Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2017, т. 14, № 4, 125–136

УДК 517.927

І. М. Лисенко, Т. М. Ісаєва

НПУ імені М.П. Драгоманова, Київ;
iryna.pratsiovyta@gmail.com, isaeva_tn@ukr.net

Двоїсті системи кодування дійсних чисел з нескінченним алфавітом і зв'язки між ними

We study relations between two self-similar systems for representation of real numbers with infinite alphabet and zero redundancy based on expansions of numbers in positive and alternating binary series. Expression for conversion of digits of first representation of number to digits of its second representation is found.
Key words: binary representation of numbers, $\Delta^{\sharp}$-representation of numbers, $\Delta^{2^{\infty}}$-representation of numbers, binary series, projector of representation, relation between digits of different representations.

Робота присвячена вивченню взаємозв'язків між двома самоподібними системами зображення дійсних чисел із нескінченним алфавітом і нульовою надлишковістю, що ґрунтуються на розкладах чисел у додатні й знакозмінні двійкові ряди. Знайдено вираз цифр числа одного зображення через цифри іншого його зображення.
Ключові слова: двійкове зображення чисел, $\Delta^{\sharp}$-зображення чисел, $\Delta^{2^{\infty}}$-зображення чисел, двійковий ряд, проектор одного зображення числа в інше, зв'язок між цифрами різних зображень.

Вступ

Для вивчення математичних об'єктів зі складною локальною тополого-метричною структурою і фрактальними властивостями, зокрема, функцій, ймовірнісних мір, динамічних систем тощо, все ширше використовують різні системи кодування (зображення) дійсних чисел [1, 16, 18], в тому числі і системи з нескінченним алфавітом [4, 9, 14, 15]. Одні з них мають самоподібні властивості [7, 17, 21, 23], а інші — ні [1, 4, 9, 10]. Геометрія перших значно простіша і це спрощує їхнє використання.

Ця робота стосується двох систем із N-самоподібними властивостями, між якими існує тісний зв'язок і які в певному сенсі є двоїстими.

Деякі системи кодування дійсних чисел із нескінченним алфавітом можна отримати шляхом перекодування двосимвольних зображень чисел. Так, шляхом перекодування класичного двійкового зображення числа:

$$(0;1] \ni x = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + ... + \frac{\alpha_n}{2^n} + ... \equiv \Delta^2_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...},$$

де $\alpha_n \in A_2 \equiv \{0,1\}$, можна отримати Δ^{2^∞}-зображення:

$$(0;1] \ni x = \frac{1}{2^{c_1}} + \frac{1}{2^{c_1+c_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{c_1+c_2+\ldots+c_n}} + \ldots \equiv \Delta^{2^\infty}_{c_1c_2...c_n...},$$

де $c_n \in A = N = \{1,2,...,n,...\}$, а саме:

$$\Delta^2_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...} = \Delta^2_{\underbrace{0\cdots0}_{c_1-1}1\underbrace{0\cdots0}_{c_2-1}1...\underbrace{0\cdots0}_{c_k-1}1...} = \Delta^{2^\infty}_{c_1c_2...c_n...},$$

яке вивчалось і узагальнювалось у роботах [3, 7].

Кожне число $x \in (0;1)$ має єдине 2^∞-зображення. Тому коректно на $(0;1]$ означені функції: $y = c_k(x)$, $k = 1,2,...$, які набувають натуральних значень.

Множина всіх чисел $x \in (0;1]$, які мають 2^∞-зображення, такі, що $c_i(x) = s_i \in N$, $i = \overline{1,m}$ називається циліндром рангу m із основою $s_1s_2...s_m$ і позначається $\Delta^{2^\infty}_{s_1s_2...s_m}$.

Циліндр є півінтервалом $(a;b]$ з кінцями

$$a = \frac{1}{2^{s_1}} + \frac{1}{2^{s_1+s_2}} + \dots + \frac{1}{2^{s_1+s_2+\dots s_m}} \equiv \Delta^{2^\infty}_{s_1 s_2 \dots s_{m-1}[s_m+1](1)},$$

$$b = a + \frac{1}{2^{s_1+s_2+\dots+s_m}} \equiv \Delta^{2^\infty}_{s_1 s_2 \dots s_{m-1} s_m (1)}.$$

Дещо «схожим» до 2^∞-зображення чисел є $\Delta^\sharp$-зображення:

$$(0;1] \ni x = \frac{1}{2^{a_1-1}} - \frac{1}{2^{a_1+a_2-1}} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{a_1+a_2+\dots+a_n-1}} + \dots \equiv \Delta^\sharp_{a_1 a_2 \dots a_n \dots},$$

де $a_n \in N = \{1, 2, \dots n, \dots\}$, тополого-метрична теорія якого побудована в роботах [11, 12].

Зауважимо, що $\Delta^\sharp$-представлення числа є виразом значення строго зростаючої сингулярно неперервної функції Мінковського, який знайшов Салем [22]. Ця функція, яку 1911 р. запропонував до розгляду Г. Мінковський [20], означувалась в оригіналі через дроби Фарея. Вона встановлює відповідність між елементарним ланцюговим дробом із елементами (a_n) і відповідним знакозмінним рядом, раціональними і квадратично ірраціональними числами.

Для кожної з указаних систем зображення чисел алфавітом є множина натуральних чисел. Природним є інтерес до двох задач:

1. Який зв'язок між зображеннями ($\Delta^\sharp$ і Δ^{2^∞}) одного і того самого числа?

2. Які властивості має функція, аргумент і значення якої мають однакові зображення у вказаних системах кодування, тобто

$$f(\Delta^\sharp_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}) = \Delta^{2^\infty}_{a_1 a_2 \dots a_n \dots},$$

$$\varphi(\Delta^{2^\infty}_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}) = \Delta^\sharp_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}?$$

Враховуючи, що кожне число $x \in (0;1]$ має єдине 2^∞-зображення, функція $\varphi(x)$ є коректно означеною. Тоді як про коректність означення функції f в точках, що мають два формально різні зображення, треба подбати?

Ця робота повністю присвячена першій задачі.

1. Зв'язок між $\Delta^\sharp$-зображенням числа і його класичним двійковим зображенням

Лема 1. *При довільних натуральному n і набору натуральних чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ число*

$$x = \frac{1}{2^{a_1-1}} - \frac{1}{2^{a_1+a_2-1}} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{a_1+\ldots+a_{n-1}+a_n-1}} \equiv \Delta^\sharp_{a_1\ldots a_{n-1}a_n(\varnothing)} \quad (1)$$

є раціональним числом із півінтервалу $(0; 2^{1-a_1}]$, причому якщо $a_n = 1$, то

$$x = \sum_{k=1}^{n-2} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{a_1+\ldots+a_k-1}} + \frac{(-1)^{n-2}}{2^{a_1+\ldots+a_{n-2}+a'_{n-1}-1}} \equiv \Delta^\sharp_{a_1\ldots a_{n-2}[a_{n-1}+1](\varnothing)}, \quad (2)$$

де $a'_{n-1} = a_{n-1} + 1$.

Раціональність числа x очевидна. Доведемо першу частину твердження. Для цього використаємо метод математичної індукції. При $n = 1$ твердження правильне, оскільки $x = 2^{1-a_1}$. Припускаємо істинність твердження для $n = k$, тобто що

$$\frac{1}{2^{a_1-1}} - \frac{1}{2^{a_1+a_2-1}} + \ldots + \frac{(-1)^{k-1}}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_k-1}} = x \in (0; 2^{1-a_1}].$$

Розглянемо $n = k + 1$. Очевидно, що

$$x = \frac{1}{2^{a_1-1}} - \frac{1}{2^{a_1}} \cdot x_1,$$

де $x_1 = \frac{1}{2^{a_2-1}} - \frac{1}{2^{a_2+a_3-1}} + \ldots + \frac{(-1)^k}{2^{a_2+a_3+\ldots+a_{k+1}-1}}$.

За припущенням $x_1 \in (0; 2^{1-a_2}]$. Тому

$$0 < \frac{1}{2^{a_1-1}} - \frac{1}{2^{a_1+a_2-1}} \leq x = \frac{1}{2^{a_1-1}} - \frac{1}{2^{a_1}} \cdot x_1 < \frac{1}{2^{a_1-1}},$$

що й треба було довести.

Тепер доведемо другу частину твердження. Розглянувши різницю виразів (1) і (2) при $a_n = 1$, дістанемо:

$$(-1)^{n-2}\left(\left(\frac{1}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}-1}} - \frac{1}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+1-1}}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_{n-2}+(a_{n-1}+1)-1}}\right) =$$
$$= (-1)^{n-2}\left(\frac{1}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}}} - \frac{1}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}}}\right) = 0.$$

Отже, при $a_n = 1$ для числа x має місце розклад (2). Лему 1 доведено.

Лема 2. *Число x, що є значенням виразів* (1) *або* (2), *є двійково-раціональним, тобто має класичне двійкове зображення з періодом* (0).

Враховуючи лему 1, ми можемо вважати, що n є числом парним, тобто $n = 2m$. Тоді

$$x = \left(\frac{1}{2^{a_1-1}} - \frac{1}{2^{a_1+a_2-1}}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{a_1+\ldots+a_{2m-1}-1}} - \frac{1}{2^{a_1+\ldots+a_{2m}-1}}\right) =$$
$$= \frac{2^{a_2}-1}{2^{a_1+a_2-1}} + \frac{2^{a_4}-1}{2^{a_1+a_2+a_3+a_4-1}} + \ldots + \frac{a^{2m}-1}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_{2m}-1}}.$$

Оскільки $2^{a_i} - 1 = 2^{a_i-1} + 2^{a_i-2} + \ldots + 2^1 + 2^0$, то

$$\frac{2^{a_i}-1}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_i-1}} = \frac{2^{a_i-1} + 2^{a_i-2} + \ldots + 2^1 + 2^0}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_i-1}} =$$

$$= \frac{1}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_{i-1}}} + \frac{1}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_{i-1}+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_i-1}}.$$

Тому

$$x = \left(\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_1+1}} + \frac{1}{2^{a_1+2}} + \ldots + \frac{1}{2^{a_1+a_2-1}}\right) +$$

$$+\left(\frac{1}{2^{a_1+a_2+a_3}}+\frac{1}{2^{a_1+a_2+a_3+1}}+\ldots+\frac{1}{2^{a_1+a_2+a_3+a_4-1}}\right)+\ldots+$$

$$+\left(\frac{1}{2^{a_1+\ldots+a_{2m-1}}}+\frac{1}{2^{a_1+\ldots+a_{2m-1}+1}}+\ldots+\frac{1}{2^{a_1+\ldots+a_{2m-1}+a_{2m}-1}}\right)=$$

$$=\Delta^2_{\underbrace{0\ldots0}_{a_1-1}\underbrace{1\ldots1}_{a_2}\underbrace{0\ldots0}_{a_3}\underbrace{1\ldots1}_{a_4}\underbrace{0\ldots0}_{a_5}\ldots\underbrace{1\ldots1}_{a_{2m}}(0)}.$$

Лему 2 доведено.

Теорема 3. *Мають місце рівності:*

1) $\Delta^\sharp_{a_1a_2\ldots a_{2k}(\varnothing)}=\Delta^2_{\underbrace{0\ldots0}_{a_1-1}\underbrace{1\ldots1}_{a_2}\ldots\underbrace{0\ldots0}_{a_{2k-1}}\underbrace{1\ldots1}_{a_{2k}}(0)}$;

2) $\Delta^\sharp_{a_1a_2\ldots a_{2k}a_{2k+1}(\varnothing)}=\Delta^2_{\underbrace{0\ldots0}_{a_1-1}\underbrace{1\ldots1}_{a_2}\ldots\underbrace{0\ldots0}_{a_{2k-1}}\underbrace{1\ldots1}_{a_{2k}}\underbrace{0\ldots0}_{a_{2k+1}}1(0)}$;

3) $\Delta^\sharp_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}=\Delta^2_{\underbrace{0\ldots0}_{a_1-1}\underbrace{1\ldots1}_{a_2}\ldots\underbrace{0\ldots0}_{a_{2k-1}}\underbrace{1\ldots1}_{a_{2k}}\ldots}$.

1. Справедливість твердження 1) випливає з леми 2.

2. Оскільки можливі випадки $a_{2k+1}=1$ або $a_{2k+1}>1$, то з урахуванням рівностей (1), (2) й леми 2 отримаємо:

$$\Delta^\sharp_{a_1a_2\ldots a_{2k}a_{2k+1}(\varnothing)}=\Delta^2_{\underbrace{0\ldots0}_{a_1-1}\underbrace{1\ldots1}_{a_2}\ldots\underbrace{0\ldots0}_{a_{2k-1}}\underbrace{1\ldots1}_{a_{2k}}\underbrace{0\ldots0}_{a_{2k+1}}1(0)}.$$

3. Оскільки

$$x=\left(\frac{1}{2^{a_1-1}}-\frac{1}{2^{a_1+a_2-1}}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^{a_1+\ldots+a_{2k-1}-1}}-\frac{1}{2^{a_1+\ldots+a_{2k}-1}}\right)+\ldots=$$
$$=\frac{2^{a_2}-1}{2^{a_1+a_2-1}}+\frac{2^{a_4}-1}{2^{a_1+a_2+a_3+a_4-1}}+\ldots+\frac{2^{2k}-1}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_{2k}-1}}+\ldots$$

і $2^{a_i}-1=2^{a_i-1}+2^{a_i-2}+\ldots+2^1+2^0$, то міркуючи аналогічно, отримаємо

$$x=\left(\frac{1}{2^{a_1}}+\frac{1}{2^{a_1+1}}+\frac{1}{2^{a_1+2}}+\ldots+\frac{1}{2^{a_1+a_2-1}}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{2^{a_1+a_2+a_3}}+\frac{1}{2^{a_1+a_2+a_3+1}}+\ldots+\frac{1}{2^{a_1+a_2+a_3+a_4-1}}\right)+\ldots+$$
$$+\left(\frac{1}{2^{a_1+\ldots+a_{2k-1}}}+\frac{1}{2^{a_1+\ldots+a_{2k-1}+1}}+\ldots+\frac{1}{2^{a_1+\ldots+a_{2k-1}+a_{2k}-1}}\right)+\ldots=$$
$$=\Delta^2_{\underbrace{0\ldots0}_{a_1-1}\underbrace{1\ldots1}_{a_2}\ldots\underbrace{0\ldots0}_{a_{2k-1}}\underbrace{1\ldots1}_{a_{2k}}\ldots}.$$

Теорему 3 доведено.

2. Зв'язок між цифрами зображень одного і того самого числа

Залежності між цифрами зображень того самого числа x у різних системах кодування можна отримати через вище описаний їхній зв'язок з класичним двійковим зображенням:

$$x=\Delta^{\sharp}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}\equiv\Delta^2_{\underbrace{0\ldots0}_{a_1-1}\underbrace{1\ldots1}_{a_2}\underbrace{0\ldots0}_{a_3}\underbrace{1\ldots1}_{a_4}\underbrace{0\ldots0}_{a_5}\ldots},$$
$$x=\Delta^{2^\infty}_{c_1c_2\ldots c_n\ldots}\equiv\Delta^2_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1-1}1\underbrace{0\ldots0}_{c_2-1}1\underbrace{0\ldots0}_{c_3-1}1\underbrace{0\ldots0}_{c_4-1}1\ldots}.$$

Розглянемо два крайні випадки.

Лема 4. *Якщо* $x=\Delta^{\sharp}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}=\Delta^{2^\infty}_{c_1c_2\ldots c_n\ldots}$ *і при цьому* $a_{2k}=1$ *для будь-якого* $k\in N$, *то*

$$c_1=a_1,\ c_k=a_{2k-1}+1,\ \ k=2,3,\ldots. \tag{3}$$

Доведення. Оскільки в цьому випадку

$$x=\Delta^{\sharp}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}=\Delta^2_{\underbrace{0\ldots0}_{a_1-1}1\underbrace{0\ldots0}_{a_3}1\underbrace{0\ldots0}_{a_5}1\ldots}=\Delta^2_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1-1}1\underbrace{0\ldots0}_{c_2-1}1\underbrace{0\ldots0}_{c_3-1}1\ldots},$$

то, визначаючи номер місця останнього нуля в серії, матимемо

$c_1 - 1 = a_1 - 1,$
$c_1 - 1 + c_2 - 1 + 1 = a_1 - 1 + a_3 + 1,$
$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
$c_1 - 1 + c_2 - 1 + \ldots + c_k - 1 + (k-1) = a_1 - 1 + a_3 + \ldots + a_{2k-1} + (k-1).$

Звідки за індукцією отримуємо рівності (3). $\square$

Лема 5. *Якщо* $x = \Delta^{\sharp}_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots} = \Delta^{2^\infty}_{c_1 c_2 \ldots c_n \ldots}$ *і при цьому* $a_{2k} > 1$ *для будь-якого* $k \in N$*, то*

$c_1 = a_1,$
$c_{1+i} = 1$ *при* $i = \overline{1, a_2 - 1},$
$c_{a_2+1} = a_3 + 1,$
$c_{a_2+1+i} = 1, \ i = \overline{1, a_4 - 1},$
$c_{a_2+a_4+1} = a_5 + 1,$
$c_{a_2+a_4+1+i} = 1, \ i = \overline{1, a_6 - 1},$
$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
$c_{a_2+a_4+\ldots+a_{2k}} = 1,$
$c_{a_2+a_4+\ldots+a_{2k}+1} = a_{2k+1} + 1,$
$c_{a_2+a_4+\ldots+a_{2k}+1+i} = 1, \ i = \overline{1, a_{2k+2} - 1}, \ 1 < k \in N.$

Доведення. З рівності

$$\Delta^2_{\underbrace{0\ldots0}_{a_1-1}\underbrace{1\ldots1}_{a_2}\underbrace{0\ldots0}_{a_3}\underbrace{1\ldots1}_{a_4}\underbrace{0\ldots0}_{a_5}\ldots} = \Delta^2_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1-1}1\underbrace{0\ldots0}_{c_2-1}1\underbrace{0\ldots0}_{c_3-1}1\underbrace{0\ldots0}_{c_4-1}1\ldots}$$

маємо: $c_1 = a_1$; якщо $a_2 = n > 1$, то це рівносильно системі $c_2 = c_3 = \ldots = c_m = 1$, тобто $c_{1+i} = 1$ при $i = \overline{1, a_2 - 1}$. Тоді $c_{a_2+1} = a_3 + 1$. Аналогічно, якщо $a_4 > 1$, то $c_{a_2+1+i} = 1$ при $i = \overline{1, a_4 - 1}$, $c_{a_2+a_4+1} = a_5 + 1$ і так далі. Лему доведено.

Тепер розглянемо загальний випадок.

Теорема 6. *Якщо* $x = \Delta^{\sharp}_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots} = \Delta^{2^\infty}_{c_1 c_2 \ldots c_n \ldots}$*, то* $c_1 = a_1$*;*

$$c_2 = \begin{cases} a_3 + 1, \ \textit{якщо } a_2 = 1, \\ 1, \ \textit{якщо } a_2 > 1; \end{cases}$$

$$c_m = \begin{cases} a_{2k+1} + 1 \ \textit{при } m - 1 = a_2 + a_4 + \cdots + a_{2k}, \\ 1 \ \textit{при } a_2 + a_4 + \cdots a_{2k} < m - 1 < a_2 + \cdots + a_{2k} + a_{2k+2}. \end{cases}$$

Доведення. Рівність $c_1 = a_1$ є очевидною. При $m = 2$, з урахуванням попередніх лем очевидно, що
$c_2 = \begin{cases} a_3 + 1, \text{ якщо } a_2 = 1, \\ 1, \text{ якщо } a_2 > 1. \end{cases}$

Розглянемо c_3. Можливі випадки

$$3 = a_2 + 1 \qquad \text{або} \qquad 3 > a_2 + 1.$$

У першому випадку маємо $a_2 = 2$ і $c_3 = a_3 + 1$.

У другому випадку $a_2 = 1$ і $3 = a_2 + a_4 + 1$ або $3 < a_2 + a_4 + 1$.

Якщо $3 = a_2 + a_4 + 1$, то $c_3 = a_5 + 1$.

Якщо $3 < a_2 + a_4 + 1$, то $c_3 = 1$.

Переходячи до загального випадку, маємо зазначити, що число $(m-1)$ виражає кількість цифр 1 серед перших $n = \sum\limits_{i=1}^{m} c_i$ цифр двійкового зображення числа x.

Тому для будь-якого $m \in N$ існує k, таке, що

$$m - 1 = a_2 + a_4 + \cdots + a_{2k} \quad \text{або}$$

$$a_2 + a_4 + \cdots + a_{2k} < m - 1 < a_2 + a_4 + \cdots + a_{2k} + a_{2k+2}.$$

У першому випадку очевидно, що $a_{2k+1} = c_m - 1$, а у другому – $c_m = 1$. Теорему доведено.

Зауваження. Відносно легко встановити зв'язок між указаними зображеннями ірраціональних чисел допомогли відомі їхні зв'язки з класичним двійковим зображенням. Із отриманих виразів цифр Δ^{2^∞}-зображення числа легко вивести вирази цифр $\Delta^{\sharp}$-зображення.

Теорема 7. *Якщо* $x = \Delta^{\sharp}_{a_1 a_2 \ldots a_{2k}(\varnothing)} = \Delta^{2^\infty}_{c_1 c_2 \ldots c_n \ldots}$, *то* $c_1 = a_1$, *при* $n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{2k} + 1$ *маємо* $c_{n+1} = 2$, $c_{n+1+i} = 1$, $i = 1, 2, \ldots$, *а для* $j < n$
$c_j = \begin{cases} a_{2m+1} + 1 \quad \text{при } j - 1 = a_2 + a_2 + \ldots + a_{2m}, \\ 1 \text{ при } a_2 + a_4 + \cdots a_{2m} < j - 1 < a_2 + \cdots + a_{2m} + a_{2m+2}. \end{cases}$

Доведення. Оскільки

$$\begin{aligned}\Delta^{\sharp}_{a_1a_2\ldots a_{2k}(\varnothing)} &= \Delta^2_{\underbrace{0\cdots0}_{a_1-1}\underbrace{1\cdots1}_{a_2}\underbrace{0\cdots0}_{a_3}\cdots\underbrace{1\cdots1}_{a_{2k}}(0)} = \\ &= \Delta^2_{\underbrace{0\cdots0}_{a_1-1}\underbrace{1\cdots1}_{a_2}\underbrace{0\cdots0}_{a_3}\cdots\underbrace{1\cdots1}_{a_{2k}-1}10(1)} = \\ &= \Delta^2_{\underbrace{0\cdots0}_{c_1-1}1\underbrace{0\cdots0}_{c_2-1}1\ldots\underbrace{0\cdots0}_{c_n-1}10(1)} = \Delta^{2^\infty}_{c_1c_2\ldots c_n2(1)},\end{aligned}$$

то очевидно, що $c_1 = a_1$, при $n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{2k} + 1$ маємо $c_{n+1} = 2$, $c_{n+1+i} = 1$, $i = 1, 2, \ldots$. При $j < m$ для обґрунтування твердження достатньо повторити міркування наведені при доведенні попередньої теореми. Теорему доведено.

Зауважимо, що аналогічні задачі для інших двоїстих зображень, навіть самоподібних, є суттєво складнішими (наприклад, для рядів Люрота: додатних [23] і знакозмінних [17]). Для несамоподібних зображень (наприклад, рядів Остроградського-Серпінського-Пірса [1] і рядів Енгеля [2], рядів Сільвестера [4, 10] і рядів Остроградського [9]) вони є екстраскладними.

Література

[1] *Барановський О. М., Працьовитий М. В., Торбін Г. М.* Ряди Остроградського-Серпінського-Пірса та їх застосування. – К.: Наукова думка. – 2013. – 288 с.

[2] *Гетьман Б. І., Працьовитий М. В., Барановський О. М.* Про властивості однієї сім'ї множин канторівського типу, що визначається умовами на елементи розкладу в ряд Енгеля // Наук. часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. – 2010, № 11. – С. 119-142.

[3] *Гончаренко Я. В., Лисенко І. М.* Геометрія нескінченносимвольного q_0^∞-зображення дійсних чисел та її застосування у метричній теорії чисел// Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз-мат. науки. – 2013. – №15. – С. 100-118.

[4] *Задніпряний М. В., Працьовита І. М.* Нескінченні згортки Бернуллі, пов'язані з рядами Сільвестера. // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. – 2010, № 11. – С. 232-240.

[5] *Ісаєва Т. М.* Одне кодування дійсних чисел засобами нескінченного алфавіту і його застосування: автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук. – Київ, 2017. – 20 с.

[6] *Ісаєва Т. М.* Δ^{μ}-зображення і основа нової метричної теорії дійсних чисел // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. – К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2014. – № 16. – С. 164-185.

[7] *Працьовитий М. В.* Геометрія дійсних чисел у їх кодуваннях засобами нескінченного алфавіту як основа топологічних, метричних, фрактальних і ймовірнісних теорій // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. – 2013, № 14. – С. 189-216.

[8] *Працьовитий М. В.* Геометрія класичного двійкового зображення дійсних чисел. – Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова. – 2012. – 68 с.

[9] *Працьовита І. М.* Розклади дійсних чисел в ряди Остроградського 2-го виду (O_2- та $\overline{O}_2$-зображення), їх геометрія та застосування // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. – 2008. – № 9. – С. 128-147.

[10] *Працьовитий М. В., Задніпряний М. В.* Геометрія і основи метричної теорії зображення дійсних чисел рядами Сільвестера // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. – 2011. – №12. – С. 76-85.

[11] *Працьовитий М. В., Ісаєва Т. М.* Кодування дійсних чисел з нескінченним алфавітом і основою 2 // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. – 2013. – № 15. – С. 6-23.

[12] *Працьовитий М. В., Ісаєва Т. М.* Про деякі застосування $\Delta^{\sharp}$-зображення дійсних чисел // Буковинський математичний журнал. – 2014. – Т. 2, № 2-3. – С. 187-197.

[13] *Працьовитий М. В., Лещинський О. Л.* Властивості випадкових величин, заданих розподілами елементів свого $\widetilde{Q}_\infty$-зображення // Теорія ймовірностей та мат. стат. – 1997. – № 57. – С. 134-140.

[14] *Працьовитий М. В.* Поліосновне $\widetilde{Q}$-представлення і фрактальні математичні об'єкти з ним пов'язані // Фрактальний аналіз та суміжні питання. – Київ: ІМ НАН України. – НПУ імені М. П. Драгоманова. – 1998. – № 2. – С. 14-35.

[15] *Працьовитий М. В.* Фрактальні властивості спектра розподілу випадкової величини, Q-знаки якої утворюють однорідний ланцюг Маркова // Фрактальний аналіз та суміжні питання. – Київ: ІМ НАНУ. – НПУ ім. М. П. Драгоманова. – 1998. – № 2. – С. 36-48.

[16] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних роподілів. – К.: НПУ ім. М. П. Драгоманова.– 1998. –296с.

[17] *Працьовитий М. В., Хворостіна Ю. В.* Випадкова величина, символи L-зображення якої є випадковими величинами з марковською залежністю // Теорія ймовірності та математична статистика, Вип. 91. – 2014. – С. 146-157.

[18] *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. – Київ: Наукова думка. – 1992. – 208 с.

[19] *Isaieva Tetiana M., Pratsiovytyi Mykola V.* Transformations of $(0,1]$ preserving tails Δ^μ-representation of numbers // Algebra and Discrete Mathematics. – Volume **22** (2016). №1, pp. 102-115.

[20] *Minkowski H.* Gesammelte Abhandlungen. – Berlin. – 1911, vol. 2. – P. 50-51.

[21] *Pratsiovytyi M., Khvorostina Yu.* Topological and metric properties of distributions of random variables represented by the alternating Luroth series with independent elements, Random Oper. Stoch. Equ. 21 (2013), № 4, P. 385-401.

[22] *Salem R.* On some singular monotonic function which are strictly increasing // Trans. Amer. Math. Soc.– 1943, 53. – P. 427-439.

[23] *Zhykharyeva Yulia, Pratsiovytyi Mykola* Expansions of numbers in positive Luroth series and their applications to metric, probabilistic and fractal theories of numbers // Algebra and Discrete Mathematics, Vol. 14 (2012), № 1. P. 145-160.