Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2019, т. 16, № 3, 19–35

УДК 519.21

М. В. Працьовитий, Р. В. Кривошия, О. П. Макарчук

[1] *НПУ імені М. П. Драгоманова, Інститут математики НАН України, Київ; prats4444@gmail.com*

[2] *НПУ імені М. П. Драгоманова, Київ; vikasvat2013@gmail.com*

[3] *Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені В. Винниченка, м. Кропивницький; makolpet@gmail.com*

Перетворення та дискретні динамічні системи на [0; 1], що зберігають рівномірний розподіл послідовностей

In the paper, we consider some sufficient conditions for functions from $[0, 1]$ to R to preserve a property of uniform distribution of sequences. We study the relation between Q_2-normal numbers and sequences produced by shift operator for digits of Q_2-representation of numbers.

Key words: Q_2-representation of real numbers; Q_2-normal number; simply normal number; shift operator; crinkly function; uniformly distributed sequence.

У роботі розглядається ряд достатніх умов збереження властивості рівномірного розподілу послідовностей для функцій, що діють з $[0; 1]$ в R. Досліджується зв'язок між Q_2-нормальними числами та послідовностями, продукованими оператором зсуву цифр Q_2-зображення чисел.

Ключові слова: Q_2-зображення дійсних чисел; Q_2-нормальне число; слабо нормальне число; оператор зсуву цифр; звивиста функція; рівномірно розподілена послідовність.

1. Вступ

Послідовність (x_n) називається рівномірно розподіленою за модулем 1, якщо для довільного інтервалу $(a;b) \subset [0;1]$ виконується умова

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n\big((a;b)\big)}{n} = b - a,$$

де $N_n((a;b))$ — кількість чисел серед $\{x_1\}, \{x_2\}, \ldots, \{x_n\}$, які належать інтервалу $(a;b)$.

Нехай $(q_0;q_1)$ — стохастичний вектор з строго додатними координатами. Відомо [2], що для довільного дійсного числа $x \in [0;1]$ існує нескінченний двійковий вектор $(\alpha_1;\alpha_2;\ldots;\alpha_n;\ldots)$ такий, що

$$x = \beta_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_2} q_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_3} q_{\alpha_2} q_{\alpha_1} + \ldots + \beta_{\alpha_{n+1}} q_{\alpha_n} q_{\alpha_{n-1}} \ldots q_{\alpha_1} + \ldots, \quad (1)$$

де $\beta_0 = 0, \beta_1 = q_0$.

Представлення (1) називається Q_2-представленням числа x і має наступне зображення:

$$x = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}.$$

Якщо $q_0 = \frac{1}{2}$, то отримаємо класичне двійкове зображення з відповідним представленням:

$$x = \Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots} = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\alpha_j}{2^j}.$$

Існує зчисленна множина чисел виду $\Delta^{Q_2}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_k 1(0)}$, які мають 2 зображення (і відповідно представлення):

$$\Delta^{Q_2}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_k 1(0)} = \Delta^{Q_2}_{\gamma_1\ldots\gamma_k 0(1)},$$

для всіх інших чисел з відрізку $[0;1]$ відповідне представлення однозначне.

Вперше поняття рівномірно розподіленої послідовності ввів Герман Вейль в 1919-му році в роботі [6], де він обгрунтував рівномірну розподіленість послідовності $\{n\gamma\}(\gamma \notin Q)$.

Означення 1. *Число*

$$x = \Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots} = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\alpha_j}{2^j}$$

називається слабонормальним за основою 2, якщо

$$\frac{w_k}{k} \to \frac{1}{2} \ \ (k \to \infty),$$

де w_k *— кількість нулів серед чисел* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$.

Означення 2. *Число*

$$x = \Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots} = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\alpha_j}{2^j}$$

називається нормальним за основою 2, якщо для довільного двійкового вектора $(c_1; c_2; ...; c_r)$ *виконується умова:*

$$\frac{w_k}{k} \to \frac{1}{2^r} \ \ (k \to \infty),$$

де w_k *— кількість блоків цифр* $(c_1; c_2; ...; c_r)$*, серед набору цифр* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$.

Останні два означення ввів Еміль Борель [4].В роботі [9] показано, що число x є нормальним за основою 2 тоді і тільки тоді, коли послідовність $\{2^n x\}$ рівномірно розподілена на відрізку $[0; 1]$. Останній факт в термінах дискретних динамічних систем означає, що орбіта точки t породжена функцією $T(x) = \{2x\}$ є рівномірно розподіленою послідовністю лише тоді, коли t є нормальним за основою 2 числом. Цілком природною є проблема поглиблення відповідного результату для Q_2-представлення дійсних чисел.

2. Перетворення, що зберігають рівномірний розподіл послідовностей відрізку $[0;1]$.

Означення 3. *Будемо говорити, що функція* $\varphi(x)\colon [0;1] \to \mathbb{R}$ *задовольняє властивість SUD(save uniform distribution), якщо для кожної рівномірно розподіленої послідовності* $(x_n) \subseteq [0;1]$, *послідовність* $(\varphi(x_n))$ *також є рівномірно розподіленою.*

Відомими [1] є наступні властивості:

1) якщо послідовність (x_n) рівномірно розподілена, то $(x_n+\beta)$ також рівномірно розподілена, для довільного $\beta \in \mathbb{R}$;

2) якщо (x_n) рівномірно розподілена і $(y_n)\colon \lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \gamma - const$, то (y_n) рівномірно розподілена;

3) якщо (x_n) рівномірно розподілена, то послідовність (mx_n) рівномірно розподілена, для кожного $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Відомо [3], що з існування границі

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f\left(\{x_j\}\right)$$

випливає, що $f(x)$ є інтегровною по Ріману функцією на відрізкі $[0;1]$, тобто маємо наслідок.

Наслідок 1. *Якщо* $\varphi(x)$ *володіє властивістю SUD, то множина точок розриву функції* $\varphi(x)$ *має міру Лебега 0.*

Сформулюємо необхідний критерій того, що функція володіє властивістю SUD.

Теорема 2. *Для того, щоб функція* $\varphi(x)$ *володіла властивістю SUD необхідно щоб виконувалась нерівність* $A(\varphi) \geq 1$, *де*

$$A(\varphi) = \sup_{x\in[0;1]} \varphi(x) - \inf_{x\in[0;1]} \varphi(x).$$

Доведення. Припустимо, що $A(\varphi) < 1$. Можливі два випадки:

а) існує $l \in \mathbb{Z}$ таке, що

$$l \leq \inf_{[0;1]} \varphi(x) < \sup_{[0;1]} \varphi(x) \leq l + 1.$$

Маємо:

$$\inf_{[0;1]} \varphi(x) = l + \alpha,$$

$$\sup_{[0;1]} \varphi(x) = l + \beta,$$

$$\beta - \alpha < 1,$$

$$0 \leq \alpha, \beta \leq 1.$$

Якщо $\alpha = 0$, то $\beta < 1$ і $\{\varphi(x)\} \in [0; \beta]$.
Якщо $\beta = 1$, то $\alpha > 0$ і $\{\varphi(x)\} \in [\alpha; 1) \cup \{0\}$, маємо суперечність.
б) існує $l \in \mathbb{Z}$ таке, що

$$\inf_{[0;1]} \varphi(x) \leq l \leq \sup_{[0;1]} \varphi(x).$$

Таким чином:

$$\inf_{[0;1]} \varphi(x) = l - 1 + \alpha,$$

$$\sup_{[0;1]} \varphi(x) = l + \beta,$$

$$0 \leq \alpha, \beta \leq 1.$$

Якщо $\alpha \in \{0; 1\}$ або $\beta \in \{0; 1\}$, то маємо випадок a), тому нехай $\alpha, \beta \in (0; 1)$.

Маємо:

$$\beta - (\alpha - 1) = \beta - \alpha + 1 < 1,$$

$$\beta < \alpha,$$

$$\{\varphi(x)\} \in [\alpha; 1) \cup [0; \beta] \not\equiv [0; 1).$$

$\square$ В подальшому будемо розглядати випадок, коли $\varphi(x) \colon [0; 1] \to [m; M]$, де відповідно

$$m = \min_{[0;1]} (\varphi(x)), \quad M = \max_{[0;1]} (\varphi(x)).$$

Теорема 3. *Лінійна функція $\varphi(x) = kx + l$ володіє властивістю SUD тоді і тільки тоді, коли $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.*

Доведення. Якщо $\varphi(x)$ володіє властивістю SUD, то

$$A(\varphi) = |k| \geq 1.$$

Нехай $|k| \geq 1$, тоді враховуючи властивості 1-3, достатньо розглянути випадок $k \geq 1$ і $l = 0$. Якщо (x_n) рівномірно розподілена, то оскільки $[kx_n] \in \{0; \dots; [k]\}$, умова $\{kx_n\} \in (a; b) \subseteq [0; 1]$ виконується тільки тоді, коли

$$[kx_n] = 0 \Rightarrow kx_n \in (a; b) \Rightarrow x_n \in \left(\frac{a}{k}; \frac{b}{k}\right) \bigcap \left[0; \frac{1}{k}\right) = \left(\frac{a}{k}; \frac{b}{k}\right);$$

$$[kx_n] = 1 \Rightarrow kx_n - 1 \in (a; b) \Rightarrow x_n \in \left(\frac{a+1}{k}; \frac{b+1}{k}\right) \bigcap \left[\frac{1}{k}; \frac{2}{k}\right) =$$

$$= \left(\frac{a+1}{k}; \frac{b+1}{k}\right);$$

....

$$[kx_n] = [k] \Rightarrow kx_n - [k] \in (a; b) \Rightarrow$$

$$x_n \in \left(\frac{a+[k]}{k}; \frac{b+[k]}{k}\right) \bigcap \left[\frac{[k]}{k}; \frac{[k]+1}{k}\right) = \left(\frac{a+[k]}{k}; \frac{b+[k]}{k}\right).$$

Нехай a, b – достатньо малі додатні числа такі, що виконується умова $0 < a < b < \{k\}$.

Маємо:

$$\frac{N_m(kx_n; (a; b))}{m} = \sum_{j=0}^{[k]} \frac{N\left(x_n; \left(\frac{a+j}{k} \frac{b+j}{k}\right)\right)}{m} \rightarrow$$

$$\rightarrow \sum_{j=0}^{[k]} \left(\frac{b+j}{k} - \frac{a+j}{k}\right) = \frac{[k]+1}{k}(b-a) > b - a \ (m \to \infty).$$

□

Означення 4. *Функція, яка задана на деякому відрізку $[a;b]$ і набуває на ньому найбільшого і найменшого значення, називається звивистою, якщо на кожному відрізку $[c;d] \subset [a;b]$ вона набуває свого найбільшого та найменшого значення.*

Теорема 4. *Якщо функція $\varphi(x)$ є неперервною та звивистою, то вона не володіє властивістю SUD.*

Доведення. Зафіксуємо деяке $a \in (m;M)$. Розглянемо множину $A = \{x \mid \varphi(x) = a\}$. Припустимо, що існує інтервал $(\alpha;\beta) \subset [0;1]\colon\ A \cap (\alpha;\beta) = \varnothing$.

Однак з іншого боку існують $\alpha^*, \beta^* \in (\alpha;\beta)\colon$

$$\varphi(\alpha^*) = m, \varphi(\beta^*) = M.$$

і за теоремою Коші існує $\gamma \in (\alpha^*;\beta^*)\colon\ \varphi(\gamma) = a$.

Маємо суперечність.

Нехай $x_n = \{n\sqrt{2}\}$, тоді зрозуміло, що (x_n) рівномірно розподілена. Будемо послідовно вибирати значення $z_n, n \in N$ наступним чином:

$$z_1 \in A\colon |x_1 - z_1| < \frac{1}{1},$$

$$z_2 \in A\colon |x_2 - z_2| < \frac{1}{2},$$

....

$$z_k \in A\colon |x_k - z_k| < \frac{1}{k},$$

....

Оскільки

$$\lim_{k\to\infty}(x_k - z_k) = 0,$$

то послідовність (z_k) рівномірно розподілена, але тоді $\varphi(z_k) = a$ і $(\varphi(z_k))$ не є рівномірно розподіленою. □

Наступна теорема доповнює попередню.

Теорема 5. *Якщо* $\varphi(x)$ *є неперервною та звивистою і* $A(\varphi) \geq 1$, *то існує послідовність* $(x_n) \subseteq [0;1]$ *така, що послідовності* (x_n) *та* $(\varphi(x_n))$ *одночасно є рівномірно розподіленими.*

Доведення. Зрозуміло, що знайдуться $l \in Z, \alpha \in R$ такі, що

$$\varphi(x) \in [l+\alpha; l+1+\alpha] \forall x \in [0;1].$$

Розглянемо множини

$$A_n = \{x \mid \varphi(x) = l + \alpha + \{n\sqrt{2}\}\}.$$

Зрозуміло, що множини A_n є всюду щільними на відрізкі $[0;1]$, для кожного натурального n. Побудуємо послідовність (z_n) наступним чином:

$$z_1 \in A_1 \colon |z_1 - y_1| < \frac{1}{1},$$

$$z_2 \in A_2 \colon |z_2 - y_2| < \frac{1}{2},$$

....

$$z_k \in A_k \colon |z_k - y_k| < \frac{1}{k},$$

....,

де $y_k = \{k\sqrt{3}\}$ для кожного натурального k.

Оскільки

$$\lim_{k\to\infty} (z_k - y_k) = 0,$$

і послідовність (y_k) рівномірно розподілена, то зрозуміло, що (z_k) також рівномірно розподілена. Оскільки $\varphi(z_k) = l + \alpha + \{k\sqrt{2}\}$ маємо потрібне. □

Теорема 6. *Якщо функція розподілу* $\varphi(x)$ *задовольняє властивість* SUD *і* $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$, *то* $\varphi(x) = x$ *для кожного* $x \in [0;1]$.

Доведення. Якщо функція $\varphi(x)$ не є строго зростаючою на відрізкі $[0;1]$, то існують $x_1 < x_2 \colon \varphi(x_1) = \varphi(x_2) = \lambda$ і відповідно $\varphi(x) = \lambda$ для кожного $x \in [x_1; x_2]$.

Розглянемо рівномірно розподілену послідовність:

$$a_n = \begin{cases} \lambda, & n = 1; \\ \{n\sqrt{2}\}, & n \geq 2,\, n \in N. \end{cases}$$

Оскільки $\varphi(a_n)$ рівномірно розподілена, то

$$\frac{N_m\left(\varphi(a_n); [\lambda; \lambda]\right)}{m} \to \lambda - \lambda = 0\,(m \to \infty),$$

а з іншого боку

$$\frac{N_m\left(\varphi(a_n); [\lambda; \lambda]\right)}{m} = \frac{N_m\left(a_n; [x_1; x_2]\right)}{m} \to x_2 - x_1\,(m \to \infty).$$

Суперечність. Отже, $\varphi(x)$ строго зростає на $[0;1]$. Маємо:

$$\frac{N_m\left(a_n; (0; x)\right)}{m} = \frac{N_m\left(\varphi(a_n); (\varphi(0); \varphi(x))\right)}{m}.$$

Спрямувавши $m \to \infty$, маємо: $x = \varphi(x)$. □

Теорема 7. *Якщо функція* $\varphi\colon [0;1] \to [0;1]$ *має критичну точку і є неперервною в околі цієї точки, то* $\varphi(x)$ *не володіє властивістю SUD.*

Доведення. Нехай $\varphi'(x_0) = 0$ для деякого $x_0 \in (0;1)$. Виберемо достатньо мале $\varepsilon > 0$. Зрозуміло, що

$$\frac{N_m\left(\varphi(x_n); (\varphi(x_0 - \varepsilon); \varphi(x_0))\right)}{m} \geq \frac{N_m\left(x_n; (x_0 - \varepsilon; x_0)\right)}{m}.$$

Спрямувавши $m \to \infty$, маємо:

$$\varphi(x_0) - \varphi(x_0 - \varepsilon) \geq \varepsilon,$$

$$\frac{\varphi(x_0) - \varphi(x_0 - \varepsilon)}{\varepsilon} \geq 1.$$

Спрямувавши $\varepsilon \to 0$, маємо:

$$\varphi'(x_0) \geq 1.$$

Суперечність. □

Теорема 8. *Якщо неперервна функція* $\varphi\colon [0;1] \to [0;1]$ *володіє властивістю SUD, то* $\varphi(x) \equiv x$.

Доведення. Нехай (x_n) рівномірно розподілена, тоді

$$\frac{N_m\left(\varphi(x_n); (\varphi(0); \varphi(t))\right)}{m} \geq \frac{N_m\left(x_n; (0; t)\right)}{m}.$$

Спрямувавши $m \to \infty$, маємо

$$\varphi(t) - \varphi(0) \geq t \Rightarrow \varphi(t) \geq t + \varphi(0).$$

Якщо $\varphi(0) > 0$, то $\varphi(1) \geq 1 + \varphi(0) > 1$ і маємо суперечність. Отже,

$$\varphi(0) = 0$$

і

$$\varphi(t) \geq t \ \forall t \in [0;1].$$

Позначимо

$$\varphi(x_n) = y_n$$

і

$$\Delta(x) = \varphi(x) - x,$$

тоді $\Delta(x) \geq 0$ для кожного $x \in [0;1]$ і функція $\Delta(x)$ неперервна. За критерієм Вейля

$$\frac{y_1 + \cdots + y_n}{n} \to \int\limits_0^1 x \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \ \ (n \to \infty),$$

але з іншого боку

$$\frac{y_1 + \cdots + y_n}{n} = \frac{\varphi(x_1) + \cdots + \varphi(x_n)}{n} \to \int\limits_0^1 \varphi(x)\mathrm{d}x \quad (n \to \infty).$$

Маємо:

$$\int\limits_0^1 \varphi(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2},$$

$$\int\limits_0^1 (x + \Delta(x))\mathrm{d}x = \frac{1}{2},$$

$$\int\limits_0^1 \Delta(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Оскільки, $\Delta(x)$ — неперервна, $\Delta(x) \geq 0 \ \ \forall x \in [0;1]$, то $\Delta(x) \equiv 0$.

$\square$

3. Дискретні динамічні системи з рівномірно розподіленими орбітами.

Розглянемо функцію $\varphi\colon [0;1] \to [0;1]$ таку, що

$$\min_{[0;1]} \varphi(x) = 0, \max_{[0;1]} \varphi(x) = 1.$$

Для заданого $t \in [0;1]$ можливо розглянути орбіти:

$$x_n(t) = \underbrace{\varphi(\varphi(\ldots(\varphi}_{n}(t))\ldots)),$$

для динамічної системи $(X; \varphi(x))$ з фазовим простором $X = ([0;1]; R^1)$.

Природним питанням є дослідження множини $M(\varphi)$ точок $t \in [0;1]$, таких, що послідовність $x_n(t)$ є рівномірно розподіленою, для заданої функції $\varphi(x)$.

Якщо φ є неперервною, то $[0;1]\backslash M(\varphi) \neq \varnothing$. Дійсно, для деяких $\alpha, \beta \in [0;1]$: $\varphi(\alpha) = 0$, $\varphi(\beta) = 1$, тому для неперервної функції $g(x) = \varphi(x) - x$ маємо:

$$g(\alpha) = -\alpha \leq 0, \; g(\beta) = 1 - \beta \geq 1.$$

Отже, за теоремою Коші $g(\gamma) = 0$, для деякого $\gamma \in [0;1]$, тобто $\varphi(\gamma) = \gamma$ ($\gamma -$ є нерухомою точкою) і $x_n(\gamma)$ є сталою послідовністю.

Нехай $g\colon \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots} \to \Delta^{Q_2}_{\alpha_2\alpha_3\ldots}$. Легко бачити, що

$$g(t) = \begin{cases} \frac{t}{q_0}, t \in [0;q_0), \\ \frac{t-q_0}{q_1}, t \in [q_0;1]. \end{cases}$$

Нехай

$$x = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}.$$

Означення 5. *Число x будемо називати Q_2-слабонормальним, якщо*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(x;0)}{n} = q_0,$$

де $N_n(x;0)$ — кількість нулів серед чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Означення 6. *Число x будемо називати Q_2-нормальним, якщо*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(x;(\gamma_1;\gamma_2;\ldots;\gamma_k))}{n} = \prod_{j=1}^{k} q_{\gamma_j},$$

де $N_n(x;(\gamma_1;\gamma_2;\ldots;\gamma_k))$— кількість блоків $(\gamma_1;\ldots;\gamma_k)$ серед чисел $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$. (якщо бути точним, це кількість номерів $j \in \{1;\ldots;n-k-1\}$ таких що $\alpha_{j+i-1} = \gamma_i$ для кожного $i \in \{1;\ldots;k\}$).

Зрозуміло, що кожне Q_2-нормальне число є Q_2-слабонормальним. Протилежне твердження хибне, наведемо відповідний приклад.

Нехай $n_0 \in N$ таке, що значення $a_n = [nq_0], b_n = [nq_1]$ більші за 2 для кожного натурального $n \geq n_0$.

Розглянемо число

$$y = \Delta^{Q_2}_{\underbrace{0\ldots0}_{a_{n_0}}\underbrace{1\ldots1}_{b_{n_0}}\ldots\underbrace{0\ldots0}_{a_{n_k}}\underbrace{1\ldots1}_{b_{n_k}}\ldots}.$$

Для достатньо великого натурального l знайдеться номер $n(l)$ такий, що

$$\sum_{j=n_0}^{n(l)} (a_j + b_j) \leq l < \sum_{j=n_0}^{n(l)+1} (a_j + b_j).$$

Маємо:

$$\frac{N_l(x;0)}{l} \geq \frac{\sum\limits_{j=n_0}^{n(l)} a_j}{\sum\limits_{j=n_0}^{n(l)+1} (a_j + b_j)} \geq \frac{q_0 \sum\limits_{j=n_0}^{n(l)} j - (n(l) - n_0 + 1)}{\sum\limits_{j=n_0}^{n(l)+1} (q_0 + q_1) \cdot j} =$$

$$= \frac{q_0(\frac{n(l)(n(l)+1)}{2} - \frac{(n_0-1)n_0}{2}) - (n(l) - n_0 + 1)}{\frac{(n(l)+1)(n(l)+2)}{2} - \frac{(n_0-1)n_0}{2}} \to q_0 \ (l \to \infty).$$

З іншого боку

$$\frac{N_l(x;0)}{l} \leq \frac{\sum\limits_{j=n_0}^{n(l)+1} a_j}{\sum\limits_{j=n_0}^{n(l)} (a_j + b_j)} \leq \frac{q_0 \sum\limits_{j=n_0}^{n(l)+1} j}{\sum\limits_{j=n_0}^{n(l)} (q_0 + q_1) \cdot j - (n(l) - n_0 + 1)} =$$

$$= \frac{q_0(\frac{(n(l)+1)(n(l)+2)}{2} - \frac{(n_0-1)n_0}{2})}{\frac{(n(l)+1)n(l)}{2} - (n(l) - n_0 + 1)} \to q_0 \ (l \to \infty).$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(y;0)}{n} = q_0,$$

і y є Q_2-слабонормальним числом, однак воно не є Q_2-нормальним, адже блок цифр $(0;1;0;1)$ взагалі не зустрічається.

Відрізок

$$\Delta(\gamma_1;\gamma_2;\ldots;\gamma_l) = \left[\Delta^{Q_2}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_l(0)};\Delta^{Q_2}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_l(1)}\right]$$

будемо називати Q_2-циліндром n-го рангу.

Лема 9. *Нехай M — множина всіх Q_2-циліндрів n-го рангу для кожного натурального n. Послідовність (x_n) є рівномірно розподіленою тільки тоді, коли*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(x_n;A)}{n} = \lambda(A),$$

для кожної множини $A \in M$, де $\lambda(\cdot)$ — міра Лебега і $N_n(x_n;A)$ — кількість чисел серед $\{x_1\},\{x_2\},\ldots,\{x_n\}$, які належать множині A.

Доведення. Якщо (x_n) рівномірно розподілена, то очевидно відповідна рівність виконується для кожної множини $A \in M$.

Розглянемо проміжок $[a;b]$, де $a > 0$ і $b < 1$ (випадок $a = 0$ або 1 розглядаються аналогічним чином).

Нехай

$$a = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots}, b = \Delta^{Q_2}_{\beta_1\beta_2\ldots}.$$

Розглянемо послідовність відрізків

$$C_n = \left[\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)} \ b = \Delta^{Q_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n(1)}\right].$$

Зрозуміло, що знайдеться набір Q_2-циліндрів n-го рангу

$$\Delta\left(\eta_1^{(1)};\eta_2^{(1)};\ldots;\eta_n^{(1)}\right), \ \ldots, \ \Delta\left(\eta_1^{(j)};\eta_2^{(j)};\ldots;\eta_n^{(j)}\right),$$

такі, що

$$C_n = \bigcup_{i=1}^{j} \Delta\left(\eta_1^{(i)}; \eta_2^{(i)}; \ldots; \eta_n^{(i)}\right).$$

Маємо:

$$\lim_{l\to\infty} \frac{N_l(x_k; C_n)}{l} = \sum_{r=1}^{j} \lim_{l\to\infty} \frac{N_l\left(x_k; \Delta\left(\eta_1^{(r)}; \ldots; \eta_n^{(r)}\right)\right)}{l} =$$

$$= \sum_{r=1}^{j} \lim_{l\to\infty} \lambda\left(\Delta\left(\eta_1^{(r)}; \ldots; \eta_n^{(r)}\right)\right) = \lambda(C_n).$$

Аналогічно доводиться, що

$$\lim_{l\to\infty} \frac{N_l(x_k; \tilde{C}_n)}{l} = \lambda(\tilde{C}_n),$$

де

$$\tilde{C}_n = \left[\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(1)}\ b = \Delta^{Q_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n(0)}\right].$$

Оскільки

$$\frac{N_l(x_k; \tilde{C}_n)}{l} \leq \frac{N_l(x_k; (a; b))}{l} \leq \frac{N_l(x_k; C_n)}{l}\ \forall n \in N,$$

то перейшовши до границі $l \to +\infty$ і врахувавши, що

$$\lim_{l\to\infty} \lambda(C_l) = b - a = \lim_{l\to\infty} \lambda(\tilde{C}_l),$$

отримаємо:

$$\lim_{l\to\infty} \frac{N_l(x_k; (a; b))}{l} = b - a.$$

□

Теорема 10. *Число*

$$z = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots}$$

є Q_2-нормальним тільки тоді, коли послідовність $(g_n(z))$ є рівномірно розподіленою.

Доведення. Нехай $(g_n(z))$ рівномірно розподілена. Зрозуміло, що $N_n(g_k(z);\Delta(\gamma_1;\gamma_2;\ldots;\gamma_l))$ дорівнює кількості блоків $(\gamma_1;\gamma_2;\ldots;\gamma_l)$ серед цифр $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$, тому що число $\Delta^{Q_2}_{\eta_1\eta_2\ldots}$ належить відрізку $\Delta(\gamma_1;\gamma_2;\ldots;\gamma_l)$ лише тоді, коли $\eta_r=\gamma_r$ для кожного $r\in\{1;\ldots;l\}$.

Маємо:

$$\frac{N_n(z;(\gamma_1;\ldots;\gamma_l))}{n}=\frac{N_n(g_k(z);\Delta(\gamma_1;\ldots;\gamma_l))}{n}\to\lambda(\Delta(\gamma_1;\ldots;\gamma_l))=$$

$$\prod_{j=1}^{l}q_{\gamma_j}(n\to+\infty),$$

тобто z є Q_2-нормальним.

Нехай z є Q_2-нормальним, тоді для кожного Q_2-циліндра $\Delta(\gamma_1;\ldots;\gamma_l)$ маємо:

$$\frac{N_n(g_k(z);\Delta(\gamma_1;\ldots;\gamma_l))}{n}=\frac{N_n(z;(\gamma_1;\ldots;\gamma_l))}{n}\to\prod_{j=1}^{l}q_{\gamma_j}=$$

$$=\lambda(\Delta(\gamma_1;\ldots;\gamma_l))(n\to+\infty),$$

і на основі попередньої леми отримаємо потрібне. □

Література

[1] *Кейперс Л.,Ниддерейтер Г.* Равномерно распределение последовательностей: Пер.с англ./ Под ред. С. М. Ермакова. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1985. – 408 с.

[2] *Турбин А.Ф.,Працевитый Н.В.* Фрактальные множества, функции, распределения // Киев: Наук.думка. – 1992. – 2008 с.

[3] *De Bruijn N.G., Post K. A.* A remark on uniformly distributet sequences and Riemann integrability // Indag.Math. – 1968. – 30. – p.149-150.

[4] *Borel.E* Les probabilies denombrables et leurs applications arithmetiques. — Rend. Circ. Mat. Palermo, 1909, p. 247-271.

[5] *Borel.E* Lecons sur la theorie des fonctions // 2nd ed. – Paris: Gauthier – Villars. – 1914.

[6] *Weil.H* Uber die Gibbssche Erscheinung und verwandte Konvergenzphanomene // Rend. Circ. Math. Palermo. – 1910. – 30. – P. 377-407.

[7] *Weil.H* Uber ein Problem aus dem Gebiete der diophantischen Approximationen // Nachr. Ges. Wiss. Gottingen, Math.-phys. Kl. – 1914, P. 234-244

[8] *Weil.H* Uber die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins // Math. Ann. – 1916. – 77. – P. 313-352.

[9] *Niven I., Zuckerman H.S.* On the definition of normal numbers // Pacific J. Math. – 1951. – 1. – P. 103-109.

[10] *Ries F.* Sur la theorie ergodique // Comment. Math. Helv., 1944/45. – 17. – P. 221-239.