Збірник праць Інституту математики НАН України 2018, т. 15, № 1, 16–26

УДК 539.375

Точний розв'язок задачі просторової теорії потенціалу для двох сфер

Ю. Ф. Діденко, В. І. Денисенко, О. К. Щетініна

Київський національній торговельно-економічний університет, Київ; d0212@ukr.net

The problem of theory of potentials for two spherical conductors of the same radius is considered. Using the transformation formulas of harmonic functions for origin of spherical coordinates transfer, an infinite system of algebraic equations is obtained to determine the unknown constants. An approach to study of properties of solutions is proposed. This approach can be applied to the investigation of infinite systems for solving problems of potential theory for several spheres.

Розглядається задача теорії потенціалів для двох сферичних провідників однакового радіусу. Користуючись формулами перетворення гармонічних функцій при переносі початку сферичних координат, одержано нескінченну систему алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих сталих. Запропоновано підхід до дослідження властивостей розв'язків. Даний підхід можна застосувати до дослідження нескінченних систем задач теорії потенціалів для кількох сфер.

Механіка композитних матеріалів висуває ряд нових наукових задач, які в ідеальній постановці (без урахування фізико-механічних і дифузійних властивостей перехідних шарів на границях розділу різнорідних матеріалів) можна віднести до задач деформування гомогенних середовищ. У роботі [1] побудовано точний розв'язок для пружного середовища, яке містить довільно розташовані (що не дотикаються) сферичні включення. В основу побудови цього розв'язку покладено відомі формули перетворення векторного розв'язку Ламе для зовнішності сфери при переході до нового початку координат [2].

У даній роботі одержано явний вигляд розв'язку нескінченності системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яка утворюється при розгляді задачі про розрахунок електростатичного поля у просторі, що містить два сферичні провідники. Метод одержання явного розв'язку алгебраїчної системи можна застосовувати при дослідженнях асимптотичних властивостей розв'язку нескінченних алгебраїчних систем у аналогічних складніших задачах теорії електростатики і теорії пружності в областях зі сферичними включеннями.

1 Постановка задачі

Розглядається задача про розрахунок електричного поля у просторі, який містить два сферичні провідники однакового радіусу r_0 зі сталими потенціалами $\pm V_0$. Відстань між центрами сфер дорівнює $2a$, при цьому $a > r_0$. Провідні сфери S_1 і S_2 визначаються у сферичних локальних координатах $(r_s, \theta_s, \varphi_s)$ $s = 1, 2$ рівняннями $r_s = r_0$, причому локальні системи координат введено так, що їхні полярні вісі збігаються і $\varphi_1 = \varphi_2$ для будь-якої точки простору (рис. 1). Сфера S_1 має потенціал V_0, а сфера S_r — потенціал $-V_0$. Розв'язок задачі, тобто гармонічну в зовнішності сфер функцію Ψ, яка задовольняє граничну умову

$$\Psi/S_1 = V_0, \quad \Psi/S_2 = -V_0, \quad \Psi(\infty) = 0 \tag{1}$$

шукаємо у вигляді суперпозиції зовнішніх гармонік для даних сфер:

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2,$$

$$\Psi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x_n \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta_1), \tag{2}$$

$$\Psi_2 = \sum_{n=0}^{-\infty} (-1)^n x_n \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta_2).$$

Тут $P_n(\cos\theta)$ — поліноми Лежандра, а $x_n(n = 0, 1, \ldots)$ — невідомі сталі. При цьому в поданні (2) функція Ψ є антисиметричною відносно площини $Z = O$, тому x_n можна визначити з умови

$$\Psi/S_2 = V_0.$$

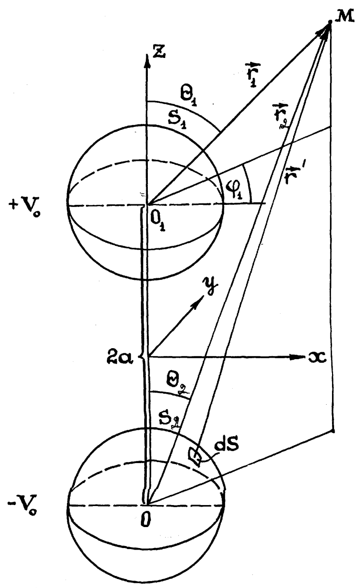

Рис 1

Скориставшись формулою перетворення [3]

$$\frac{P_n(\cos\theta_2)}{r_2^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(n+k)!}{n!k!}\ \frac{r_1^k}{(2a)^{n+k+1}} P_k(\cos\theta_1) \tag{3}$$

для потенціалу Ψ в околі сфери S_1, одержимо

$$\Psi = \sum_{k=0}^{\infty}\left(x_k\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{k+1} - \sum_{n=0}^{\infty} x_n \frac{(n+k)!}{n!k!}\ \frac{r_1^k}{(2a)^{n+k+1}}\right)\cdot$$
$$\cdot(-1)^k P_k(\cos\theta_1). \tag{4}$$

Таким чином, задоволення граничних умов для Ψ приводять до наступної нескінченної системі лінійних алгебраїчних рівнянь стосовно невідомих x_n:

$$x_k - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n+k+1}(n+k)!}{n!k!} x_n = \delta_{k,0};\quad k = 0, 1, \ldots, \tag{5}$$

де число $\alpha = \frac{r_0}{2a}$ є $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ і $\delta_{k,0}$ — символ Кронекера, тобто $\delta_{0,0} = 1$ і $\delta_{k,0} = 0$ при $k > 0$.

2 Явний розв'язок системи (5) (метод послідовних наближень)

Вкажемо найпростіші властивості можливості розв'язання алгебраїчної системи рівнянь

$$x_k - n\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n+k+1}(n+k)!}{n!k!} x_n = f_k; \quad k = 0, 1, \dots, \tag{6}$$

де число α є $\left(0; \frac{1}{2}\right)$. Близькі результати для аналогічної парної системи рівнянь див. в [4].

Перш за все, запишемо систему (6) в операторному вигляді. Нехай m — банаховий простір дійсних обмежених послідовностей $x = \{x_k\}_0^\infty$ із нормою

$$\|x\| = \sup_{k \geq 0} \mid x_k \mid$$

і лінійний оператор A:

$$Ax = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n+k+1}(n+k)!}{n!k!} x_n.$$

Покладемо $F = \{f_k\}_0^\infty$ і запишемо (6) у вигляді

$$x - Ax = F. \tag{7}$$

Рівності

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n+k+1}(n+k)!}{n!k!} = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{8}$$

вказують, що A є обмеженим лінійним оператором у просторі m із нормою

$$\|A\| = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \equiv 1 - \frac{1-2\alpha}{1-\alpha} < 1. \tag{9}$$

Із (9) випливає, що система (6) є повністю регулярною [5], тому для будь-якої послідовності $F \in m$ існує єдиний розв'язок x із простору m рівняння (7) (або системи (6)), при цьому x задається у вигляді ряду Неймана

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} A^k F, \tag{10}$$

який збігається в m. Таким чином, можна зробити висновок, що виконується наступне твердження.

Теорема 2.1. *Для будь-якого $F \in m$ існує єдиний розв'язок $X \in m$, при цьому справедливі оцінки*

$$\|X\| \leq \frac{1-\alpha}{1-2\alpha}\|F\|,$$

$$\|x_k\| \leq \mid f_k \mid + \left(\frac{1-\alpha}{1-2\alpha}\right)\left(\frac{2}{1-\alpha}\right)^{k+1} \|F\|. \tag{11}$$

Надалі обмежимося розглядом правої частини F у (7), яка відповідає правій частині в системі (5): $f_k = \delta_{k,0}$ $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Розписавши детально (10), одержимо для X вираз:

$$X = \sum_{k=0}^{\infty} x^{(k)}, \; x^{(k)} = A^k F = \{x_n^{(k)}\}_{n=0}^{\infty},$$

при цьому

$$x^{(0)} = \{\delta_{n,0}\}_{n=0}^{\infty}, \; x^{(1)} = \{\alpha^{n+1}\}_{n=0}^{\infty},$$

і якщо

$$x_n^{(k)} = c_k z_k^{n+1}, \; n = 0, 1, \ldots,$$

то

$$x_n^{(k+1)} = C_k z_k (T z_k)^{n+1}, \quad n = 0, 1, 2 \ldots,$$

де дробово-лінійне перетворення T:

$$Tz = \left(\frac{1}{\alpha} - z\right)^{-1}. \tag{12}$$

Таким чином, отримуємо

$$x_n = \delta_{n_1 0} + \alpha^{n+1} + \alpha(T\alpha)^{n+1} + \ldots +$$

$$+ \alpha(T\alpha)\ldots(T^{K-2}\alpha)(T^{K-1}\alpha)^{N-1} + \ldots (k \geq 2). \tag{13}$$

Розглянувши послідовність g_k:

$$g_1 = \alpha,\ g_{k+1} = Tg_k,\ k = 1, 2, \ldots$$

одержуємо

$$g_k = \frac{\beta(1-\beta^{2k})}{(1-\beta^2\beta^{2k})},\quad k = 1, 2, \ldots \tag{14}$$

де $\beta, \frac{1}{\beta}$ — нерухомі точки дробово-лінійного перетворення T:

$$\beta^{\pm 1} = \frac{1 \mp \sqrt{1-4\alpha^2}}{2\alpha},\quad \beta \in (0,1),\quad \frac{1}{\beta} \in (1;\infty). \tag{15}$$

Тоді (13) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} x_n &= \delta_{n,0} + g_1^{n+1} + g_1(g_2)^{n+1} + \ldots + g_1 \ldots g_{k-1}(g_k)^{n+1} + \ldots = \\ &= \delta_{n,0} + \alpha^{n+1} + \alpha\left\{\frac{\beta^1(1-\beta^4)}{(1-\beta^6)}\right\}^{n+1} + \ldots + \\ &+ \prod_{j=1}^{k-1}\frac{\beta(1-\beta^{2j})}{(1-\beta^2\beta^{2j})}\left\{\frac{\beta(1-\beta^{2k})}{(1-\beta^2\beta^{2k})}\right\}^{n+1} + \ldots \end{aligned} \tag{16}$$

3 Явний розв'язок системи (5) (метод перерозкладання)

Відомо, що електростатичне поле від двох заряджених сфер можна подати у вигляді [6]:

$$\psi = \psi_2 + \psi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{S_2}\frac{\omega(\theta')dS_2}{r_2'} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{S_1}\frac{\omega(\pi-\theta')}{r_1'}dS_1. \tag{17}$$

Тут інтегрування проводиться по поверхнях сфер S_1 і S_2; r_1 і r_2 — відстань від елемента інтегрування на відповідній сфері до точки спостереження; $\omega(\theta')$ — поверхнева густина заряду на нижній сфері (рис.1), $\omega(\pi-\theta')$ — на верхній сфері.

Перетворимо співвідношення (3.1), розглянемо потенціал, який створює нижня сфера (рис. 1). Тоді:

$$r_2' = \sqrt{r_0^2 + r_2^2 - 2r_0r_2\cos\gamma} = r_2\sqrt{1-2h\cos\gamma+h^2},\quad h = \frac{r_0}{r_1} < 1,$$

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\varphi', \tag{18}$$

де θ', φ' — змінні інтегрування на сфері S_2 (сферичні координати); r, θ, φ — сферичні координати точки, в якій обчислюється потенціал.

Нехай

$$\omega(\theta') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2}\alpha_n P_n(\cos\theta'), \tag{19}$$

де

$$\alpha_n = \int_0^{\pi} \omega(\theta')\sin\theta' P_n(\cos\theta')d\theta',$$

тоді

$$\psi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi} r_0^2 \sin\theta'\omega(\theta')d\theta' \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi'}{r_2'} \tag{20}$$

і, скориставшись [6]

$$\frac{1}{\sqrt{1-2h\cos\gamma+h^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(\cos\gamma), \tag{21}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_n(\cos\gamma)d\varphi_1 = 2\pi P(\cos\theta)P_n(\cos\theta'),$$

одержимо

$$\psi_2(r_2,\theta) = \frac{r_0}{2\varepsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\left(\frac{r_0}{r_2}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta). \tag{22}$$

Аналогічно одержуємо

$$\psi_1(r_1,\Theta_1) = -\frac{r_0}{2\varepsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\alpha_n\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{n+1} P_n(\cos\Theta_1). \tag{23}$$

Порівнявши (22), (23) з поданням (2) і скориставшись теоремою про єдиність для обмеженого розв'язку алгебраїчної системи (5), яку ми одержали в п. 2, отримуємо

$$x_n = -\frac{r_0}{2\varepsilon V_0}\alpha_n. \tag{24}$$

Для визначення явного вигляду коефіцієнта x_n скористаємося відомим розв'язком граничної задачі (1) у бісферичних координатах [7]

$$\psi(\xi,\eta) = V_0 = \sqrt{2ch\eta - 2\cos\xi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{sh(n+\frac{1}{2})\eta}{sh(n+\frac{1}{2})\eta_0}e^{-(n+\frac{1}{2})\eta_0}P_n(\cos\xi), \tag{25}$$

причому поверхнею нижньої сфери є координатна поверхня $\eta = -\eta_0$, а верхньої — $\eta = \eta_0$. Формули переходу від декартової системи координат до бісферичної мають вигляд

$$x = \frac{c\sin\xi\cos\xi}{ch\eta - \cos\xi},\quad y = \frac{c\sin\xi\sin\xi}{ch\eta - \cos\xi},\quad z = \frac{csh\eta}{ch\eta - \cos\xi},$$

$$ch\eta_0 = \frac{\alpha}{r_0},\quad sh\eta_0 = \frac{c}{r_0}, \tag{26}$$

$$0 \le \xi \le \pi,\quad -\infty < \eta < \infty,\quad -\pi \le \xi \le \pi,$$

$$h_\xi = \frac{c}{ch\eta - \cos\xi},\quad h_\eta\frac{c}{ch\eta - \cos\xi},\quad h_\xi = \frac{c\sin\xi}{ch\eta - \cos\xi}.$$

Для того, щоб визначити поверхневу щільність заряду на поверхні провідника, необхідно визначити нормальну похідну від потенціалу. Тоді [6]

$$\omega = -\varepsilon_0\frac{\partial\psi}{\partial n}, \tag{27}$$

де n — нормаль, яка направлена від провідника до діелектрика. В нашому випадку на нижній сфері маємо

$$\omega = -\frac{\varepsilon_0}{h_\eta}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}, \tag{28}$$

$$\omega = \frac{\varepsilon_0}{h\eta}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\ \mid\ \eta = \eta_0. \tag{29}$$

Провівши відповідні обчислення, одержимо

$$\omega(\theta') = -\frac{2_0V\varepsilon_0}{r_0}f(\eta_0,\xi),$$

$$f(\eta_0,\xi) = \frac{1}{4}\left\{1 + \frac{(2ch\eta_0 - 2\cos\xi)^{\frac{3}{2}}}{sh\eta_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)cht\left(n+\frac{1}{2}\right)\times\right. \tag{30}$$

$$\times\, \eta_0\; e^{-(n+\frac{1}{2})\eta_0} P_n(\cos\xi)\Big\}.$$

Порівнявши співвідношення (19), (25) і (30), одержимо

$$x_n = \int\limits_0^{\pi} f(\eta_0, \xi) \sin\theta' P_n(\cos\theta') d\theta'. \tag{31}$$

Після заміни змінної у (31) маємо

$$x_k = \frac{\delta_{k_1 0}}{2} + (-1)^k sh\eta_0 \int\limits_{-1}^{1} P_k\left(\frac{\tau ch\eta_0 - 1}{ch\eta_0 - \tau}\right)(2ch\eta_0 - 2\tau)^{-\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right) cth\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta_0 e^{-(n+\frac{1}{2})\eta_0} P_n(\tau) d\tau.$$

Тоді, скориставшись поданням

$$P_k\left(\frac{\tau ch\eta_0 - 1}{ch\eta_0 - \tau}\right) = \frac{(ch\eta_0 - \tau)^{\frac{1}{2}}}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1} z^{-k-1}((1+z^2)ch\eta_0 +$$

$$+2z - \tau(1 + z^2 + 2zch\eta_0))^{-\frac{1}{2}} dz,$$

після нескладних перетворень одержимо

$$x_k = \frac{\delta_{k_1 0}}{2} + \frac{(-1)^k sh_0}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1} \frac{z^{-k-1}}{(1 + z^2 + 2zch\eta_0)^{\frac{1}{2}}} \cdot$$

$$\cdot \sum_{n=0}^{\infty} h^{n+\frac{1}{2}} cth\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta_0 e^{-(n+\frac{1}{2})\eta_0} dz, \tag{32}$$

де

$$h = \frac{(1+z^2)ch\eta_0 + 2z - (1-z^2)sh\eta_0}{1 + z^2 + 2zch\eta_0}.$$

Враховуючи, що $e^{\eta_0} = \beta^{-1}$, де β — визначається формулою (15), можна записати

$$ch\eta_0 = \frac{1+\beta^2}{2\beta}, \quad sh\eta_0 = \frac{1-\beta^2}{2\beta}, \quad h = \frac{\beta + z}{1 + \beta z}.$$

Таким чином, після зміни змінної $\mu = \frac{\beta - z}{1-\beta z}$ (32) можна подати у вигляді

$$x_k = \frac{\delta_{k_1 0}}{2} - \frac{(1-\beta^2)}{2\pi i} \int\limits_{|\mu|=1} \frac{(1-\beta\mu)^k}{(\beta-\mu)^{k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \beta^n \frac{1+\beta^{2n+1}}{1-\beta^{2n+1}} d\mu. \qquad (33)$$

Оскільки $|\mu| = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \beta^n \frac{1+\beta^{2n+1}}{1-\beta^{2n+1}} = \frac{1}{1-\mu\beta} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n}{1-\mu\beta^{2n+1}},$$

то із (33) за теоремою про лишки маємо:

$$x_k = \frac{\delta_{k_k 0}}{2} + (1-\beta^2) \sum_{n=1}^{\infty} \underset{\mu=\beta^{-2n-1}}{res} \frac{(1-\beta\mu)^k}{(\beta-\mu)^{k+1}} \cdot$$

$$\cdot \frac{\beta^n}{1-\mu\beta^{2n+1}} + \frac{\delta_{K/0}}{2} \underset{\mu=\frac{1}{\beta}}{res} \frac{1}{(1-\mu\beta)(\beta-\mu)} =$$

$$= (1-\beta^2)\beta^k \sum_{n=1}^{\infty} \beta^n \frac{(1-\beta^{2n})^k}{(1-\beta^{2n+1})^{k+1}} + \delta_{k_k 0}.$$

Отже, в роботі розглянута найпростіша задача електростатики для простору зі сферичними включеннями. Ця задача допускає точний розв'язок методом розділення змінних у бісферичних координатах. Такий підхід можна застосовувати у складних задачах математичної фізики, які не допускають точного розв'язку. Різні види подання розв'язків можуть виявитися корисними при вивченні різних задач електростатики, акустики і теорії пружності зі сферичними включеннями.

[1] *Диденко Ю.Ф., Улитко А.Ф.* Равновесие упругой среды со сферическими включениями // Тез. докл. I Всесоюз. конф. "Механика неоднородных структур". — Киев, 1983. — 250 с.

[2] *Диденко Ю.Ф., Улитко А.Ф.* Преобразование векторного решения внешних задачтеории упругости для сферы при изменении начала координат // Докл. АН УССР. Сер. "А". — 1984. — 8. — С. 35–38.

[3] *Гобсон Е.В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. — М.: Изд-во иностр. лит., 1952. — 476 с.

[4] *Годин Ю.А., Зильберглейт А.С.* Осесимметричная задача электростатикт о диэлектрическом шаре около проводящей плоскости // Журн. техн. физики. — 1986. — вып. 6. — С. 1082–1090.

[5] *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Методы приближенного решения уравнений в частных производных. — М.; Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1936. — 528 с.

[6] *Стреттон Дж.* Теория электромагнетизма. — М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1948. — 540 с.

[7] *Лебедев Н.Н., Скальская И.П., Уфлянд Я.С.* Сборник задач по математической физике. — М.: Гостехиздат, 1955. — 420 с.