Збірник праць Інституту математики НАН України 2018, т. 15, № 1, 114–131

УДК 517.925.51

Оцінка розв'язків одного класу диференціальних рівнянь із похідною Хукухари і стійкість за двома мірами

Є.В. Очеретнюк

Черкаський державний технологічний інститут, Черкаси;
ocheretnyukeugen@ukr.net

A comparison system is constructed for a class of differential equations with the Hukuhara derivative. The problem of the stability and instability of the trivial solution of differential equations with the Hukuhara derivative in terms of two measures is considered.

В роботі побудовано систему порівняння для одного класу диференціальних рівнянь з похідною Хукухари. Розглянуто питання про стійкість і нестійкість тривіального розв'язку. Розглянуто питання про стійкість і нестійкість тривіального розв'язку диференціальних рівнянь з похідною Хукухари в термінах двох мір.

1 Вступ

Теорія диференціальних рівнянь із багатозначною правою частиною застосовується при моделюванні реальних процесів і явищ, зокрема керованих процесів. Одним зі класів цих рівнянь є диференціальні рівняння з похідною Хукухари [1]. Диференціальні рівняння з похідною Хукухари [2,3] застосовуються при моделюванні різних процесів керування у сфері техніки й економіки.

Метою даної роботи є дослідження стійкості і нестійкості розв'язків системи диференціальних рівнянь із похідною Хукухари за допомогою методу порівняння [4] і теорії мішаних об'ємів [5].

2 Постановка задачі

Нехай $(K_C(\mathbb{R}^n), d_H)$ — метричний простір випуклих компактів у $\mathbb{R}^n$ із метрикою Хаусдорфа. У просторі $K_C(\mathbb{R}^n)$ можна ввести операції додавання (за Мінковським) і множення на невід'ємний скаляр, тобто якщо $u \in K_C(\mathbb{R}^n)$, $v \in K_C(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \geq 0$ то

$$u + v = \{x + y | x \in u,\, y \in v\} \in K_C(\mathbb{R}^n),$$
$$\lambda u = \{\lambda x | x \in u\} \in K_C(\mathbb{R}^n).$$

Тоді $(K_C(\mathbb{R}^n), d_H)$ — метричний простір зі структурою клину [6].

Означимо поняття різниці Хукухари: $w \stackrel{def}{=} u - v$, $w \in K_C(\mathbb{R}^n)$, якщо і тільки якщо $u = w + v$.

Якщо $\mathrm{T} \subseteq \mathbb{R}$ — відкрита зв'язна множина, $F : \mathrm{T} \to K_C(\mathbb{R}^n)$, то можна визначити диференційовність цього відображення.

Означення 2.1. Відображення $F : \mathrm{T} \to K_C(\mathbb{R}^n)$ називається диференційовним при $t = t_0 \in \mathrm{T}$, якщо існує елемент $\mathcal{D}_H F(t_0) \in K_C(\mathbb{R}^n)$, коли

$$\lim_{\rho \to 0+} \frac{F(t_0 + \rho) - F(t_0)}{\rho}, \ \lim_{\rho \to 0+} \frac{F(t_0) - F(t_0 - \rho)}{\rho}$$

існують і дорівнюють $\mathcal{D}_H F(t_0)$.

Необхідною умовою існування похідної Хукухари для відображення $F(t)$ на множині T є умова, що функція $diam[F(t)]$ – неспадна при $t \in \mathrm{T}$.

Розглянемо диференціальне рівняння

$$\mathcal{D}_H u(t) = F(t, u(t)), \tag{1}$$

де $u \in K_C(\mathbb{R}^n)$, $t \in \mathbb{R}$, $F : [a, +\infty) \times \Omega \subseteq K_C(\mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}$, Ω — відкрита підмножина в $(K_C(\mathbb{R}^n), d_H)$, і відповідну задачу Коші з початковою умовою $u(t_0) = u_0 \in \Omega$.

Умови існування і єдності розв'язку для задачі Коші (1) відомі [7].

В подальшому вважатимемо, що ці умови виконуються і що $u = 0$ розв'язок диференціального рівняння (1). Тут і далі $0 = \{0 \in \mathbb{R}^n\}$.

Слідуючи класичній постановці задачі про стійкість наведеної в роботі О.М. Ляпунова, в даній роботі будуть розглядатися деякі задачі про стійкість розв'язку $u = 0$ рівняння (1) щодо функціоналу об'єму $V[u(t)]$ (дивергентна стійкість) або щодо метрики Хаусдорфа.

Наведемо відповідні визначення.

Означення 2.2. Розв'язок $u = 0$ диференціального рівняння (1) називається дивергентно стійким, якщо для будь-яких $t_0 \in [a, +\infty)$ і $\varepsilon > 0$ існує додатнє число $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$, коли при всіх $u_0 \in K_C(\mathbb{R}^n)$ з нерівності $V[u_0] < \delta$ виникає, що $V[u(t; t_0, u_0)] < \varepsilon$ при всіх $t \geq t_0$.

Означення 2.3. Розв'язок $u = 0$ диференціального рівняння (1) називається стійким, якщо для будь-яких $t_0 \in [a, +\infty)$ і $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$, коли при всіх $u_0 \in K_C(\mathbb{R}^n)$ із умови $d_H(u_0, 0) < \delta$ виникає нерівність $d_H(u(t; t_0, u_0), 0) < \varepsilon$ при всіх $t \geq t_0$.

Запишемо формулу для зміни функціоналу $V[u(t)]$ вздовж розв'язку диференціального рівняння (1). З рівняння (1) виникає, що

$$u(t + \varepsilon) = u(t) + \int_t^{t+\varepsilon} F(s, u(s))ds,\ \varepsilon > 0,\ t \geq t_0,$$

$$\frac{V[u(t+\varepsilon)] - V[u(t)]}{\varepsilon} = \frac{V[u(t) + \int_t^{t+\varepsilon} F(s, u(s))ds] - V[u(t)]}{\varepsilon}.$$

З формули Штейнера виникає, що

$$V[u(t) + \int_t^{t+\varepsilon} F(s, u(s))ds] = V[u(t)] +$$

$$+ \varepsilon n V_1[u(t), \frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon} F(s, u(s))ds] + o(\varepsilon),$$

де $V_1[u, v]$ — перший мішаний об'єм $u \in K_C(\mathbb{R}^n)$ і $v \in K_C(\mathbb{R}^n)$, тому

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{V[u(t+\varepsilon)] - V[u(t)]}{\varepsilon} = nV_1[u(t), F(t, u(t))].$$

Аналогічно

$$\lim_{\varepsilon \to 0-} \frac{V[u(t+\varepsilon)] - V[u(t)]}{\varepsilon} = nV_1[u(t), F(t, u(t))].$$

Таким чином,

$$\frac{dV[u(t)]}{dt} = nV_1[u(t), F(t, u(t))]. \tag{2}$$

У даній роботі розглядається задача про стійкість розв'язку $u = 0$ диференціального рівняння з похідною Хукухари

$$\mathcal{D}_H u(t) = \psi\big(V[u(t)]\big)A(t)u(t), \tag{3}$$

де $u \in K_C(\mathbb{R}^n)$, $t \in \mathbb{R}$, $\psi \in C(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}_+)$, ψ — незростальна функція, $A \in C([a,+\infty);\mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$.

Використовуючи формулу (2), отримаємо

$$\frac{dV[u(t)]}{dt} = n\psi\big(V[u(t)]\big)V_1[u(t), A(t)u(t)]. \tag{4}$$

Так, із формули (4) випливає, що для дослідження стійкості розв'язку $u = 0$ диференціального рівняння (3) щодо функціоналу $V[u(t)]$ необхідно, передусім, з'ясувати оцінки величини відхилення $\frac{V_1[u(t),A(t)u(t)]}{V[u(t)]}$, $int\, u \neq \varnothing$ на траєкторіях диференціального рівняння (3). Розглянемо це питання детальніше. Позначимо $B(t) = A(t) - \frac{spA(t)}{n}I$, тоді зі включення

$$A(t)u(t) \subseteq \frac{spA(t)}{n}u + B(t)u$$

випливає нерівність

$$\begin{aligned} V_1[u(t), A(t)u(t)] \le V_1[u(t), \frac{spA(t)}{n}u(t)] + V_1[u(t), B(t)u(t)] = \\ = \frac{|spA(t)|}{n}V[u(t)] + V_1[u(t), B(t)u(t)]. \end{aligned} \tag{5}$$

Нехай $\varepsilon > 0$ — достатньо мале число, тоді

$$u + \varepsilon B(t)u \subseteq \alpha(I + \varepsilon B(t))u, \tag{6}$$

де

$$1 \le \alpha = \sup_{p\in S^{n-1}} \frac{h_u(p) + \varepsilon h_u(B^{\mathrm{T}}(t)p)}{h_u(p + \varepsilon B^{\mathrm{T}}(t)p)},$$

$h_u(p)$ — опорна функція $u \in K_C(\mathbb{R}^n)$, $h_u(p) \ge 0$ при всіх $p \in S^{n-1}$.

Нехай $x_0 \in int\, u_0$, тоді рівняння (3) розширимо звичайним диференеціальним рівнянням

$$\frac{dx}{dt} = \psi\big(V[u(t)]\big)A(t)x(t), \tag{7}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, і означимо функцію

$$\widetilde{h}(t,p) = h_{u(t)}(p) - (p, x(t)),$$

де $h_{u(t)}(p)$ — опорна функція множини $u(t) \in K_C(\mathbb{R}^n)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widetilde{h}}{\partial t} = \frac{\partial h_{u(t)}(p)}{\partial t} - (p, \frac{dx}{dt}) = \psi\big(V[u(t)]\big) h_{u(t)}(A^{\mathrm{T}}(t)p) - \\ -\psi\big(V[u(t)]\big)(x, A^{\mathrm{T}}(t)p) = \psi\big(V[u(t)]\big)\widetilde{h}(t, A^{\mathrm{T}}(t)p). \end{aligned} \tag{8}$$

Лема 2.1. *При всіх $t \in [t_0, t_0 + \Omega^+(t_0, u_0))$ і $p \in S^{n-1}$ виконуються нерівності*

$$\begin{aligned} \inf_{p \in S^{n-1}} \left[\widetilde{h}(t_0, p) exp\Big\{ \int_{t_0}^{t} \psi\big(V[u(s)]\big)\sigma_m(A(s))ds \Big\} \right] \leq \\ \leq \widetilde{h}(t_0, p) \leq \sup_{p \in S^{n-1}} \left[\widetilde{h}(t_0, p) exp\Big\{ \int_{t_0}^{t} \psi\big(V[u(s)]\big)\sigma_M(A(s))ds \Big\} \right]. \end{aligned} \tag{9}$$

Доведення. Доведемо, наприклад, оцінку знизу.

Розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{\partial \widetilde{h}^*}{\partial t} = \psi\big(V[u(t)]\big)\widetilde{h}^*(t, A^{\mathrm{T}}(t)p) + \varepsilon$$

з початковою умовою $\widetilde{h}^*(t_0, p) = \widetilde{h}(t_0, p)$, де ε — мале додатне число. Доведемо строгу нерівність

$$\widetilde{h}^*(t, p) > \inf_{p \in S^{n-1}} \left[\widetilde{h}(t_0, p) exp\Big\{ \int_{t_0}^{t} \psi\big(V[u(s)]\big)\sigma_m(A(s))ds \Big\} \right], \tag{10}$$

коли $t \in [t_0, t_0 + \Omega^+(t_0, u_0))$. Якщо (10) не виконується, то існує $t_1 \in [t_0, t_0 + \Omega^+(t_0, u_0))$ таке, що

$$\begin{gathered} \gamma(t_1, p_0) = \\ = \widetilde{h}^*(t_1, p_0) - \inf_{p \in S^{n-1}} \left[\widetilde{h}(t_0, p_0) exp\Big\{ \int_{t_0}^{t} \psi\big(V[u(s)]\big)\sigma_m(A(s))ds \Big\} \right] = 0 \end{gathered}$$

$\gamma(t_1, p) \geq 0$ при всіх $p \in S^{n-1}$

$$\begin{gathered} \gamma(t, p) = \\ = \widetilde{h}^*(t, p) - \inf_{p \in S^{n-1}} \left[\widetilde{h}(t_0, p) exp\Big\{ \int_{t_0}^{t} \psi\big(V[u(s)]\big)\sigma_m(A(s))ds \Big\} \right] > 0 \end{gathered}$$

при всіх $t \in [t_0, t_1)$. Із цих нерівностей випливає умова

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t}(t_1, p_0) \le 0.$$

З другого боку

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t}(t,p) = \frac{\partial \widetilde{h}^*(t,p)}{\partial t} -$$

$$-\inf_{p \in S^{n-1}} \widetilde{h}(t_0,p) exp\Big\{ \int_{t_0}^{t} \psi\big(V[u(s)]\big)\sigma_m(A(s))ds \Big\}.$$

$$\psi\big(V[u(s)]\big)\sigma_m(A(s)) + \varepsilon = \psi\big(V[u(s)]\big)\Big(\widetilde{h}^*(t, A^{\mathrm{T}}(t)p) -$$

$$-\inf_{p \in S^{n-1}} \widetilde{h}(t_0,p) exp\Big\{ \int_{t_0}^{t} \psi\big(V[u(s)]\big)\sigma_m(A(s))ds \Big\}\sigma_m(A(t))\Big) + \varepsilon =$$

$$= \psi\big(V[u(t)]\big)\Big(\|A^{\mathrm{T}}(t)p\|\widetilde{h}^*(t, \frac{A^{\mathrm{T}}(t)p}{\|A^{\mathrm{T}}(t)p\|}) -$$

$$-exp\Big\{ \int_{t_0}^{t} \psi\big(V[u(s)]\big)\sigma_m(A(s))ds \Big\} \inf_{p \in S^{n-1}} \widetilde{h}(t_0,p)\sigma_m(A(t))\Big) + \varepsilon \ge$$

$$\ge \psi\big(V[u(t)]\big)\sigma_m(A(t))\Big[\widetilde{h}^*(t, \frac{A^{\mathrm{T}}(t)p}{\|A^{\mathrm{T}}(t)p\|}) -$$

$$-exp\Big\{ \int_{t_0}^{t} \psi\big(V[u(s)]\big)\sigma_m(A(s))ds \Big\} \inf_{p \in S^{n-1}} \widetilde{h}(t_0,p)\Big] + \varepsilon$$

при $t = t_1$ вираз у квадратних дужках невід'ємний при всіх $p \in S^{n-1}$, тому $\frac{\partial \gamma}{\partial t}(t_1, p_0) > \varepsilon$. Отримане протиріччя доводить оцінку (10). Граничний перехід $\varepsilon \to 0+$ у нерівності (10) завершує доведення леми. $\square$

Зауважимо, що $\widetilde{h}(t_0,p) > 0$ при всіх $p \in S^{n-1}$, тому $\widetilde{h}(t,p) > 0$ при всіх $p \in S^{n-1}$ и $t \in [t_0, t_0 + \Omega^+(u_0))$. Із цієї леми випливає, що

$$\alpha = \sup_{p \in S^{n-1}} \frac{\widetilde{h}_u(p) + \varepsilon \widetilde{h}_u(B^{\mathrm{T}}(t)p)}{\widetilde{h}_u(p + \varepsilon B^{\mathrm{T}}(t)p)} =$$

$$= 1 + \sup_{p \in S^{n-1}} \frac{\widetilde{h}_u(p) - \widetilde{h}_u(p + \varepsilon B^{\mathrm{T}}(t)p) + \varepsilon \widetilde{h}_u(B^{\mathrm{T}}(t)p)}{\widetilde{h}_u(p + \varepsilon B^{\mathrm{T}}p)} \leq$$

$$\leq 1 +$$

$$+ \sup_{p \in S^{n-1}} \frac{\|\widetilde{h}_u\|_{C(S^{n-1})} \varepsilon \|B(t)\| + \varepsilon \|B(t)\| \|\widetilde{h}_u\|_{C(S^{n-1})}}{\widetilde{h}_u(p + \varepsilon B^{\mathrm{T}}(t)p)} \leq$$

$$\leq 1 + 2 \frac{\sup\limits_{p \in S^{n-1}} \widetilde{h}(t_0, p)}{\inf\limits_{p \in S^{n-1}} \widetilde{h}(t_0, p)} \varepsilon \|B(t)\| exp\Big\{ \int_{t_0}^{t} \psi\big(V[u(s)]\big)\big(\sigma_M(A(s)) -$$

$$- \sigma_m(A(s))\big) ds \Big\} + o(\varepsilon) = 1 + 2\mu[\widetilde{u}_0] \varepsilon \|B(t)\| \cdot$$

$$\cdot exp\Big\{ \int_{t_0}^{t} \psi\big(V[u(s)]\big)\big(\sigma_M(A(s)) - \sigma_m(A(s))\big) ds \Big\}.$$

З додатку (6) випливає, що

$$nV_1[u(t), B(t)u(t)] \leq \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{V[\alpha(I + \varepsilon B(t))u(t)] - V[u(t)]}{\varepsilon} \leq$$

$$\leq \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{\alpha^n \det|I + \varepsilon B(t))| - 1}{\varepsilon} V[u(t)] = \Big[|spB(t)| + 2n\mu[\widetilde{u}_0] \|B(t)\| \cdot$$

$$\cdot exp\Big\{ \int_{t_0}^{t} \psi\big(V[u(s)]\big)\big(\sigma_M(A(s)) - \sigma_m(A(s))\big) ds \Big\} \Big] V[u(t)] =$$

$$= 2n\mu^*[\widetilde{u}_0] \|A(t) - \frac{spA(t)}{n} I\| exp\Big\{ \int_{t_0}^{t} \psi\big(V[u(s)]\big)\big(\sigma_M(A(s)) -$$

$$- \sigma_m(A(s))\big) ds \Big\} V[u(t)],$$

$$\mu^*[u_0] = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{h_{u_0}(p_0) + (p, x)}{h_{u_0}(p_0) + (p, x)} = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{\inf\limits_{x \in u_0} [h_{u_0}(p) - (p, x)]}{\inf\limits_{x \in u_0} [h_{u_0}(p) - (p, x)]}.$$

З нерівності (5) отримаємо

$$\frac{V_1[u(t),A(t)u(t)]}{V[u(t)]} \le \frac{|spA(t)|}{n} + 2\mu[\widetilde{u}_0]\|A(t) - \frac{spA(t)}{n}I\|\cdot$$
$$\cdot exp\Big\{\int_{t_0}^{t}\psi\big(V[u(s)]\big)\big(\sigma_M(A(s)) - \sigma_m(A(s))\big)ds\Big\}. \tag{11}$$

Розглянемо питання про нижні оцінки відношення $\frac{V_1[u(t),A(t)u(t)]}{V[u(t)]}$. Для цього нагадаємо одне класичне уточнення ізопериметричної нерівності Мінковського [5], отримане в роботі [8].

Якщо $u, v \in K_C(\mathbb{R}^n)$, $int\, u \ne \varnothing$, $int\, v \ne \varnothing$, то

$$qnV_1[u,v] \ge V[u] + (n-1)V[qv], \tag{12}$$

$$nV_1[Qv,u] \ge V[Qv] + (n-1)V[u], \tag{13}$$

де $q(u,v)$ — це коефіцієнт місткості компакта v в компакт u, який визначається так (див. [5, 8])

$$q(u,v) = \max\{\beta \ge |\exists x \ge 0,\ x + \beta v \subseteq u\},$$

$Q(u,v)$ — коефіцієнт охоплення тіла u компактом v, тобто

$$Q(u,v) = \min\{\alpha \ge |\exists x \ge 0,\ x + u \subseteq \alpha u\}.$$

З нерівності (12) випливає оцінка, якщо вважати $v = Au$

$$\frac{nV_1[u,Au]}{V[u]} \ge q^{-1} + (n-1)q^{n-1}|\det A| \ge$$
$$\ge n[q^{-1}q^{(n-1)^2}|\det A|^{n-2}]^{1/n} = nq^{n-2}|\det A|^{1-1/n},$$

тому

$$\frac{nV_1[u(t),A(t)u(t)]}{V[u(t)]} \ge nq^{n-2}|\det A(t)|^{1-1/n}.$$

З означення величини q випливає, що

$$q \ge \inf_{p\in S^{n-1}}\frac{\widetilde{h}_u(p)}{\widetilde{h}_{Au}(p)} \ge \sup_{x\in u_0}\frac{\inf \widetilde{h}_{u_0}(p)}{\sup \widetilde{h}_{u_0}(p)} \ge$$
$$\ge \frac{\mu^{-1}[u_0]}{\sigma_M(A(t))}exp\Big\{\int_{t_0}^{t}\psi\big(V[u(s)]\big)\big(\sigma_m(A(s)) - \sigma_M(A(s))\big)ds\Big\},$$

і, як наслідок

$$\frac{nV_1[u(t), A(t)u(t)]}{V[u(t)]} \geq \mu^{2-n}[\widetilde{u}_0]\cdot$$
$$\cdot exp\Big\{(n-2)\int_{t_0}^{t}\psi\big(V[u(s)]\big)\big(\sigma_m(A(s))-\sigma_M(A(s))\big)ds\Big\}\cdot \tag{14}$$
$$\cdot\frac{|\det A(t)|^{1-1/n}}{\sigma_M^{n-2}(A(t))}.$$

Оцінки (11) і (14) дозволяють встановити оцінки швидкості зміни функціоналу $V[u(t)]$ вздовж розв'язку диференціального рівняння (1).

Так, із формули (2) випливає, що

$$\frac{dV[u(t)]}{dt}\Big|_{(1)} \leq \Big[|spA(t)| + 2n\mu[\widetilde{u}_0]\|A(t) - \frac{spA(t)}{n}I\|\cdot$$

$$\cdot\, exp\Big\{\int_{t_0}^{t}\psi\big(V[u(s)]\big)\big(\sigma_M(A(s))-\sigma_m(A(s))\big)ds\Big\}\Big]\cdot \tag{15}$$

$$\cdot V[u(t)]\psi\Big(V[u(t)]\Big),$$

$$\frac{dV[u(t)]}{dt}\Big|_{(1)} \geq n\mu^{2-n}[\widetilde{u}_0]\cdot$$

$$\cdot\, exp\Big\{(n-2)\int_{t_0}^{t}\psi\big(V[u(s)]\big)\big(\sigma_m(A(s))-\sigma_M(A(s))\big)ds\Big\}\cdot \tag{16}$$

$$\cdot\frac{|\det A(t)|^{1-1/n}}{\sigma_M^{n-2}(A(t))}V[u(t)]\psi\Big(V[u(t)]\Big).$$

3 Лема порівняння

Нехай $\mu_0 > 0$ — це додатне число, розглянемо систему інтегро-диференціальних рівнянь

$$\begin{gathered}
\frac{d\zeta}{dt} = n\mu_0^{2-n} exp\Big\{(n-2)\int_{t_0}^{t}\psi\big(\zeta(s)\big)\big(\sigma_m(A(s)) - \sigma_M(A(s))\big)ds\Big\}\cdot \\
\cdot\frac{|\det A(t)|^{1-1/n}}{\sigma_M^{n-2}(A(t))}\zeta\psi\Big(\zeta\Big) \\
\frac{d\xi}{dt} = \Big[|spA(t)| + 2n\mu_0\|A(t) - \frac{spA(t)}{n}I\|\cdot \\
\cdot exp\Big\{\int_{t_0}^{t}\psi\big(\zeta(s)\big)\big(\sigma_M(A(s)) - \sigma_m(A(s))\big)ds\Big\}\Big]\xi\psi\Big(\xi\Big).
\end{gathered} \tag{17}$$

Основний результат роботи сформулюємо у вигляді леми

Лема 3.1. *Нехай $\xi(t)$ і $\zeta(t)$ — розв'язки системи рівнянь порівняння (17) із початковими умовами $\xi(t_0) = \xi_0$, $\zeta(t_0) = \zeta_0$, що задовольняють умови $\zeta_0 \leq V[u_0] \leq \xi_0$, тоді для функціоналу $V[u(t)]$ на розв'язку $u(t)$ диференціального рівняння (1) із початковою умовою $u(t_0) = u_0 \in K_C(\mathbb{R}^n)$, $\mu[u_0] \leq \mu_0$ виконується нерівність*

$$\zeta(t) \leq V[u(t)] \leq \xi(t), \tag{18}$$

при всіх $t \in [t_0, t_0 + \omega^+(t_0, u_0, \zeta_0, \xi_0))$.

Доведення. Поряд із системою порівняння (17) розглянемо систему інтегро-диференціальних рівнянь

$$\begin{gathered}
\frac{d\overline{\zeta}}{dt} = n\mu^{2-n}[\widetilde{u}_0] exp\Big\{(n-2)\int_{t_0}^{t}\psi\big(\overline{\zeta}(s)\big)\big(\sigma_m(A(s)) - \sigma_M(A(s))\big)ds\Big\}\cdot \\
\cdot\frac{|\det A(t)|^{1-1/n}}{\sigma_M^{n-2}(A(t))}\overline{\zeta}\psi\Big(\overline{\zeta}\Big) - \varepsilon; \\
\frac{d\overline{\xi}}{dt} = \Big[|spA(t)| + 2n\mu[\widetilde{u}_0]\|A(t) - \frac{spA(t)}{n}I\|\cdot \\
\cdot exp\Big\{\int_{t_0}^{t}\psi\big(\overline{\zeta}(s)\big)\big(\sigma_M(A(s)) - \sigma_m(A(s))\big)ds\Big\}\Big]\overline{\xi}\psi\Big(\overline{\xi}\Big) + \varepsilon
\end{gathered} \tag{19}$$

із початковими умовами $\overline{\zeta}(t_0) = \zeta_0 - \varepsilon$, $\overline{\xi}(t_0) = \xi_0 + \varepsilon$.

Доведемо строгі нерівності

$$\overline{\zeta}(t) < V[u(t)] < \overline{\xi}(t), \tag{20}$$

у яких усі $t \in [t_0, t_0 + \omega^+(t_0, u_0, \zeta_0, \xi_0, \varepsilon))$.

Припустимо, що (20) хибний, тоді існує $t_1 = (t_0, t_0 + \omega^+(t_0, u_0, \zeta_0, \xi_0, \varepsilon))$, у якому

$$\begin{gathered} \overline{\zeta}(t) \leq V[u(t)] \leq \overline{\xi}(t),\ t \in [t_0, t_1] \\ V[u(t_1)] = \overline{\zeta}(t_1) \end{gathered} \tag{21}$$

або

$$\begin{gathered} \overline{\zeta}(t) \leq V[u(t)] \leq \overline{\xi}(t),\ t \in [t_0, t_1] \\ V[u(t_1)] = \overline{\xi}(t_1). \end{gathered} \tag{22}$$

Розглянемо випадок (21). Нехай $m(t) = V[u(t)] - \overline{\zeta}(t)$, тоді $\frac{dm}{dt}(t_1) \leq 0$, а з другого боку, з урахуванням (16),

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dV[u(t)]}{dt} - \frac{d\overline{\zeta}}{dt} \geq \varepsilon +$$
$$+ \Big[n\mu^{2-n}[\widetilde{u}_0] exp\Big\{(n-2)\int_{t_0}^{t} \psi\big(V[u(s)]\big)\big(\sigma_m(A(s)) - \sigma_M(A(s))\big) ds\Big\} \cdot$$
$$\cdot \frac{|\det A(t)|^{1-1/n}}{\sigma_M^{n-2}(A(t))} V[u(t)]\psi\Big(V[u(t)]\Big) -$$
$$- n\mu^{2-n}[\widetilde{u}_0] exp\Big\{(n-2)\int_{t_0}^{t} \psi\big(\overline{\zeta}(s)\big)\big(\sigma_m(A(s)) - \sigma_M(A(s))\big) ds\Big\} \cdot$$
$$\cdot \frac{|\det A(t)|^{1-1/n}}{\sigma_M^{n-2}(A(t))} \overline{\zeta}\psi\Big(\overline{\zeta}\Big)\Big]$$

при $t = t_1$, унаслідок того, що $\psi(s)$ — незростаюча функція

$$\psi\big(V[u(s)]\big) < \psi\big(\overline{\zeta}(s)\big),$$
$$\int_{t_0}^{t} \psi\big(V[u(s)]\big)\big(\sigma_m(A(s)) - \sigma_M(A(s))\big) ds \geq$$
$$\geq \int_{t_0}^{t} \psi\big(\overline{\zeta}(s)\big)\big(\sigma_m(A(s)) - \sigma_M(A(s))\big) ds,$$

тому при $t = t_1$ вираз у квадратних дужках невід'ємний, тож $\frac{dm}{dt} \geq \varepsilon > 0$.

Таким чином, припущення (21) призводить до протиріччя.

Розглянемо випадок (22). Нехай $m_1(t) = V[u(t)] - \xi(t)$, тоді $\frac{dm_1}{dt}(t_2) \geq 0$, а з другого боку, з урахуванням (15),

$$\frac{dm_1}{dt} = \frac{dV[u(t)]}{dt} - \frac{d\xi}{dt} = -\varepsilon + \Big[|spA(t)| + 2n\mu[\widetilde{u}_0]\|A(t) - \frac{spA(t)}{n}I\|\cdot$$

$$\cdot exp\Big\{\int_{t_0}^{t}\psi\big(V[u(s)]\big)\big(\sigma_M(A(s)) - \sigma_m(A(s))\big)ds\Big\}\Big]V[u(t)]\psi\Big(V[u(t)]\Big) -$$

$$-\Big[|spA(t)| + 2n\mu[\widetilde{u}_0]\|A(t) - \frac{spA(t)}{n}I\|\cdot$$

$$\cdot exp\Big\{\int_{t_0}^{t}\psi\big(\zeta(s)\big)\big(\sigma_M(A(s)) - \sigma_m(A(s))\big)ds\Big\}\Big]\xi\psi\Big(\xi\Big)$$

при $t = t_2$,

$$\int_{t_0}^{t}\psi\big(V[u(s)]\big)\big(\sigma_M(A(s)) - \sigma_m(A(s))\big)ds \leq$$

$$\leq \int_{t_0}^{t}\psi\big(\overline{\zeta}(s)\big)\big(\sigma_M(A(s)) - \sigma_m(A(s))\big)ds,$$

тому $\frac{dm_1}{dt}(t_2) \leq -\varepsilon < 0$, що призводить до протирічя.

Отримане протиріччя доводить нерівність (20).

Із нерівності (20) граничним переходом $\varepsilon \to 0+$, із урахуванням, що $\overline{\xi}(t) \overset{\varepsilon}{\rightrightarrows} \xi(t)$ і $\overline{\zeta}(t) \overset{\varepsilon}{\rightrightarrows} \zeta(t)$, отримаємо твердження леми. Лему доведено. □

4 Теореми про стійкість

У цьому розділі розглянемо деякі застосування леми порівняння до питання стійкості розв'язку $u = 0$. При цьому, як це зазвичай прийнято в теорії нескінченно-вимірних систем, питання про стійкість розглядатимемо в термінах двох мір [9]. Наведемо відповідні означення.

Означення 4.1. Розв'язок $u = 0$ диференціального рівняння (3) називається дивергентно стійким, якщо для заданого $\mu_0 > 0$ і будь-яких $t_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$, коли з умов $V[u_0] < \delta$, $\mu[u_0] \leq \mu_0$ виникає, що $V[u(t)] < \varepsilon$ при всіх $t \geq t_0$.

Означення 4.2. Розв'язок $u = 0$ диференціального рівняння (3) називається стійким, якщо для заданого $\mu_0 > 0$ і будь-яких $t_0 \in [a, +\infty)$

і $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ таке, що з умов $d_H(u_0, 0) < \delta$, $\mu[u_0] \le \mu_0$ випливає тощо, що $d_H(u(t), 0) < \varepsilon$ при всіх $t \ge t_0$.

Означення 4.3. Розв'язок $u = 0$ диференціального рівняння (3) називається нестійким, якщо для заданого $\mu_0 > 0$ існують $t_0 \in [a, +\infty)$ і $\varepsilon > 0$, при яких для будь-якого $\delta > 0$ існує $u_0 \in K_C(\mathbb{R}^n)$, коли тощо $d_H(u_0, 0) < \delta$, $\mu[u_0] \le \mu_0$ і $d_H(u(t_1), 0) \ge \varepsilon$ за деякого $t_1 \ge t_0$.

Означення 4.4. Розв'язок $u = 0$ диференціального рівняння (3) називається дивергентно нестійким, якщо для заданого $\mu_0 > 0$ існують $t_0 \in [a, +\infty)$ і $\varepsilon > 0$, при яких для будь-якого $\delta > 0$ існує $u_0 \in K_C(\mathbb{R}^n)$, коли $V[u_0] < \delta$, $\mu[u_0] \le \mu_0$ і $V[u(t_1)] \ge \varepsilon$ за деякого $t_1 \ge t_0$.

Введемо поняття стійкості і нестійкості для частини змінних у системі інтегро-диференціальних рівнянь (17).

Означення 4.5. *[10]* Розв'яок $\zeta = 0$, $\xi = 0$ системи інтегро-диференціальних рівнянь (17) називається ξ-стійким, якщо для будь-яких $t_0 \in [a, +\infty)$, $\varepsilon > 0$ існує додатне число $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)0$, коли з нерівностей $0 < \xi_0 < \delta$, $0 < \zeta_0 < \delta$ виникає, що $0 < \xi(t) < \varepsilon$ за всіх $t \ge t_0$.

Означення 4.6. *[10]* Розв'язок $\zeta = 0$, $\xi = 0$ системи інтегро-диференціальних рівнянь (17) називається ζ-нестійким, якщо існують $t_0 \in [a, +\infty)$ і $\varepsilon_0 > 0$, коли для будь-якого $\delta > 0$ існують ξ_δ ζ_δ, коли $\xi_\delta < \delta$, $\zeta_\delta < \delta$ і $\zeta(t_1) \ge \varepsilon_0$ за деякого $t_1 > t_0$.

Теорема 4.1. *Припустимо, що диференціальне рівняння* (1) *таке, що розв'язок* $\zeta = 0$, $\xi = 0$ *системи інтегро-диференціальних рівнянь* (17) *є* ξ*-стійким. Тоді розв'язок* $u = 0$ *диференціального рівняння* (1) *є дивергентно стійким.*

Доведення. Нехай ε — достатньо мале додатне число. За умовою існує додатне число $\eta = \eta(\varepsilon, t_0) > 0$, коли з умов $\xi_0 < \eta$, $\zeta_0 < \eta$ виникає, що $\xi(t) < \varepsilon$ при всіх $t \ge t_0$. Тут $\xi(t)$ — ξ-компонента розв'язку системи рівнянь порівняння (17). Нехай початкові умови $u_0 \in K_C(\mathbb{R}^n)$ такі, що $V[u_0] < \eta$, $\mu[\widetilde{u}_0] \le M$. Тоді з леми порівняння випливає, що $V[u(t)] < \xi(t)$ при всіх $t \ge t_0$.

Якщо $\xi_0 = V[u_0]$, то $\xi(t) < \varepsilon$ при всіх $t \ge t_0$, що доводить дивергентну стійкість розв'язку $u = 0$. $\square$

Розглянемо тепер питання про стійкість за Ляпуновим розв'язку $u = 0$.

Теорема 4.2. *Припустимо, що диференціальне рівняння* (1) *таке, що виконується умова:*

$$\int_{t_0}^{+\infty} \psi\big(\zeta(s)\big)\|A(s)\|ds < +\infty$$

для всіх розв'язків $\big(\xi(t), \zeta(t)\big)$ *системи рівнянь порівняння* (17) *із початковими умовами* $\xi_0 = \zeta_0 < \rho_0$, $\rho_0 > 0$. *Тоді розв'язок* $u = 0$ *диференціального рівняння* (1) *стійкий за Ляпуновим.*

Доведення. З рівняння (1) бачимо, що

$$h_{u(t)}(p) = h_{u_0}(p) + \int_{t_0}^{t} \psi\big(V[u(s)]\big)h_{u(s)}(A^{\mathrm{T}}(s)p)ds.$$

Звідси виникає тощо, що

$$\|h_{u(t)}\|_{C(S^{n-1})} = \|h_{u_0}\|_{C(S^{n-1})} + \\ + \int_{t_0}^{t} \psi\big(V[u(s)]\big)\sigma_M(A(s))\|h_{u(s)}\|_{C(S^{n-1})}ds.$$

Застосовуючи лему Гронуола-Белмана, отримаємо

$$\|h_{u(t)}\|_{C(S^{n-1})} \le \|h_{u_0}\|_{C(S^{n-1})} exp\Big\{ \int_{t_0}^{t} \psi\big(V[u(s)]\big)\sigma_M(A(s))ds\Big\}$$

Звідси, застосовуючи лему порівняння, отримаємо

$$\|h_{u(t)}\|_{C(S^{n-1})} \le \|h_{u_0}\|_{C(S^{n-1})} exp\Big\{ \int_{t_0}^{t} \psi\big(\zeta(s)\big)\sigma_M(A(s))ds\Big\}, \qquad (23)$$

де $\zeta(s)$ — ζ-компонента розв'язку системи порівняння (17) із початковими умовами $\xi_0 = \zeta_0 = V[u_0]$.

Існує додатне число δ_1, при якому з нерівності $d_H(u_0, 0) < \delta_1$ виникає, що $V[u_0] < \rho_0$.

Нехай $A(t_0) = \int_{t_0}^{\infty} \psi\big(\zeta(s)\big)\sigma_M(A(s))ds$ і $\delta(\varepsilon) = \min\{\delta_1, \frac{\varepsilon}{A(t_0)}\}$, тоді з нерівності (23) випливає, що

$$\|h_{u(t)}\|_{C(S^{n-1})} = d_H(u(t), 0) < \varepsilon$$

при $t \ge t_0$, якщо тільки $d_H(u_0, 0) < \delta$ і $\mu[u_0] \le \mu_0$. $\square$

Теорема 4.3. *Припустимо, що диференціальне рівняння* (1) *таке, що для будь-якого* $\delta > 0$ *існує* $\xi_\delta > 0$, *коли*

$$\sup_{t \geq t_0} \int_{t_0}^{t} \psi\big(\xi(s)\big)\sigma_m(A(s))ds = +\infty,$$

де $\xi(s)$ — ξ*-компонента розв'язку системи порівняння* (17) *із початковими умовами* $\xi(t_0) = \zeta(t_0) = \xi_\delta$. *Тоді розв'язок* $u = 0$ *диференціального рівняння* (1) *нестійкий за Ляпуновим.*

Доведення. Нехай δ — довільне додатне число. За умов для заданого додатнього числа $\delta^n V[K]$ існує число $\xi_\delta < \delta^n V[K]$, коли

$$\sup_{t \geq t_0} \int_{t_0}^{t} \psi\big(\xi(s)\big)\sigma_m(A(s))ds = +\infty,$$

де $\xi(s)$ — ξ-компонента розв'язку системи порівняння (17) із початковими умовами $\xi(t_0) = \zeta(t_0) = \xi_\delta$.

Нехай $u_\delta = \left(\frac{\xi_\delta}{V[K]}\right)^{1/n} K$, де K — одинична куля з центром у точці $x = 0$. Розглянемо розв'язок $u(t)$ диференціального рівняння (1) з початковою умовою $u(t_0) = u_\delta \in K_C(\mathbb{R}^n)$.

Очевидно, що $d_H(u_\delta, 0) = \left(\frac{\xi_\delta}{V[K]}\right)^{1/n} < \delta$, $\mu[u_0] = 1 \leq \mu_0$.

Зі твердження леми (2.1) бачимо, що

$$\widetilde{h}(t,p) \geq \inf \widetilde{h}(t_0,p) exp\Big\{ \int_{t_0}^{t} \psi\big(\xi(s)\big)\sigma_m(A(s))ds \Big\}.$$

Якщо $x_0 = 0$, то $\inf \widetilde{h}(t_0,p) = \left(\frac{\xi_\delta}{V[K]}\right)^{1/n}$, і, як наслідок,

$$d_H(u(t),0) = \|x(t)\| + \|\widetilde{h}(t,.)\|_{C(S^{n-1})} \geq$$
$$\geq \left(\frac{\xi_\delta}{V[K]}\right)^{1/n} exp\Big\{ \int_{t_0}^{t} \psi\big(\xi(s)\big)\sigma_m(A(s))ds \Big\}.$$

Зафіксуємо ε_0, тоді внаслідок умови теореми існує число $t_1 = t_1(\delta) > t_0$, коли

$$\left(\frac{\xi_\delta}{V[K]}\right)^{1/n} exp\Big\{ \int_{t_0}^{t} \psi\big(\xi(s)\big)\sigma_m(A(s))ds \Big\} \geq \varepsilon_0,$$

звідки випливає, що $d_H(u(t_1),0) \geq \varepsilon_0$, що доводить нестійкість розв'язку $u = 0$. Теорема доведена. □

Теорема 4.4. *Припустимо, що диференціальне рівняння* (1) *таке, що розв'язок* $\xi = \zeta = 0$ *системи рівнянь порівняння* (17) *є* ζ*-нестійким. Тоді розв'язок* $u = 0$ *диференціального рівняння* (1) *є дивергентно нестійким.*

Наведемо ще один результат, який стосується нестійкості . Розглянемо диференціальне рівняння (7)

$$\frac{dx}{dt} = \psi\big(V[u(t)]\big)A(t)x(t)$$

і функцію Ляпунова $v(x) = x^{\mathrm{T}}Px$, $P^{\mathrm{T}} = P > 0$, $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, тоді

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}(t)P + PA(t))x\psi\big(V[u(t)]\big) \geq \\ &\geq \lambda_m(A^{\mathrm{T}}(t)P + PA(t))\psi\big(V[u(t)]\big)\|x\|^2 \geq \end{aligned}$$
$$\geq \begin{cases} \lambda_m(A^{\mathrm{T}}(t)P + PA(t))\psi\big(\xi(t)\big)\|x\|^2, \ \lambda_m(A^{\mathrm{T}}(t)P + PA(t)) \geq 0 \\ \lambda_m(A^{\mathrm{T}}(t)P + PA(t))\psi\big(\zeta(t)\big)\|x\|^2, \ \lambda_m(A^{\mathrm{T}}(t)P + PA(t)) \leq 0. \end{cases}$$

Означимо функцію

$$p(t) = \begin{cases} \frac{\lambda_m(A^{\mathrm{T}}(t)P + PA(t))\psi(\xi(t))}{\lambda_m(P)}, \ \lambda_m(A^{\mathrm{T}}(t)P + PA(t)) \geq 0 \\ \frac{\lambda_m(A^{\mathrm{T}}(t)P + PA(t))\psi(\zeta(t))}{\lambda_m(P)}, \ \lambda_m(A^{\mathrm{T}}(t)P + PA(t)) \leq 0 \end{cases} \tag{24}$$

$\frac{dv}{dt} \geq p(t)v$, і, як наслідок,

$$v(x(t)) \geq v(x_0)exp\Big\{\int_{t_0}^{t} p(s)ds\Big\}$$

і

$$\lambda_M(P)\|x\|^2 \geq \lambda_m(P)\|x_0\|^2 exp\Big\{\int_{t_0}^{t} p(s)ds\Big\},$$

$$\|x\| \geq \sqrt{\frac{\lambda_m(P)}{\lambda_M(P)}}\|x_0\|exp\Big\{\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} p(s)ds\Big\}.$$

Звідси виникає тощо, що

$$d_H(u(t), 0) \geq \sqrt{\frac{\lambda_m(P)}{\lambda_M(P)}}\|x_0\|exp\Big\{\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} p(s)ds\Big\}.$$

З цієї оцінки можемо сформувати твердження.

Теорема 4.5. *Припустимо, що диференціальне рівняння* (1) *таке, що для будь-якого* $\delta > 0$ *існує* $\xi_\delta < \delta$, *коли тощо*

$$\sup_{t \geq t_0} \int_{t_0}^{t} p(s)ds = +\infty,$$

де $p(s)$ *визначається за формулою* (24). *Тоді розв'язок* $u = 0$ *диференціального рівняння* (1) *нестійкий.*

5 Висновок

У роботі побудована система порівняння у вигляді двох інтегро-диференціальних рівнянь. На основі властивостей розв'язку цієї системи можна встановити достатні умови стійкості й нестійкості тривіального розв'язку для одного класу диференціальних рівнянь із похідною Хукухари.

Цікавим є застосування отриманих результатів до задачі про практичну або технічну стійкості диференціальних рівнянь із похідною Хукухари.

Крім того, в межах запропонованого в даній роботі підходу до дослідження розв'язків диференціальних рівнянь із похідною Хукухари актуальними є якісне дослідження системи порівняння і побудова її розв'язку.

[1] *Hukuhara M.* Intégration des applications measurables dont la valeur est un compact convexe // Funkcial. Ekvac. — 1967. — Vol. 10. — P. 205–223.

[2] *Слынько В. И.* Качественный анализ множеств траекторий механических систем // ПММ. — 2016. — Т. 80, № 1. — С. 34–45.

[3] *Очеретнюк Е., В., Слынько В. И.* Оценки площади решений псевдолинейных дифференциальных уравнений с производной Хукухары в пространстве $convR^2$ // Укр. мат. журн. — 2017. — Т. 69, № 2. — С. 189–214.

[4] *Матросов В. М., Анапольский Л. Ю., Васильев С. Н.* Метод сравнения в математической теории систем. — Новосибирск: Наука, 1980. — С. 478.

[5] *Хадвигер Г.* Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии. — М.: Наука, 1966. — С. 416.

[6] *Красносельский М. А., Лифшиц Е. А., Соболев А. В.* Позитивные линейные системы: метод положительных операторов. — М.: Наука, 1985. — С. 255.

[7] *Lakshmikantham V., Gnana Bhaskar T., Vasundhara DeviZJ.* Theory of set differential equations in metric spaces. — London: Cambridge Scientific Publisers, 2006. — P. 211.

[8] *Дискант В. И.* Обощение неравенств Боннезена // Доклады АН ССС. — 1973. — Т. 213, № 3. — С. 519–522.

[9] *Slyn'ko V. I.* Stability in terms of two measures for set difference equations in space $convR^n$ // Applicable Analysis. — 2017. — Vol. 96. no. 2. — P. 278–292.

[10] *Румянцев В. В. Озиранер А. С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. — М.: Наука, 1987. — С. 256.