Збірник праць Інституту математики НАН України 2016, т. 13, № 3, 99–104

УДК 539.3

Основні співвідношення для розрахунку пружного поля в середовищі зі сферичними включеннями

Діденко Ю. Ф., Денисенко В. І.

Київський національній торговельно-економічний університет, Київ; d0212@ukr.net

The task of equilibrium in elastic medium containing an infinite set of rigid spherical particles led to infinite systems of algebraic equations when conversion formula of external solution of the Lame's equation was used for transition to a new coordinate system. It is shown how to simplify expressions for displacement of structures with orderly arrangement of hard particles using the infinite system of equations that were obtained in the satisfaction of boundary conditions.

С помощью формулы преобразования внешнего решения уравнения Ламе при переходе к новой системе координат задача равновесия упругой среды, содержащей бесконечное множество жестких сферических включений, сведена к бесконечным системам уравнений. В работе показано как можно упростить выражения для перемещений для структур с упорядоченным расположением жестких включений, используя бесконечные системы уравнений, полученные при удовлетворении граничных условий.

В роботах [1, 2] одержано векторну формулу перетворення зовнішнього розв'язку рівняння Ламе при переході до нової системи координат. Її використання в задачах рівноваги пружного середовища, яке містить нескінченну множину жорстких сферичних включень радіуса $r = r_0$, дозволяє привести задачу цього класу до нескінченних систем алгебраїчних рівнянь. Але при розрахунку переміщень і напруг в довільних точках пружного середовища ми зустрічаємося з певними складнощами через наявність подвійних нескінченних рядів, які одержуються із формули перерозкладу.

Нижче показано, як можна спростити вирази для переміщень, використовуючи нескінченні системи алгебраїчних рівнянь, одержаних при виконанні граничних умов.

Якщо перерозклад розв'язку шукають для системи з координатами (r_i, Q_i, φ_i) при переході до основного базису (r, Q, φ), то загальний розв'язок для зовнішності базової сфери $\vec{u} = \vec{e}_r u_r + \vec{e}_\vartheta u_\vartheta + \vec{e}_\varphi u_\varphi$. Тут

$$u_r(r,\vartheta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left[u_{l(r)}^{(m)} + \sum_{i=1}^{\infty} U_l^{(m)} \left(r; d_i^{(0)}, \vartheta_i^{(0)}, \varphi_i^{(0)} \right) \right] S_{l(\vartheta,\varphi)}^{m};$$

$$u_\vartheta = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left\{ \left[\nu_l^{(m)} + \sum_{i=1}^{\infty} V_l^{(m)} \right] + \frac{\partial S_l^{(m)}}{\partial \vartheta} + \left[w_l^{(m)} + \sum_{i=1}^{\infty} W_l^{(m)} \right] \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial S_l^{(m)}}{\partial \varphi} \right\};$$

$$u_\vartheta = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left\{ \left[\nu_l^{(m)} + \sum_{i=1}^{\infty} V_l^{(m)} \right] \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial S_l^{(m)}}{\partial \varphi} - \left[w_l^{(m)} + \sum_{i=1}^{\infty} W_l^{(m)} \right] \frac{\partial S_l^{(m)}}{\partial \vartheta} \right\}. \tag{1}$$

Функції, які входять в (1), визначні в роботі [1].

За умовами симетрії структури типу кубічної індекси $l_{(n)}$ та $m_{(k)}$ можуть приймати лише парні значення в радіальних функціях $u_l^{(n)}$, $U_l^{(n)}$, $v_l^{(n)}$, $V_l^{(n)}$ і непарні для функцій $w_l^{(n)}, W_l^{(n)}$ по індексу $l_{(n)}$. Перенісши це на сталі інтегрування та ввівши позначення $l = 2p$, $m = 2q$, $n = 2\nu$, $k = 2s$; $p, q, r, s = 0, 1, 2, \ldots$ та враховуючи рівність

$$S_l^{(n)}(Q,\varphi) = \vec{p}_l^{(n)}(\cos Q) \cdot e^{im\varphi},$$

легко одержуємо

$$u_r(r,\vartheta,\varphi) = \sum_{p=0}^{\infty} {\sum_{q=0}^{p}}' \Bigg\{ \left[u_{2p}^{(2q)} + u_{2p}^{(-2q)} \right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} \left[U_{2p}^{(2q)} + U_{2p}^{(-2q)} \right] \Bigg\} \cos 2q\varphi \bar{P}_{2p}^{(2q)};$$

$$u_\vartheta(r,\vartheta,\varphi) = \sum_{p=0}^{\infty} {\sum_{q=0}^{p}}' \Bigg\{ \left[\nu_{2p}^{(2q)} + \nu_{2p}^{(-2q)} \right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} \left[V_{2p}^{(2q)} + V_{2p}^{(-2q)} \right] \Bigg\} \cos 2q\varphi \frac{\partial \bar{P}_{2p}^{(-2q)}}{\partial \vartheta} -$$

$$-\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{p}{}'\Big\{\Big[w_{2p+1}^{(2q)}+w_{2p+1}^{(-2q)}\Big]+\sum_{i=1}^{\infty}\Big[W_{2p+1}^{(2q)}+W_{2p+1}^{(-2q)}\Big]\Big\}2q\frac{\sin 2q\varphi}{\sin\vartheta}\bar{P}_{2p+1}^{(2q)};$$

(2)

$$u_{\varphi}(r,\vartheta,\varphi)=-\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{p}{}'\Big\{\Big[\nu_{2p}^{(2q)}+\nu_{2p}^{(-2q)}\Big]+$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty}\Big[V_{2p}^{(2q)}+V_{2p}^{(-2q)}\Big]\Big\}2q\frac{\sin 2q\varphi}{\sin\vartheta}\bar{P}_{2p}^{(2q)}-$$

$$-\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{p}{}'\Big\{\Big[w_{2p+1}^{(2q)}+w_{2p+1}^{(-2q)}\Big]+\sum_{i=1}^{\infty}\Big[W_{2p+1}^{(2q)}+W_{2p+1}^{(-2q)}\Big]\Big\}\cos 2q\varphi\frac{\partial\bar{P}_{2p+1}^{(2q)}}{\partial\vartheta}.$$

Тут

$$u_{2p(r)}^{(2q)}+u_{2p(r)}^{(-2q)}=4p(2p+3-4\nu)\delta^{2p}\hat{\hat{C}}_{2p}^{(2q)}-2(2p+1)\delta^{2p+2}\hat{\hat{D}}_{2p}^{(2q)};$$

$$\nu_{2p(r)}^{(2q)}+\nu_{2p(r)}^{(-2q)}=-2(2p-4+4\nu)\delta^{2p}\hat{\hat{C}}_{2p}^{(2q)}+2\delta^{2p+2}\hat{\hat{D}}_{2p}^{(2q)};$$

$$w_{2p+1(r)}^{(2q)}+w_{2p+1(r)}^{(-2q)}=2\delta^{2p+2}\hat{\hat{N}}_{2p+1}^{(2q)};$$

$$U_{2p(r)}^{(2q)}+U_{2p(r)}^{(-2q)}=\delta^{-2p+2}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\Big\{2p\hat{d}_{2p,2r}^{2q,2s}\ \hat{\hat{D}}_{2r}^{(2s)}+$$

$$+\hat{\hat{C}}_{2r}^{(2s)}\big[2(2(1-\nu)(4r-1)-2p(2r+4\nu-4))\hat{b}_{2q,2s}^{2p,2r}-2p(2r+4\nu-4)\hat{c}_{2p,2s}^{2q,2s}\big]+$$

$$+\hat{t}_{2p,2r}^{2q,2s}\ \hat{\hat{N}}_{2r+1}^{(2s)}\Big\}+\delta^{2p-1}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}{}'\frac{2r(4r-1)(2p-2+4\nu)}{4p+3}\hat{d}_{2p,2r}^{2q,2s}\ \hat{\hat{C}}_{2r}^{(2s)};$$

$$V_{2p(r)}^{(2q)}+V_{2p}^{(-2q)}=\frac{\delta^{-2p+1}}{2p}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}{}'\Big\{2p\hat{d}_{2p,2r}^{2q,2s}\ \hat{\hat{D}}_{2r}^{(2s)}+\hat{\hat{C}}_{2r}^{(2s)}\big[2(2(1-\nu)(4r-1)-$$

$$-2p(2r+4\nu-4))\hat{b}_{2p,2r}^{2q,2s}-2p(2r+4\nu-4)\hat{c}_{2p,2s}^{2q,2s}\big]+\hat{t}_{2p,2r+1}^{2q,2s}\ \hat{\hat{N}}_{2r+1}^{(2s)}\Big\}+$$

$$+\frac{\delta^{2p-1}}{2p+1}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}{}'\frac{2r(4r-1)(2p+5-4\nu)}{4p+3}\hat{d}_{2p,2r}^{2q,2s}\ \hat{\hat{C}}_{2r}^{(2s)};$$

$$W_{2p+1}^{(2q)}+W_{2p+1}^{(-2q)}=-\frac{\delta^{-2p+2}}{(2p+1)(2p+2)}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\big[(2p+1)(2r+1)\hat{\hat{d}}_{2p+1,2r+1}^{(2q,2s)}\hat{\hat{N}}_{2r+1}^{(2s)}+$$

$$+4(1-\nu)(4r-1)\hat{a}^{(2q,2s)}_{2p+1}\hat{\tilde{C}}^{(2s)}_{2r}\big],$$

причому, $\delta = r_0/r < 1$, а $\tilde{D}_{2r},\ \tilde{C}_{2r},\ \tilde{N}_{2r+1}$ — сталі інтегрування. Коефіцієнти при сталих інтегрування, які залежать від розташування сфер у просторі, визначені в [1].

Введемо позначення:

$$A^{(2q)}_{2p} = \sum_{r=0}^{\infty}{\sum_{s=0}^{r}}'\Big\{2p\hat{d}^{(2q,2s)}_{2p,2r}\hat{\tilde{D}}^{(2s)}_{2r} + \hat{\tilde{C}}^{(2s)}_{2r}\big[2(2(1-\nu)(4r-1)-$$

$$-2p(2r+4\nu-4))\hat{\tilde{b}}^{(2q,2s)}_{2p,2r} - 2p(2r+4\nu-4)\hat{c}^{(2q,2s)}_{2p,2s}\big] + \hat{t}^{(2q,2s)}_{2p,2r}\hat{\tilde{N}}^{(2s)}_{2r+1}\Big\};\tag{3}$$

$$B^{(2q)}_{2p} = \sum_{r=0}^{\infty}{\sum_{s=0}^{r}}' 2r(4r-1)\hat{d}^{2q,2s}_{2p,2r}\hat{\tilde{C}}^{(2s)}_{2r};$$

$$K^{(2q)}_{2p+1} = \sum_{r=0}^{\infty}{\sum_{s=0}^{r}}'\big[(2p+1)(2r+1)\hat{d}^{2q,2s}_{2p+1,2r+1}\hat{\tilde{N}}^{(2s)}_{2r+1}+$$

$$+4(1-\nu)(4r-1)\hat{a}^{2q,2s}_{2p+1,2r}\hat{\tilde{C}}^{(2s)}_{2r}\big].$$

Тоді радіальні функції перепишуться так:

$$\big(u^{(2q)}_{2p} + u^{(-2q)}_{2p}\big) + \big(U^{(2q)}_{2p} + U^{(-2q)}_{2p}\big) = 4p(2p+3-4\nu)\delta^{(2p)}\hat{\tilde{C}}^{(2q)}_{2p} -$$

$$-(2p+1)\delta^{(2p+2)}\hat{\tilde{D}}^{(2q)}_{2p} + \delta^{(-2p+1)}\frac{2p-2+4\nu}{4p+3}B^{(2s)}_{2p};$$

$$\big(\nu^{(2q)}_{2p} + \nu^{(-2q)}_{2p}\big) + \big(V^{(2q)}_{2p} + V^{(-2q)}_{2p}\big) = -2(2p-4+4\nu)\delta^{(2p)}\hat{\tilde{C}}^{(2q)}_{2p} +$$

$$+ 2\delta^{(2p+2)}\hat{\tilde{D}}^{(2q)}_{2p} + \frac{\delta^{(-2p+1)}}{2p}A^{(2q)}_{2p} - \frac{\delta^{(-2p-1)}}{(2p+1)}\cdot\frac{2p+5-4\nu}{(4p+3)}A^{(2q)}_{2p};\tag{4}$$

$$\big(w^{(2q)}_{2p+1} + w^{(-2q)}_{2p+1}\big) + \big(W^{(2q)}_{2p+1} + W^{(-2q)}_{2p+1}\big) =$$

$$= 2\delta^{2p+2}\hat{\tilde{N}}^{(2q)}_{2p+1} - \frac{\delta^{-2q-1}}{(2p+1)(2p+2)}K^{(2q)}_{2p+1}.$$

Розглянемо, наприклад, випадок всестороннього розтягу для жорстких сферичних включень радіуса $r = r_0$. Граничні умови на кожному включенні задаються рівностями:

$$u_r\big|_{r=r_0} = -\alpha r_0;\ u_\vartheta\big|_{r=r_0} = 0;\ u_\varphi\big|_{r=r_0} = 0;\ \alpha = \frac{m-2}{m+1}\frac{p}{2C}.\tag{5}$$

Поклавши в (4) $r = r_0$, використовуючи (5) і співвідношення (3), одержуємо нескінченну систему алгебраїчних рівнянь для визначення сталих інтегрування $\hat{\hat{D}}_{2p}^{(2q)}$, $\hat{\hat{C}}_{2p}^{(2q)}$, $\hat{\hat{N}}_{2p+1}^{(2q)}$

$$-2\hat{\hat{D}}_0^{(0)} + A_0^{(0)} + \frac{4\nu-2}{3}B_0^{(0)} = \sqrt{4\pi}\alpha r_0;$$

$$4p(2p+3-4\nu)\hat{\hat{C}}_{2p}^{(2q)} - 2(2p+1)\hat{\hat{D}}_{2p}^{(2q)} + A_{2p}^{(2q)} + \frac{2p-2+4\nu}{4p+3}B_{2p}^{(2q)} = 0;$$

$$-2(2p-4+4\nu)\hat{\hat{C}}_{2p}^{(2q)} + 2\hat{\hat{D}}_{2p}^{(2q)} + \frac{A_{2p}^{(2q)}}{2p} + \frac{2p+5-4\nu}{(4p+3)(2p+1)}B_{2p}^{(2q)} = 0;$$

$$2\hat{\hat{D}}_{2p+1}^{(2q)} - \frac{1}{(2p+1)(2p+2)}K_{2p+1}^{(2q)} = 0.$$

Вважаючи, що це система розв'язана, виразимо $\hat{\hat{A}}_{2p}^{(2q)}$, $\hat{\hat{B}}_{2p}^{(2q)}$, $\hat{\hat{K}}_{2p+1}^{(2q)}$ через сталі інтегрування. Підставивши їх в формули для переміщень, отримаємо:

$$u_r(r,\vartheta,\varphi) = \sqrt{4\pi}\alpha r + 2(\delta^{-1}-\delta^2)D_0^{(0)} + \sum_{p=1}^{\infty}{}'\sum_{q=0}^{p}{}'\Big\{-2(2p+1)\delta^{2p+2}+$$

$$+\frac{2p(2p+1)(7-8\nu)}{4p^2-4p-1+2\nu}\cdot\delta^{2p+1} + \frac{(2p+1)(4p+1)(2p-2+4\nu)}{4p^2+4p-1+2\nu}\Bigg]\hat{\hat{D}}_{2p}^{(2q)}+$$

$$+\Bigg[4p(2p+3-4\nu)\delta^{2p} - \frac{2p[2p(2p+1)(13-16\nu)-8(2\nu^2-3\nu+1)]}{4p^2+4p-1+2\nu}\times$$

$$\times\ \delta^{-2p+1} - \frac{2p(2p+1)(4p-1)(2p-2+4\nu)}{4p^2+4p-1+2\nu}\Bigg]\hat{\hat{C}}_{2p}^{(2q)}\Bigg\}\cos 2q\varphi\bar{P}_{2p(\cos\vartheta)}^{2q};$$

$$u_\vartheta(r,\vartheta,\varphi) = \sum_{p=0}^{\infty}{}'\sum_{q=0}^{p}{}'\Bigg\{\Bigg\{\Bigg[2\cdot\delta^{2p+2} + \delta^{-2p+1}\cdot\frac{(2p+1)(7-8\nu)}{4p^2+4p-1+2\nu}-$$

$$-\delta^{-2p-1}\cdot\frac{(4p+1)(2p+5-4\nu)}{4p^2+4p-1+2\nu}\Bigg]\hat{\hat{D}}_{2p}^{(2q)} + \big[-\delta^{2p}\cdot 2(2p-4+4\nu)-$$

$$-\delta^{-2p+1}\cdot\frac{2p(2p+1)(13-16\nu)-8(2\nu^2-3\nu+1)}{4p^2+4p-1+2\nu}+$$

$$+\delta^{-2p-1}\cdot\frac{2p(4p-1)(2p+5-4\nu)}{4p^2+4p-1+2\nu}\Bigg]\hat{\hat{C}}_{2p}^{(2q)}\Bigg\}\times$$

$$\times \cos 2q\varphi \frac{d\bar{P_{2p}}}{(2q)(\cos\vartheta)} d\vartheta - 2(\delta^{2p+2} - \delta^{-2-1}) \hat{\hat{N}}_{2p+1}^{(2q)} \cdot 2q \frac{\sin 2q\varphi}{\sin\vartheta} \bar{P}_{2p}(2q) \Bigg\} ;$$

$$u_\varphi(r,\vartheta,\varphi) = -\sum_{p=0}^{\infty}{}' \sum_{q=0}^{p}{}' \Bigg\{ \Bigg\{ \Bigg[2 \cdot \delta^{(2p+2)} + \delta^{-2p+1} \cdot \frac{(2p+1)(7-8\nu)}{4p^2+4p-1+2\nu} -$$

$$-\delta^{-2p-1} \cdot \frac{(4p+1)(2p+5-4\nu)}{4p^2+4p-1+2\nu} \Bigg] \hat{\hat{D}}_{2p}^{(2q)} - \Big[\delta^{2p} \cdot 2(2p-4+4\nu) +$$

$$+\delta^{-2p+1} \cdot \frac{2p(2p+1)(13-16\nu) - 8(2\nu^2-3\nu+1)}{4p^2+4p-1+2\nu} -$$

$$-\delta^{-2p-1} \cdot \frac{2p(4p-1)(2p+5-4\nu)}{4p^2+4p-1+2\nu} \Bigg] \hat{\hat{C}}_{2p}^{(2q)} \Bigg\} \times$$

$$\times \cos 2q \frac{\sin 2q\varphi}{\sin\vartheta} \hat{\hat{P}}_{2p}^{(2q)}(\cos\varphi) + 2(\delta^{2p+2} - \delta^{-2-1}) \hat{\hat{N}}_{2p+1}^{(2q)} \cos 2q\varphi \frac{d\bar{P}_{2p+1}^{(2q)}}{d\vartheta} \Bigg\} .$$

Розрахунок напруг проводиться з використанням наведених вище виразів і відношень закона Гука в сферичних координатах.

[1] Перетворення векторного розв'язку зовнішніх задач теорії пружності для сфери при зміні початку координат / Діденко Ю.Ф. // Допов. АН УССР. Сер. "А". — 1984. — 8. — С. 35–38.

[2] Об одной задаче пространственной теории потенциала / Диденко Ю.Ф., Борисенко В.А., Комаров Г.Н., Денисенко В.И. // Вестник Херсонского национального технического университета. — 2007. — 2(28). — С. 103–108.