= p_{\beta_1 1} p_{\beta_2 2} ... p_{\beta_n n} \leq p_{\alpha_1 1} p_{\alpha_2 2} ... p_{\alpha_n n} \leq \frac{L}{s^n}$$

Нехай $m, k \in \{0, 1, ..., s^n - 1\}$. Якщо $m > k$, то враховуючи останню нерівність маємо:

$$(F_\psi(\frac{m}{s^n}) - F_\psi(\frac{k}{s^n})) = \sum_{i=0}^{m-k-1} (F_\psi(\frac{m-i}{s^n}) - F_\psi(\frac{m-i-1}{s^n})) \leq \frac{L(m-k)}{s^n}.$$

Якщо $m = k$, то

$$F_\psi(\frac{m}{s^n}) - F_\psi(\frac{k}{s^n}) = \frac{m}{s^n} - \frac{k}{s^n}.$$

Отже

$$F_\psi(\frac{m}{s^n}) - F_\psi(\frac{k}{s^n}) \leq \frac{Lm}{s^n} - \frac{Lk}{s^n} \;\; \forall m, k \in \{0, 1, ..., s^n - 1\}, m \geq k.$$

Нехай $x_2, x_1 \in [0; 1), x_2 \geq x_1$.

Зрозуміло, що $[s^n x_2] \geq [s^n x_1]$ і $[s^n t] \leq s^n t \;\; \forall n \in N$, тому існує $n_0 \in N$:

$$[s^n x_2] \leq s^n - 1 \;\; \forall n > n_0.$$

Маємо:

$$F_\psi(\frac{[s^n x_2]}{s^n}) - F_\psi(\frac{[s^n x_1]}{s^n}) \leq (\frac{L[s^n x_2]}{s^n} - \frac{L[s^n x_1]}{s^n}) \;\; \forall n > n_0 \qquad (3)$$

Оскільки $F_{\psi}(x)$ неперервна і

$$\frac{[s^n x_j]}{s^n} = x_j - \frac{\{s^n x_j\}}{s^n} \to x_j (n \to \infty), j \in A_s,$$

то з нерівності (3) при $n \to \infty$ отримаємо:

$$F_{\psi}(x_2) - F_{\psi}(x_1) \le (x_2 - x_1) \ \ \forall x_2, x_1 \in [0;1), x_2 \ge x_1 \tag{4}$$

Перейшовши до границі $n \to \infty$ в нерівності:

$$F_{\psi}(1 - \frac{1}{n}) - F_{\psi}(x_1) \le (1 - \frac{1}{n} - x_1), x_1 \in [0;1)$$

отримаємо:

$$F_{\psi}(x_2) - F_{\psi}(x_1) \le (x_2 - x_1) \ \ \forall x_2, x_1 \in [0;1), x_2 \ge x_1 \tag{5}$$

Оскільки функція $F_{\psi}(x)$ неспадна, то останню нерівність можна переписати, у вигляді:

$$|F_{\psi}(x_2) - F_{\psi}(x_1)| \le L|x_2 - x_1| \ \ \forall x_1, x_2 \in [0;1].$$

звідки випливає, що $F_{\psi}(x)$ задовольняє умову Ліпшиця.

Оскільки

$$\frac{F_{\psi}(\Delta^s_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n (1)}) - F_{\psi}(\Delta^s_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n (0)})}{\frac{1}{s^n}} = s^n p_{\alpha_1 1} p_{\alpha_2 2} \ldots p_{\alpha_n n} \to L(n \to \infty)$$

то стала L є непокращуваною.

$\square$ Враховуючи теореми 2 і 3 отримуємо наступний наслідок.

Наслідок 4. *Функція $F_{\psi}(x)$ задовольняє умову Ліпшиця тоді і тільки тоді, коли*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\max\{p_{0k}; \ldots; p_{(s-1)k}\} - \frac{1}{s}) < +\infty. \tag{6}$$

В подальшому доведемо наступну лему.

Лема 5. *Для довільного стохастичного вектора* $(p_1, p_2, ..., p_s)$ *виконується нерівність:*

$$(p_1 - \frac{1}{s})^2 + ... + (p_s - \frac{1}{s})^2 \leq (s^3 + s)(\max\{p_1; ...; p_s\} - \frac{1}{s})^2.$$

Доведення. Зрозуміло, що існують набори індексів $j_1, ..., j_k$ і $i_1, ..., i_l$ такі, що

$$\{j_1; ...; j_k\} \cup \{i_1; ...; i_l\} = A_s,$$

$$p_{j_1} = \frac{1}{s} - x_{j_1}, ..., p_{j_k} = \frac{1}{s} - x_{j_k},$$

$$p_{i_1} = \frac{1}{s} + y_{i_1}, ..., p_{i_l} = \frac{1}{s} + y_{i_l},$$

$$x_{j_1}, ..., x_{j_k}, y_{i_1}, ..., y_{i_l} \geq 0.$$

Оскільки

$$p_1 + p_2 + ... + p_s = 1,$$

то

$$x_{j_1} + ... + x_{j_k} = y_{i_1} + ... + y_{i_l}.$$

Не обмежуючи загальності нехай

$$x_{j_1} = \max\{x_{j_1}; ...; x_{j_k}\}$$

і

$$y_{i_1} = \max\{y_{i_1}; ...; y_{i_l}\}.$$

Маємо:

$$x_{j_1} \leq x_{j_1} + ... + x_{j_k} = y_{i_1} + ... + y_{i_l} \leq s y_{i_1},$$

звідки

$$(p_1 - \frac{1}{s})^2 + ... + (p_s - \frac{1}{s})^2 = x_{j_1}^2 + ... + x_{j_k}^2 + y_{i_1}^2 + ... + y_{i_l}^2 \leq$$

$$s x_{j_1}^2 + s y_{i_1}^2 \leq (s^3 + s) y_{i_1}^2 = (s^3 + s)(\max\{p_1; ...; p_s\} - \frac{1}{s})^2.$$

□ З, вище доведеної леми, випливає, що з умови (6) випливає умова (2), що не випадково, адже з виконання умови Ліпщиця випливає абсолютна неперервність відповіного розподілу.

Однак, обернене твердження не є правильним, тобто випадкова величина ψ може мати абсолютно неперервний розподіл, але не задовольняти умову Ліпшиця, про що свідчить наступний приклад:

$$p_{0n} = \frac{1}{s} - \frac{1}{sn}, p_{(s-1)n} = \frac{1}{s} + \frac{1}{sn}, p_{1n} = ... = p_{(s-2)n} = \frac{1}{s} \ \ \forall n \in N.$$

Безумовно логічно розглянути питання, при яких умовах $F_\psi(x)$ задовольняє умову Гьольдера.

Потрібно зазначити, що не кожна функція розподілу її задовольняє.

Розглянемо функцію

$$g(x) = \begin{cases} 0, \text{якщо} \ \ x \in [-\infty; 0]; \\ \frac{1}{C(n+1)^2}(x-1+\frac{1}{2^n})^{\frac{1}{n+1}} + b_n, \text{якщо}\, x \in [1 - \frac{1}{2^n}; 1 - \frac{1}{2^{n+1}}], n \in Z_+; \\ 1, \text{якщо} \ \ x \in [1; +\infty]; \end{cases}$$

де

$$C = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2(k+1)^2}$$

і (b_k) — послідовність, задана рекурентим співвідношенням:

$$b_{k+1} = b_k + \frac{1}{2C(k+1)^2}, b_0 = 0.$$

Оскільки

$$g(1 - \frac{1}{2^n}) = b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2C(k+1)^2} \to 1 (n \to \infty),$$

то очевидно $g(x)$ є функціює розподілу.

Однак, якщо припустити, що $g(x)$ задовольняє умову Гьольдера з показником λ і сталою L, то матимемо:

$$\frac{g(1-\frac{1}{2^{n+1}})-g(1-\frac{1}{2^n})}{(1-\frac{1}{2^{n+1}}-(1-\frac{1}{2^n}))^\lambda}=\frac{2^{\lambda(n+1)-1}}{C(n+1)^2}\to+\infty(n\to+\infty),$$

маємо суперечність.

Теорема 6. *Якщо $F_\psi(x)$ задовольняє умову Гьольдера, тобто існують сталі $L>0$ і $\gamma\in(0;1)$ такі, що*

$$|F_\psi(x_2)-F_\psi(x_1)|\le L|x_2-x_1|^\gamma\forall x_1,x_2\in R,$$

то

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(\max\{p_{0k};...;p_{(s-1)k}\})}{n}<0.$$

Доведення. Нехай існують сталі $L>0$ і $\gamma\in(0;1)$ такі що

$$|F_\psi(x_2)-F_\psi(x_1)|\le L|x_2-x_1|^\gamma\forall x_1,x_2\in R,$$

Припустимо, що

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(\max\{p_{0k};...;p_{(s-1)k}\})}{n}=0,$$

тоді

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\max\{p_{0k};...;p_{(s-1)k}\}}=1.$$

Розглянемо число $\varepsilon\in(0;1-\frac{1}{s^\gamma})$, тоді існує послідовність (n_j) натуральних чисел, така що

$$\sqrt[n_j]{\prod_{k=1}^{n_j}\max\{p_{0k};...;p_{(s-1)k}\}}>\frac{1}{s^\gamma}+\varepsilon,\forall j\in N$$

тобто
$$\prod_{k=1}^{n_j} \max\{p_{0k}; ...; p_{(s-1)k}\} > (\frac{1}{s^\gamma} + \varepsilon)^{n_j}, \forall j \in N$$

Нехай (α_k) — послідовність, така що для кожного натурального k:
$$\alpha_k \in A_s$$

і
$$p_{\alpha_k k} = \max\{p_{0k}; ...; p_{(s-1)k}\}.$$

Маємо:
$$\frac{F_\psi(\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{n_j}(1)}) - F_\psi(\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{n_j}(0)})}{\frac{1}{s^{\gamma n}}} = s^{\gamma n} p_{\alpha_1 1} p_{\alpha_2 2} ... p_{\alpha_{n_j} n_j} >$$
$$s^{\gamma n_j}(\frac{1}{s^\gamma} + \varepsilon)^{n_j} = (1 + s^\gamma \varepsilon)^{n_j} \to \infty (j \to \infty)$$

тобто умова не виконується для чисел $x_2 = \Delta^s_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{n_j}(1)}$ і $x_1 = \Delta^s_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{n_j}(0)}$ при достатньо великому натуральному j. Прийшли до суперечності. □

Лема 7. *Якщо виконується умова*
$$\lim_{k\to\infty} \max\{p_{0k}; ...; p_{(s-1)k}\} = 1,$$

то функція $F_\psi(x)$ не задовольняє умову Гельдера.

Доведення. Позначимо
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(\max\{p_{0k}; ...; p_{(s-1)k}\}).$$

Оскільки
$$\frac{S_{n+1} - S_n}{n+1-n} = \ln(\max\{p_{0(n+1)}; ...; p_{(s-1)(n+1)}\}) \to 0 (n \to +\infty),$$

то за теоремою Штольця

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(\max\{p_{0k};...;p_{(s-1)k}\})}{n}=0,$$

і за теоремою 6 функція $F_\psi(x)$ не задовольняє умову Гельдера. □
Враховуючи попередню лему і теорему П.Леві маємо наступний наслідок

Наслідок 8. *Якщо*

$$\lim_{k\to\infty}\max\{p_{0k};...;p_{(s-1)k}\}=1$$

і

$$\prod_{k=1}^{\infty}\max_{0\le i\le s-1}\{p_{ik}\}=0,$$

то функція $F_\psi(x)$, будучи неперевною, не задовольняє умову Гельдера.

Лема 9. *Для довільного натурального n і дійсного x виконується рівність*

$$F_\psi(x)=\sum_{\substack{\alpha_1,...\alpha_n\\ \alpha_1,...\alpha_n\in\{0,...,s-1\}}} p_{\alpha_1 1}\cdot\ldots p_{\alpha_n n}F_{W_n}(s^n x-(s^{n-1}\alpha_1+s^{n-2}\alpha_2+...+\alpha_n)),$$

де

$$W_n=\frac{\psi_{n+1}}{s^1}+\frac{\psi_{n+2}}{s^2}+....$$

Доведення. Якщо випадкові величини χ_1 і χ_2 незалежні, причому випадкова величина χ_1 набуває значень $a_1, a_2, ...$ з ймовірностями $q_1, q_2, ...$ відповідно, то для дійсного $k>0$ маємо:

$$F_{\chi_1+\frac{\chi_2}{k}}(x)=\sum_j P\{\,\chi_1=a_j\}P\{\,a_j+\frac{\chi_2}{k}<x\}=\sum_j q_jF_{\chi_2}(k(x-a_j)).$$

Оскільки
$$\psi = \eta_n + \frac{W_n}{s^n},$$
де випадкова величина
$$\eta_n = \frac{\psi_1}{s^1} + \frac{\psi_2}{s^2} + ... \frac{\psi_n}{s^n}$$
набуває значень
$$\frac{\alpha_1}{s^1} + \frac{\alpha_2}{s^2} + ... + \frac{\alpha_n}{s^n}$$
з ймовірностями
$$p_{\alpha_1 1} \cdot p_{\alpha_2 2} \cdot ... p_{\alpha_n n}$$
по всім наборами $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ таким, що $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \{0, ..., s-1\})$ відповідно, то маємо потрібне. □

Лема 10. *Якщо для чисел $a, b, x, y \in [0; 1]$ виконуються нерівності*
$$|x - y| \geq \tau;$$
$$a = max\{a; b\} \leq \eta$$
для деяких додатних чисел τ і η, то
$$|ax - by| \leq (\eta + \frac{\eta}{\tau})|x - y|.$$

Доведення. Зрозуміло, що
$$|\frac{ax - by}{x - y}| = |a + \frac{ay - by}{x - y}| \leq |a| + \frac{|a - b||y|}{|x - y|} \leq a + \frac{a}{|x - y|} \leq \eta + \frac{\eta}{\tau},$$
звідки і випливає потрібне.

□

Лема 11. *Якщо $2 < s \in N$ і $\rho^* > 0, \lambda \in (0; 1)$, то для кожного $z \in [\frac{1}{s}; \frac{2}{s}]$*
$$1 + \rho^* z \leq A z^\lambda$$

де

$$A = max\{\varphi(\frac{1}{s}); \varphi(\frac{2}{s})\},$$

причому

$$\varphi(t) = \frac{1}{t^{\lambda}} + \rho^* z^{1-\lambda}.$$

Доведення. Оскільки

$$\varphi'(t) = -\lambda t^{-\lambda-1} + \rho^*(1-\lambda)t^{-\lambda} = \frac{t^{-\lambda}(\rho^*(1-\lambda)t-\lambda)}{t},$$

то легко бачити, що

$$\max_{z\in[\frac{1}{s};\frac{2}{s}]} \varphi(z) = max\{\varphi(\frac{1}{s}); \varphi(\frac{2}{s})\}$$

□

Теорема 12. *Якщо*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \max\{p_{0k}; ...; p_{(s-1)k}\}) = \gamma < 1, \tag{7}$$

і

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \max\{p_{0k}; ...; p_{(s-1)k}\}) = \rho > 0, \tag{8}$$

то $F_{\psi}(x)$ задовольняє умову Гьольдера, а саме: для кожного $\lambda \in (0; -\log_s \gamma)$ існує додатне дійсне число $C(\lambda)$ таке, що

$$|F_{\psi}(x_2) - F_{\psi}(x_1)| \leq C(\lambda)|x_2 - x_1|^{\lambda} \ \ \forall x_1, x_2 \in R.$$

Доведення. Нехай $\gamma_1 \in (\gamma; 1)$ тоді існує натуральне n_0 таке, що

$$\max\{p_{0k}; ...; p_{(s-1)k}\}) < \gamma_1 \ \ \forall k > n_0.$$

Покажемо, що

$$|F_{W_{n_0}}(x_2) - F_{W_{n_0}}(x_1)| \leq C_1|x_2 - x_1|^{-\log_s \gamma_1} \ \ \forall x_1, x_2 \in R.$$

Нехай

$$\Delta^s_{0,\beta_1\beta_2\ldots\beta_l\delta_{l+1}\delta_{l+2}\ldots} = x_1 > x_2 = \Delta^s_{0,\beta_1\beta_2\ldots\beta_l\rho_{l+1}\rho_{l+2}\ldots} \ \ (\delta_{l+1} \neq \rho_{l+1}).$$

Зрозуміло, що

$$[s^l x_1] = s^{l-1}\beta_1 + s^{l-2}\beta_2 + \ldots + \beta_l = [s^l x_2]$$

і за лемою 9 маємо:

$$|F_{W_{n_0}}(x_1) - F_{W_{n_0}}(x_2)| =$$

$$= \ p_{\beta_1(n_0+1+l)} \cdot \ldots \cdot p_{\beta_n(n_0+1+l)} |F_{W_{n_0+l}}(x_1^*) - F_{W_{n_0+l}}(x_2^*)| \leq$$

$$\leq \ \gamma_1^l |F_{W_{n_0+l}}(x_1^*) - F_{W_{n_0+l}}(x_2^*)|,$$

де

$$x_1^* = \{s^l x_1\} = \Delta^s_{0,\delta_{l+1}\delta_{l+2}\ldots}$$

і

$$x_2^* = \{s^l x_2\} = \Delta^s_{0,\rho_{l+1}\rho_{l+2}\ldots}.$$

Розглянемо випадки.

1) $\delta_{l+1} - \rho_{l+1} > 1$.

Оскільки

$$x_1^* - x_2^* \geq \frac{2}{s} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{s-1}{s^n} = \frac{1}{s}$$

і

$$F_{W_{n_0+l}}(x_1^*) - F_{W_{n_0+l}}(x_2^*) \leq 1,$$

то

$$F_{W_{n_0+l}}(x_1^*) - F_{W_{n_0+l}}(x_2^*) \leq s(x_1^* - x_2^*) \leq s(x_1^* - x_2^*)^{-\log_s \gamma_1}.$$

1) $\delta_{l+1} - \rho_{l+1} = 1$. Оскільки

$$x_1^* > x_2^*,$$

то можливі два випадки.

А) Існує натуральне число m таке, що

$$\delta_{l+1+m} - \rho_{l+1+m} < s-1$$

і для кожного $1 < j < m$:

$$\begin{cases} \delta_{l+1+j} = 0; \\ \rho_{l+1+j} = s-1, \end{cases}$$

тобто

$$x_1^* = \Delta^s_{0,(\rho_{l+1}+1)\underbrace{0,...,0}_{m}\delta_{l+1+m}...}$$

і

$$x_2^* = \Delta^s_{0,\rho_{l+1}\underbrace{s-1,...,s-1}_{m}\rho_{l+1+m}...}.$$

Маємо:

$[s^m x_1^*] - [s^m x_2^*] =$

$$(\rho_{l+1}+1)s^{m-1} - (\rho_{l+1}s^{m-1} + (s-1)s^{m-2} + (s-1)s^{m-3}...+s-1) = 1$$

і за лемою 9 маємо:

$|F_{W_{n_0}}(x_1^*) - F_{W_{n_0}}(x_2^*)| =$

$$p_{(\rho_{l+1}+1)(n_0+1+l)} \cdot p_{0(n_0+2+l)} \cdot ...p_{0(n_0+1+m+l)}F_{W_{n_0+l+m}}(x_1^{**}) -$$

$$-p_{\rho_{l+1}(n_0+1+l)} \cdot p_{(s-1)(n_0+2+l)} \cdot ... p_{(s-1)(n_0+1+m+l)}(F_{W_{n_0+l+m}}(x_2^{**})-1) \leq$$

$$p_{\rho_{l+1}(n_0+1+l)} \cdot p_{(s-1)(n_0+2+l)} \cdot ...p_{(s-1)(n_0+1+m+l)} +$$

$$+|p_{(\rho_{l+1}+1)(n_0+1+l)} \cdot p_{0(n_0+2+l)} \cdot ...p_{0(n_0+1+m+l)}F_{W_{n_0+l+m}}(x_1^{**}) -$$

$$-p_{\rho_{l+1}(n_0+1+l)} \cdot p_{(s-1)(n_0+2+l)} \cdot ...p_{(s-1)(n_0+1+m+l)}(F_{W_{n_0+l+m}}(x_2^{**})|,$$

де

$$x_1^{**} = \{s^m x_1^*\} = \Delta^s_{0,0\delta_{l+1+m}...},$$

$$x_2^{**} = \{s^m x_2^*\} = \Delta^s_{0,(s-1)\rho_{l+1+m}...}.$$

Зрозуміло, що

$$F_{W_{n_0+l+m}}(x_2^{**}) - F_{W_{n_0+l+m}}(x_1^{**}) \geq F_{W_{n_0+l+m}}(\Delta^s_{0,s-1}) - F_{W_{n_0+l+m}}(\Delta^s_{0,1}) =$$

$$= p_{(s-2)(n_0+1+m+l)} + ... + p_{1(n_0+1+m+l)} \geq \rho,$$

$$\frac{s-1}{s} \geq x_2^{**} - x_1^{**} \geq \frac{s-2}{s},$$

$$s^m x_1^* - s^m x_2^* = [s^m x_1^*] - [s^m x_2^*] + \{s^m x_1^*\} - \{s^m x_2^*\} \in [1 - \frac{s-1}{s}; 1 - \frac{s-2}{s}] \equiv [\frac{1}{s}; \frac{2}{s}]$$

і за лемою 10 та 11

$$|F_{W_{n_0}}(x_1^*) - F_{W_{n_0}}(x_2^*)| \leq \gamma_1^m + (1+\frac{1}{\rho})\gamma_1^m |x_2^{**} - x_1^{**}| = \gamma_1^m + (1+\frac{1}{\rho})\gamma_1^m |\{s^m x_2^*\} - \{s^m x_1^*\}| =$$

$$\gamma_1^m + (1+\frac{1}{\rho})\gamma_1^m |\, s^m x_2^* - s^m x_1^* - [s^m x_2^*] + [s^m x_1^*]| = \gamma_1^m + (1+\frac{1}{\rho})\gamma_1^m |\, 1 + s^m(x_1^* - x_2^*)| \leq$$

$$\leq \gamma_1^m + (1+\frac{1}{\rho})\gamma_1^m |\, s^m(s^2+1)(x_1^* - x_2^*)| = \gamma_1^m (1 + (s^2 + 1 + \frac{s^2+1}{\rho}))|s^m x_1^* - s^m x_2^*| \leq$$

$$\leq A\gamma_1^m |s^m x_1^* - s^m x_2^*|^{-\log_s \gamma_1} = A|x_1^* - x_2^*|^{-\log_s \gamma_1},$$

де

$$A = max\{g(\frac{1}{s}); g(\frac{2}{s})\},$$

$$g(t) = t^{\log_s \gamma_1} + (s^2 + 1 + \frac{s^2+1}{\rho})t^{1+\log_s \gamma_1}.$$

В)Виконуються рівності:

$$x_1^* = \Delta^s_{0,(\rho_{l+1}+1)\delta_{l+1}...}$$

і

$$x_2^* = \Delta^s_{0,\rho_{l+1}\rho_{l+1}...},$$

де

$$\delta_{l+1} - \rho_{l+1} < s - 1$$

Оскільки

$$x_1^* - x_2^* \geq \frac{1}{s} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{s-1}{s^n} + \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2},$$

то

$$F_{W_{n_0+l}}(x_1^*) - F_{W_{n_0+l}}(x_2^*) \leq 1 \leq s^2(x_1^* - x_2^*) \leq s^2(x_1^* - x_2^*)^{-\log_s \gamma_1}.$$

Отже,

$$F_{W_{n_0+l}}(x_1^*) - F_{W_{n_0+l}}(x_2^*) \leq B(x_1^* - x_2^*)^{-\log_s \gamma_1},$$

де

$$B = max\{g(\frac{1}{s}); g(\frac{2}{s}); s^2\}.$$

Маємо: $|F_{W_{n_0}}(x_1) - F_{W_{n_0}}(x_2)| =$

$$= \gamma_1^l |F_{W_{n_0+l}}(x_1^*) - F_{W_{n_0+l}}(x_2^*)| \leq \gamma_1^l B(\{s^l x_1\} - \{s^l x_2\})^{-\log_s \gamma_1} =$$

$$= \gamma_1^l B(s^l x_1 - s^l x_2)^{-\log_s \gamma_1} = B(x_1 - x_2)^{-\log_s \gamma_1}.$$

Враховуючи лему 9 маємо:

$$|F_\psi(z_1) - F_\psi(z_2)| = \sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n \\ \alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n \in \{0,\ldots,s-1\}}} p_{\alpha_1 1} \cdot p_{\alpha_2 2} \cdot \ldots p_{\alpha_n n} \times$$

$$\times \left| F_{W_{n_0}}(s^n z_1 - (s^{n-1}\alpha_1 + s^{n-2}\alpha_2 + \ldots + \alpha_n)) - \right.$$

$$\left. - F_{W_{n_0}}(s^n z_2 - (s^{n-1}\alpha_1 + s^{n-2}\alpha_2 + \ldots + \alpha_n)) \right| \leq$$

$$\sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n \\ \alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n \in \{0,\ldots,s-1\}}} p_{\alpha_1 1} \cdot p_{\alpha_2 2} \cdot \ldots p_{\alpha_n n} \times ((s^{n_0})^{-\log_s \gamma_1} \sum_j B|z_1 - z_2|^{-\log_s \gamma_1}) =$$

$$= \frac{B}{\gamma_1^{n_0}} |z_1 - z_2|^{-\log_s \gamma_1}.$$

$\square$

Теорема 13. *Нехай*

$$\varliminf_{k\to\infty} \min\{p_{0k}; ...; p_{(s-1)k}\} > 0,$$

$$\lim_{k\to+\infty} \max\{p_{0k}; ...; p_{(s-1)k}\} = \gamma < 1.$$

Якщо

$$\varlimsup_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} (\max\{p_{0j}; ...; p_{(s-1)j}\} - \gamma) < +\infty,$$

то $F_\psi(x)$ задовольняє умову Гьольдера з показником $-\log_s \gamma$, який є непокращуваним.

Якщо

$$\varlimsup_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} (\max\{p_{0j}; ...; p_{(s-1)j}\} - \gamma) = +\infty,$$

то $F_\psi(x)$ задовольняє умову Гьольдера з довільним показником $\lambda \in (0; -\log_s \gamma)$, але не задовольняє умову Гьольдера з показником $-\log_s \gamma$.

Доведення. Нехай

$$\varepsilon_j = \max\{p_{0j}; ...; p_{(s-1)j}\} - \gamma$$

і

$$\varlimsup_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} (\max\{p_{0j}; ...; p_{(s-1)j}\} - \gamma) < +\infty,$$

тоді існує стала C така, що

$$\sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j < C, \;\; \forall k \in N,$$

Можливі два випадки:

1) виконується умова:

$$D=\sum_{j=1}^{+\infty}\varepsilon_j<+\infty.$$

Нехай δ — достатньо мале додатне число, тоді існує $M\in N$ таке, що

$$\sum_{j=1}^{k}\varepsilon_j\in(D-\delta;D+\delta)\ \ \forall j>M,j\in N.$$

Для довільних натуральних $r>l>M$ маємо:

$$\sum_{l\leq j\leq r}\varepsilon_j=\sum_{j=1}^{r}\varepsilon_j-\sum_{j=1}^{l}\varepsilon_j>D-\delta-(D+\delta)=-2\delta;$$

$$\sum_{l\leq j\leq r}\varepsilon_j=\sum_{j=1}^{r}\varepsilon_j-\sum_{j=1}^{l}\varepsilon_j<D+\delta-(D-\delta)=2\delta;$$

Позначимо

$$E=\max_{l\leq j\leq r\leq M}\{\sum_{l\leq j\leq r}\varepsilon_j\},$$

тоді

$$\sum_{l\leq j\leq r}\varepsilon_j<max\{E;2\delta\}=G\ \ \forall l,r\in N.$$

Зрозуміло, що

$$\prod_{j=l}^{r}\max\{p_{0j};...;p_{(s-1)j}\}=$$

$$=\prod_{j=l}^{r}(\varepsilon_j+\gamma)\leq\gamma^{l-r}\prod_{j=l}^{r}(1+\frac{\varepsilon_j}{\gamma})\leq\gamma^{l-r}e^{\sum_{l\leq j\leq r}\frac{\varepsilon_j}{\gamma}}\leq\gamma^{l-r}e^{\frac{G}{\gamma}}.$$

2) виконується умова:

$$\sum_{j=1}^{+\infty}\varepsilon_j=-\infty.$$

Існує $K \in N$ таке, що

$$\varepsilon_j < 0 \ \ \forall j > K, j \in N.$$

Позначимо

$$H = \max_{l \le j \le r \le K} \{ \sum_{l \le j \le r} \varepsilon_j \},$$

тоді

$$\sum_{l \le j \le r} \varepsilon_j < max\{K; 0\} = T \ \ \forall l, r \in N.$$

Зрозуміло, що

$$\prod_{j=l}^{r} \max\{p_{0j}; ...; p_{(s-1)j}\} = \prod_{j=l}^{r} (\varepsilon_j + \gamma) \le \gamma^{l-r} \prod_{j=l}^{r} (1 + \frac{\varepsilon_j}{\gamma}) \le \gamma^{l-r} e^{\frac{T}{\gamma}}.$$

Отже, для константи $L = \max\{e^{\frac{G}{\gamma}}; e^{\frac{T}{\gamma}}\}$ маємо:

$$\prod_{j=l}^{r} \max\{p_{0j}; ...; p_{(s-1)j}\} \le L\gamma^{l-r} \ \ \forall l \ge r \in N$$

і враховуючи доведення теореми 12 легко бачити, що

$$|F_\psi(x_1) - F_\psi(x_2)| \le |z_1 - z_2|^{-\log_s \gamma} \ \ \forall x_1, x_2 \in R$$

Покажемо, що показник $-\log_s \gamma$ є непокращуваним. Припустимо протилежне, тобто $F_\psi(x)$ задовольняє умову Гьольдера з показником $-\log_s \gamma_1$, де $\gamma_1 < \gamma$.

Нехай (α_k) — послідовність, така що для кожного натурального k:

$$\alpha_k \in A_s$$

і

$$p_{\alpha_k k} = \max\{p_{0k}; ...; p_{(s-1)k}\}.$$

Оскільки для довільних $z_1, z_2, ..., z_n \in [-1; 1]$ виконується нерівність

$$(1-z_1)(1-z_2)...(1-z_n) \geq 1-(z_1+z_2+...+z_n),$$

то маємо:

$$\frac{F_\psi(\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n(s-1)}) - F_\psi(\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n(0)})}{(\frac{1}{s})^{-\log_s \gamma_1}} = \prod_{i=1}^{n}(\frac{\gamma}{\gamma_1} + \frac{\varepsilon_i}{\gamma_1}) \geq$$

$$\geq \sum_{i=1}^{n}(\frac{\gamma}{\gamma_1} + \frac{\varepsilon_i}{\gamma_1}) \to +\infty (n \to \infty).$$

Нехай

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sum_{j=1}^{k}(\max\{p_{0j}; ...; p_{(s-1)j}\} - \gamma) = +\infty.$$

Враховуючи теорему 12 легко бачити, що $F_\psi(x)$ задовольняє умову Гьольдера з довільним показником $\lambda \in (0; -\log_s \gamma)$.

Покажемо, що $F_\psi(x)$ не задовольняє умову Гьольдера з показником $-\log_s \gamma$. Припустимо протилежне.

Зрозуміло, що існує послідовність натуральних чисел (n_k) така, що

$$\lim_{k\to+\infty} \varepsilon_{n_k} = +\infty.$$

Маємо:

$$\frac{F_\psi(\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{n_j}(s-1)}) - F_\psi(\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{n_j}(0)})}{(\frac{1}{s})^{-\log_s \gamma}} = \prod_{i=1}^{n_j}(1 + \frac{\varepsilon_i}{\gamma}) \geq$$

$$\geq \sum_{i=1}^{n_j}(1 + \frac{\varepsilon_i}{\gamma}) \to +\infty (j \to \infty).$$

□

Потрібно відмітити, що умови (7) та (8) не є необхідними для того, щоб $F_\psi(x)$ задовольнала умову Гьольдера. Наведемо відповідний приклад.

Нехай δ — достатньо мале додатне число і

$$(p_{0k};...;p_{(s-1)k}) = \begin{cases} (\frac{1}{s};\frac{1}{s};...;\frac{1}{s};\frac{1}{s}-\delta;\frac{1}{s}+\delta), \text{якщо } k \text{ — парне;} \\ (1-\frac{1}{2n};0;...;0;\frac{1}{2n}), \text{якщо } k \text{ — непарне} \end{cases}$$

Маємо:

$$\psi = \eta_1 + \eta_2,$$

де

$$\eta_1 = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\psi_{2j}}{(s^2)^j},$$

$$\eta_2 = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\psi_{2j-1}}{s^{2j-1}},$$

Враховуючи теорему 12 легко бачити, що $F_{\eta_1}(x)$ задовольняє умову Гьольдера показником $\lambda \in (0; -\log_s \gamma)$.

Література

[1] *Гочаренко Я.В, Працьовитий М.В, Торбін Г.М.* Топологометричні та фрактальні властивості згортки двох сингулярних розподілів випадкових величин з незалежними двійковими цифрами // Теор. ймов. та мат. стат.– 2002.– Вип.– 67.– С. 9-13.

[2] *Литвинюк А.А.* Про типи розподілів сум одного класу випадкових степеневих рядів з незалежними однаково розподіленими коефіцієнтами // Укр. мат. журнал, 1999.– 51. – №1.– С. 128-132.

[3] *Працьовитий М.В.* Розподіли сум випадкових степеневих рядів // Доп. НАН України.– 1996.– №5.– С. 32-37.

[4] *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів // Київ: Вид-во НПУ імені М.П Драгоманова.– 1998.– 296 с.

[5] *Турбин А.Ф.,Працевитый Н.В.* Фрактальные множества, функции, распределения.– Киев: Наук. думка, 1992.– 208 с.

[6] *Винишин Я.Ф, Морока В.А.* О функции распределения суммы случайных степенных рядов // Стохастический анализ и его приложения – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. – С. 17-25.

[7] *Лукач Е.* Характеристические функции.– М.: Наука, 1979.– 424 с.

[8] *Натансон И.* Теория функций вещественной переменной // М: Наука.– 1974. – 480 с.

[9] *Albeverio S.,Goncharenko Ya.,Pratsiovyti M.,Torbin G.* Convolutions of distributions of random variables with independent binary digits //Random Oper. Stochastic Equations, 2007.– **15**.– №1.– P. 89-97.

[10] *Chaterji S.* Certain induced measures on the unit interval // Journal London Math.Soc.– 1963.– 38.– P. 325-331.

[11] *Jessen B., Wintner A.* Distribution function and Riemann Zeta-function // Trans. Amer. Math. Soc. 38.– 1935.– P. 48-88.

[12] *Levy P.* Sur les series dont les termes sont des variables independantes // Studia math., 3.– 1931.– P. 119-155.

[13] *Marsaglia G.* Random variables with independent binary digits // Ann. Math. Statist.– 1971.– №42.– P. 1922-1929.

[14] *Salem R.* On some singular monotonic function which are stricly increasing // Trans. Amer. Math. Soc.– 1943.– Vol. 53.– P. 427-439.