Збірник праць Інституту математики НАН України 2018, т. 15, № 1, 162–179

УДК 517.983.27

Применение коммутаторного исчисления к проблеме стабилизации псевдолинейных периодических аффинных систем

***В.И. Слынько*[1], *С.В. Кравчук*[2]**

[1] *Институт механики им. С. П. Тимошенка НАН Украины, Киев; vitstab@ukr.net*
[2] *Черкасский национальный университет им. Б. Хмельницкого, Черкассы; qkp@ukr.net*

New conditions for the stabilization of affine periodic systems are established. Applying the commutation calculus and the direct Lyapunov method, we obtain control conditions that ensure the stability of affine periodic system, and we also synthesize the control for stabilizing the lower position of equilibrium of a pendulum of variable length.

Установлены новые условия стабилизации аффинных периодических систем. При применении коммутационных исчислений и прямого метода Ляпунова получены условия на управление, обеспечивающее устойчивость афинной периодической системы, также синтезировано управление для стабилизации нижнего положения равновесия математического маятника переменной длины.

Введение

Аффинные системы имеют многочисленные приложения в теории управления движением. При этом важное значение имеет задача о построении управлений, стабилизирующих стационарный режим движения аффинной системы. Поскольку при моделировании механических систем очень часто приходится учитывать различные внешние возмущения или действие реономных связей, математической моделью таких систем являются неавтономные аффинные системы. В случае, когда аффинную систему можно представить в псевдолинейном виде, синтез стабилизирующих управлений можно провести на основе идей прямого метода Ляпунова. Отметим, однако, что при исследовании неавтономных систем возникают значительные трудности, связанные с построением вспомогательной функции Ляпунова. Попытки использования теорем об устойчивости по линейному приближению или более грубых методов, связанных с теорией интегральных неравенств, также фактически не являются конструктивными, поскольку задача о нахождении фундаментальной матрицы системы линейного приближения, в общем случае, не является разрешимой в явном виде. Указанные трудности при исследовании общих неавтономных систем также характерны для систем частного вида — периодических аффинных систем.

В данной работе рассматривается проблема синтеза стационарных управлений по принципу обратной связи, которые глобально стабилизируют стационарный режим движения механической системы с периодическими возмущениями. Для доказательства глобальной асимптотической устойчивости замкнутой управляемой системы предложен новый метод, который основан на выделении в правой части системы нестационарного линейного приближения с дальнейшим использованием метода возмущений. При этом для оценки эволюционного оператора линейной периодической части используется новый метод, основанный на идеях и методах коммутаторного исчисления.

Коммутаторное исчисление возникло в классических работах по теории групп Ли и тесно связано с обоснованием известной формулы Хаусдорфа–Бейкера–Кемпбелла. Основные методы коммутаторного исчисления и его приложения изложены в монографии [2]. Приложение коммутаторного исчисления к проблеме представления фундаментальной матрицы линейной неавтономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений рассмотрено в работе В. Магнуса [7]. В настоящей работе коммутаторное исчисление применяется для получения оценок эволюционного оператора линейного дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве. Предложенный подход основан на следующем наблюдении. Хорошо известно, что в случае, когда оператор-функция в правой части линейного дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве удовлетворяет условию И.А. Лаппо–Данилевского, оператор эволюции этого уравнения можно найти в явном виде. Для периодических линейных дифференциальных уравнений в этом случае получаются простые условия устойчивости. А именно, динамические свойства (устойчивость, асимптотическая устойчивость, неустойчивость) этого дифференциального уравнения полностью определяются соответствующими свойствами усреднённого дифференциального уравнения. В общем случае, когда условие Лаппо–Данилевского не выполняется, конечно, динамические свойства исходного линейного периодического дифференциального уравнения и усредненного линейного дифференциального уравнения существенно отличаются. Далее, в работе построено линейное импульсное дифференциальное уравнение с постоянными операторными коэффициентами, динамические свойства которого эквивалентны динамическим свойствам исходного дифференциального уравнения. При этом непрерывная компонента этого уравнения совпадает с усреднённым уравнением, а дискретная компонента в некотором смысле компенсирует нарушение условий И.А. Лаппо–Данилевского.

Работа состоит из 5 разделов и организована следующим образом. В первом разделе приведены необходимые сведения из теории свободных ассоциативных алгебр и свободных алгебр Ли. Кратко изложены результаты В. Магнуса, а также получено новое представление оператора монодромии линейного дифференциального уравнения с периодическими операторными коэффициентами и построено линейное импульсное дифференциальное уравнение с постоянными операторными коэффициентами, динамические свойства которого эквивалентны свойствам исходного дифференциального уравнения. Во втором разделе приводятся основные определения и приведена постановка задачи о глобальной стабилизации аффинных периодических систем. В третьем разделе синтезировано управление, глобально стабилизирующее нулевое решение аффинной периодической системы, и доказаны условия глобальной стабилизации. В четвертом разделе синтезировано управление, стабилизирующее нижнее положение равновесия математического маятника переменной длины. В пятом разделе приведены выводы работы.

Отметим также, что методы, развитые в настоящей работе, обладают значительной общностью, поэтому изложение результатов проведено для линейных уравнений в гильбертовом пространстве. При этом переход к случаю конечно-мерного гильбертова пространства не представляет трудностей. Такой подход соответствует современному состоянию теории устойчивости движения, в которой основные задачи для дифференциальных уравнений в конечно-мерных пространствах решены.

1 Вспомогательные результаты

Приведём некоторые основные алгебраические понятия, которые будут использованы далее, следуя работам [2, 7].

Опишем конструкцию свободной ассоциативной алгебры $\mathfrak{R}$ над полем действительных чисел $\mathbb{R}$ с двумя генераторами x, y. Словом над алфавитом (x, y) называется конечная последовательность символов из алфавита, при этом для последовательности $\underbrace{z \dots z}_{n}$, где z — генератор, принимается сокращённая запись z^n, $n \in \mathbb{N}$, $z^0 = 1$. Базис алгебры $\mathfrak{R}_0$ состоит из всех слов над алфавитом (x, y). Пустое слово отождествляется с элементом $1 \in \mathbb{R}$, поэтому $\mathbb{R} \subset \mathfrak{R}_0$ и поле $\mathbb{R}$ является центром алгебры $\mathfrak{R}_0$. Следовательно, $\mathfrak{R}_0$ состоит из всевозможных линейных комбинаций слов с коэффициентами из $\mathbb{R}$. Свободная ассоциативная алгебра $\mathfrak{R}$ определяется как пополнение алгебры $\mathfrak{R}_0$ в некоторой специальной топологии и состоит из всех формальных бесконечных рядов с коэффициентами из поля $\mathbb{R}$. Коммутатор двух элементов $a \in \mathfrak{R}$, $b \in \mathfrak{R}$ определяется формулой

$$[a, b] = ab - ba$$

и вводит в $\mathfrak{R}$ структуру алгебры Ли. Оператор коммутирования ad_a, $a \in \mathfrak{R}$ определяется как линейное отображение $\mathfrak{R} \mapsto \mathfrak{R}$

$$\mathrm{ad}_a(y) = [a, y], \quad y \in \mathfrak{R}.$$

Пусть $f(x, y) \in \mathfrak{R}$, $z \in \mathfrak{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, тогда поляризационное тождество

$$f(x + \lambda z, y) = f(x, y) + \lambda f_1(x, y, z) + \lambda^2 f_2(x, y, z) + \dots$$

определяет производную Хаусдорфа $z\frac{\partial f}{\partial x} \stackrel{df}{=} f_1(x, y, z)$.

Определим рекурсивно следующие лиевы элементы алгебры $\mathfrak{R}$ (определение и более подробные сведения о лиевых элементах можно найти в [7]):

$$\{y, x^0\} = y, \quad \{y, x^{l+1}\} = [\{y, x^l\}, x], \quad l \in \mathbb{N}.$$

Легко заметить, что

$$\mathrm{ad}_x^l(y) = (-1)^l \{y, x^l\}.$$

Пусть $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k x^k$ — ряд от генератора x, тогда по определению полагают, что

$$\{y, p(x)\} \stackrel{df}{=} \sum_{k=0}^{\infty} p_k \{y, x^k\}.$$

Отметим также, что если $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k x^k$, $q(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} q_k x^k$, то

$$\{y, p(x)q(x)\} = \{\{y, p(x)\}, q(x)\}. \tag{1}$$

Аналогично, для произвольной конечной последовательности $x_1, \ldots,$ x_n элементов из $\mathfrak{R}$ определим рекурсивно элемент $\{x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$

$$\{x_1, ..., x_{n-1}, x_n\} = [\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}, x_n].$$

Элемент e^x определяется посредством формулы

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

При этом

$$e^{-x} y e^x = \{y, e^x\} \tag{2}$$

и справедливы тождества Ф. Хаусдорфа

$$\begin{gathered} e^{-x}\Big(y\frac{\partial}{\partial x}\Big)e^x = \Big\{y, \frac{e^x - 1}{x}\Big\}, \\ \Big(\Big(y\frac{\partial}{\partial x}\Big)e^x\Big)e^{-x} = \Big\{y, \frac{1 - e^{-x}}{x}\Big\}. \end{gathered} \tag{3}$$

Пусть $\mathcal{X}$ — гильбертово пространство со скалярным произведением $(.,.)$ и нормой $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$, $L(\mathcal{X})$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в пространстве X.

Отметим, что тождества (1)—(3) имеют формальный характер, однако, для элементов банаховой алгебры $L(\mathcal{X})$, (1) выполняется в общей части области сходимости рядов $p(x)$ и $q(x)$, а (2) и (3) при всех $x \in L(\mathcal{X})$, $y \in L(\mathcal{X})$.

Рассмотрим операторное дифференциальное уравнение

$$\frac{dU(t,s)}{dt} = A(t)U(t,s), \quad U(s,s) = I, \quad t \geq s, \tag{4}$$

где $U \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}; L(\mathcal{X}))$, $A \in C(\mathbb{R}; L(\mathcal{X}))$, I — тождественный оператор.

В работе В. Магнуса [2] установлены условия, при которых оператор $U(t,s)$ можно представить в виде

$$U(t,s) = \exp \hat{\Omega}(t,s), \quad t \geq s.$$

При этом функция $\hat{\Omega}(t,s)$ является решением задачи Коши для нелинейного дифференциального уравнения (уравнения В. Магнуса)

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\Omega}(t,s)}{dt} &= \Big\{A(t), \frac{\hat{\Omega}(t,s)}{1-e^{-\hat{\Omega}(t,s)}}\Big\} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \Big\{A(t), \hat{\Omega}^n(t,s)\Big\}, \quad \hat{\Omega}(s,s) = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $\beta_n = 0$ при $n = 3, 5, \ldots$, $\beta_{2n} = \frac{(-1)^{n-1}B_{2n}}{(2n)!}$, при $n \in \mathbb{N}$ и $\beta_0 = 1$, B_{2n} — числа Бернулли [3].

Интегрирование этой задачи Коши приводит к следующему формальному представлению

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}(t,s) = \int_s^t A(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2}\int_s^t \Big[A(\tau), \int_s^\tau A(\sigma)\,d\sigma\Big]\,d\tau + \\ + \frac{1}{4}\int_s^t \Big[A(\tau), \int_s^\tau \Big[A(\sigma), \int_s^\sigma A(\rho)\,d\rho\Big]\,d\sigma\Big] d\tau + \\ + \frac{1}{12}\int_s^t \Big[\Big[A(\tau), \int_s^\tau A(\sigma)d\sigma\Big], \int_s^\tau A(\sigma)d\sigma\Big] d\tau + \ldots \end{aligned}$$

Эта формула является континуальным обобщением классической формулы Хаусдорфа–Бейкера–Кемпбелла. Хорошо известно, что ряд в правой части этой формулы сходится не всегда. Поэтому в настоящей работе будет использовано следующее представление решения задачи Коши (4)

$$U(t,s) = (I + F(t,s))e^{\int_s^t A(\tau)\,d\tau}.$$

Выведем дифференциальное операторное уравнение для функции $F(t,s)$, применяя цепное правило для производной сложной функции [2]

$$\frac{dF(t,s)}{dt} = \frac{dU(t,s)}{dt}e^{-\hat{A}(t,s)} - \\ -U(t,s)\Big(A(t)\frac{\partial}{\partial X}\Big)e^{X}\Big|_{X=-\hat{A}(t,s)},$$

где $\hat{A}(t,s) = \int\limits_s^t A(\tau)\,d\tau$.

Следовательно, с учётом тождества Хаусдорфа,

$$\frac{dF(t,s)}{dt} = A(t)U(t,s)e^{-\hat{A}(t,s)} + U(t,s)e^{-\int\limits_s^t A(\tau)\,d\tau}\cdot \\ \cdot\Big\{A(t), \frac{e^{-\hat{A}(t,s)}-1}{\hat{A}(t,s)}\Big\} = A(t)(F(t,s)+I)- \\ -(F(t,s)+I)(A(t)-\Psi(t,s)) = [A(t),F(t,s)]+ \\ F(t,s)\Psi(t,s)+\Psi(t,s),$$

где

$$\Psi(t,s) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}\{A(t),\hat{A}^k(t,s)\}.$$

Таким образом, функция $F(t,s)$ является решением задачи Коши

$$\frac{dF(t,s)}{dt} = [A(t),F(t,s)] + F(t,s)\Psi(t,s) + \Psi(t,s), \\ F(s,s) = 0. \tag{6}$$

2 Постановка задачи

Рассмотрим аффинное псевдолинейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t,x(t))x(t) + B(t,x(t))u(x), \tag{7}$$

где $x \in \mathcal{X}$, $A \in C^{0,1}(\mathbb{R}\times X; L(\mathcal{X}))$, $B \in C^{0,1}(\mathbb{R}\times\mathcal{X}; L(\mathcal{U},\mathcal{X}))$ и существует положительное число θ, когда $A(t+\theta,x) = A(t,x)$, $B(t+\theta,x) = B(t,x)$ при всех $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathcal{X}$, $u = u(x)$, $u\in\mathcal{U}$ — управление по обратной связи, $\mathcal{U}$ — пространство Банаха.

Обозначим $x(t, x_0)$ — решение задачи Коши (7) с начальным условием $x(0, x_0) = x_0$.

Целью настоящей работы является синтез управления $u = u(x)$, обеспечивающего глобальную асимптотическую устойчивость решения $x = 0$ дифференциального уравнения (7). Это управление будем искать в виде обратной связи $u(x) = K(x)x$, где $K \in C(\mathcal{X}; L(\mathcal{X}; \mathcal{U}))$, $L(\mathcal{X}; \mathcal{U})$ — банахово пространство линейных операторов, действующих из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{U}$. При этом используем результат теоремы 1.1.

3 Основной результат

Для фиксированного $x_0 \in \mathcal{X}$ определим линейные операторы

$$A_0(x_0) = \frac{1}{\theta} \int\limits_0^\theta A(\tau, x_0)\, d\tau,$$

$$B_0(x_0) = \frac{1}{\theta} \int\limits_0^\theta B(\tau, x_0)\, d\tau.$$

Следующие предположения позволяют построить управление, которое стабилизирует решение $x = 0$ дифференциального уравнения (7).

Предположение 3.1. *Пусть для аффинного дифференциального уравнения выполняются следующие предположения:*

1) существует функция $K \in C(\mathcal{X}; L(\mathcal{X}; \mathcal{U}))$, в которой

$$A_0(x) + B_0(x)K(x) = \widetilde{A},$$

где $\widetilde{A} \in L(\mathcal{X})$ и $\max\limits_{\lambda \in \sigma(\widetilde{A})} \mathrm{Re}\, \lambda < 0$;

2) для линейных операторов

$$C(t) = \widetilde{A} + A(t, 0) - A_0(0) + (B(t, 0) - B_0(0))K(0),$$

$$C(t, x) = A(t, x) + B(t, x)K(x), \quad \hat{C}(t) = \int\limits_0^t C(\tau)\, d\tau$$

существуют положительные постоянные β, ϱ, ν, η и μ, например,

$$\sup_{(t,x)\in[0,\theta]\times X}\|C(t,x)-C(t)\|\le\beta,$$

$$\sup_{t\in[0,\theta]}\|C(t)-\widetilde{A}\|\le\varrho,\quad \sup_{t\in[0,\theta]}\|\operatorname{ad}_{\hat{C}(t)}\|\le\mu\theta,$$

$$\frac{1}{2}\sup_{t\in[0,\theta]}\|\operatorname{ad}_{C(t)+C^*(t)}\|\le\nu,\ \sup_{t\in[0,\theta]}\|[C(t),\hat{C}(t)]\|\le\eta\theta.$$

Отметим, что вследствие теоремы Ляпунова–Крейна для любого линейного самосопряженного положительно-определенного оператора Q существует линейный самосопряженный положительно-определенный оператор P, когда

$$\widetilde{A}^*P+P\widetilde{A}=-Q.$$

Определим линейные операторы

$$E=\frac{1}{2}\int_0^\theta[C(t),\hat{C}(t)]\,dt,$$

$$R=-(E^*P+PE+E^*PE).$$

Напомним, что если линейный оператор P является самосопряженным, то его спектр является действительным и существуют числа $\lambda_{\min}(P)$ и $\lambda_{\max}(P)$

$$\lambda_{\min}(P)=\inf_{\|x\|=1}(x,Px),\quad \lambda_{\max}(P)=\sup_{\|x\|=1}(x,Px).$$

Теорема 3.1. *Предположим, что для аффинного дифференциального уравнения* (7) *выполняются условия предположения 3.1 и существует положительные постоянные χ_0, χ_1, которые запишем как*

$$\|P-R\|\le\chi_0,\quad \|P(I+E)\|\le\chi_1$$

и выполняется неравенство

$$q:=\frac{\sqrt{\lambda_{\max}(P)(\chi_0+2\chi_1\vartheta+\|P\|\vartheta^2)}}{\lambda_{\min}(P)}\cdot$$

$$\cdot\exp\Big(-\frac{\lambda_{\min}(Q)\theta}{2\lambda_{\max}(P)}+\frac{\beta\lambda_{\max}(P)(e^{\delta\theta}-1)}{\lambda_{\min}(P)\delta}\Big)<1,$$

где

$$\vartheta = \Big(\frac{\nu\eta\theta^3}{4} + \frac{\eta}{\mu^2}(\frac{\eta\theta^2}{4} + 1)(e^{\mu\theta} - 1 - \mu\theta) - \frac{\eta\theta^2}{2}\Big)\cdot$$

$$\cdot \exp\Big(\nu\theta + \frac{\eta}{\mu^2}(e^{\mu\theta} - 1 - \mu\theta)\Big).$$

$$\delta = \frac{\lambda_{\max}(Q) + 4\|P\|\varrho}{2\lambda_{\min}(P)} - \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)}.$$

Тогда управление $u(x) = K(x)x$ глобально стабилизирует решение $x = 0$ аффинного дифференциального уравнения (7).

Доказательство. Обозначим $\Delta C(t, x) = C(t, x) - C(t)$ и представим уравнение (7) в виде

$$\frac{dx}{dt} = C(t)x(t) + \Delta C(t, x)x(t).$$

Применяя формулу Коши, получим интегральное представление для решения $x(t)$ задачи Коши (7)

$$x(t) = \Phi(t, 0)x_0 + \int\limits_0^t \Phi(t, s)\Delta C(s, x(s))x(s)\, ds, \qquad (8)$$

где $\Phi(t, s)$ обозначает эволюционный оператор дифференциального уравнения

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = C(t)\xi(t). \qquad (9)$$

Тогда

$$\Phi(0, t)x(t) = x_0 +$$

$$+ \int\limits_0^t \Phi(0, t)\Phi(t, s)\Delta C(s, x(s))x(s)\, ds = x_0 +$$

$$+ \int\limits_0^t \Phi(0, s)\Delta C(s, x(s))\Phi(s, 0)\Phi(0, s)x(s)\, ds,$$

Переходя к оценке по норме, получим

$$\|\Phi(0, t)x(t)\| \le \|x_0\| + \int\limits_0^t \|\Phi(0, s)\cdot$$

$$\cdot\Delta C(s, x(s))\Phi(s, 0)\|\|\Phi(0, s)x(s)\|\, ds, \quad t \ge 0.$$

Применяя интегральное неравенство Гроноулла–Беллмана, получим

$$\|\Phi(0,t)x(t)\| \le \|x_0\| \exp\Big(\int\limits_0^t \|\Phi(0,s)\Delta C(s,x(s))\cdot \\ \cdot\Phi(s,0)\|\, ds\Big), \quad t \ge 0. \tag{10}$$

Полагая в (8) $t=\theta$ и переходя к оценке нормы, получим

$$\|x(\theta)\| \le \|U\|\Big(\|x_0\| + \int\limits_0^t \|\Phi(0,s)\Delta C(s,x(s))\Phi(s,0)\|\cdot \\ \cdot\|\Phi(0,s)x(s)\|\, ds\Big),$$

где $U=\Phi(\theta,0)$ — оператор монодромии. Учитывая неравенство (10), получим неравенство

$$\|x(\theta)\| \le \|U\|\Big(1 + \int\limits_0^\theta \|\Phi(0,s)\Delta C(s,x(s))\Phi(s,0)\|\cdot \\ \cdot \exp\Big(\int\limits_0^s \|\Phi(0,\sigma)\Delta C(\sigma,x(\sigma))\Phi(\sigma,0)\|\, d\sigma\Big)\, ds\Big)\|x_0\| = \\ = \|U\| \exp\Big(\int\limits_0^\theta \|\Phi(0,\sigma)\Delta C(\sigma,x(\sigma))\Phi(\sigma,0)\|\, d\sigma\Big)\|x_0\|.$$

Рассмотрим вопрос об оценке норм операторов $\Phi(t,0)$ и $\Phi(0,t)$ при $t\in[0,\theta]$. Введем функцию Ляпунова $v(\xi)=(\xi,P\xi)$ и применим её для оценки решений дифференциального уравнения (9). Тогда, применяя неравенство Коши–Буняковского, получим

$$\frac{dv(\xi(t))}{dt}\Big|_{(9)} \le -(\xi,Q\xi) + 2\|P\|\varrho\|\xi\|^2 \le \\ \le \Big(-\frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} + \frac{2\|P\|\varrho}{\lambda_{\min}(P)}\Big)v(\xi(t)).$$

Следовательно,

$$\|\Phi(t,0)\| \le \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}\times$$
$$\times \exp\Big(\big(-\frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)} + \frac{\|P\|\varrho}{\lambda_{\min}(P)}\big)t\Big).$$

Аналогично,

$$\frac{dv(\xi(t))}{dt}\Big|_{(9)} \ge -(\xi, Q\xi) - 2\|P\|\varrho\|\xi\|^2 \le$$
$$\le -\frac{\lambda_{\max}(Q) + 2\|P\|\varrho}{\lambda_{\min}(P)} v(\xi(t)).$$

Итак,

$$\|\Phi(0,t)\| \le \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \exp\Big(\frac{\lambda_{\max}(Q) + 2\|P\|\varrho}{2\lambda_{\min}(P)} t\Big).$$

Отсюда следует оценка

$$\|\Phi(0,t)\Delta C(t,x)\Phi(t,0)\| \le \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)} \beta \exp(\delta t).$$

Оценим норму оператора монодромии U. Для этого рассмотрим линейное дифференциальное уравнение с импульсным воздействием, которое имеет тот же оператор монодромии U:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \widetilde{A}z(t), \quad t \ne k\theta, \\ \Delta z(t) &= Dz(t), \quad t = k\theta, \end{aligned} \tag{11}$$

где $z \in \mathcal{X}$, $D = F(\theta, 0)$, $F(t,s)$ — решение операторной задачи Коши (6), в которой сказано $A(t) := C(t)$, $\hat{A}(t,0) := \hat{C}(t)$.

Введем новую переменную

$$F_1(t,0) = F(t,0) - \frac{1}{2}\int\limits_0^t [C(\tau), \hat{C}(\tau)]\, d\tau.$$

Тогда операторная задача Коши (6) принимает вид

$$\frac{dF_1(t,0)}{dt} = \Big[C(t), F_1(t,0) + \frac{1}{2}\int\limits_0^t [C(\tau), \hat{C}(\tau)]\,d\tau\Big] +$$
$$+\Big(F_1(t,0) + \frac{1}{2}\int\limits_0^t [C(\tau), \hat{C}(\tau)]\,d\tau\Big)\Psi(t,0) +$$
$$+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}\{C(t), \hat{C}^k(t)\}.$$

Пусть $U(t,s)$ — линейный оператор, являющийся решением операторной задачи Коши

$$\frac{dU(t,s)}{dt} = \frac{1}{2}[C(t) - C^*(t), U(t,s)], \quad U(s,s) = I.$$

Нетрудно показать, что $\|U(t,s)\| = \|U^{-1}(t,s)\| = 1$.

Тогда, применяя формулу Коши, получим интегральное представление для функции $F_1(t,0)$

$$F_1(t,0) = \int\limits_0^t U(t,s)\Big(\frac{1}{2}\Big[C(s) + C^*(s), F_1(s,0) +$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^s [C(\tau), \hat{C}(\tau)]\,d\tau\Big] +$$
$$+\Big(F_1(s,0) + \frac{1}{2}\int\limits_0^s [C(\tau), \hat{C}(\tau)]\,d\tau\Big)\Psi(s,0) +$$
$$+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}\{C(s), \hat{C}^k(s)\}\Big)U^{-1}(t,s)\,ds.$$

Переходя к оценке по норме, запишем

$$\|F_1(t,0)\| \le \int\limits_0^t \Big(\nu\|F_1(s,0)\| + \frac{s\nu\eta\theta}{2} +$$
$$+\Big(\|F_1(s,0)\| + \frac{s\eta\theta}{2}\Big)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\eta\theta(\theta\mu)^{k-1}}{(k+1)!} +$$
$$+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\eta\theta(\theta\mu)^{k-1}}{(k+1)!}\Big)\,ds.$$

Применяя к последней оценке лемму Гроноулла–Беллмана, получим неравенство

$$\|F_1(t,0)\| \le \Big(\frac{\nu\eta\theta^3}{4} + \frac{\eta\theta^2}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\eta\mu^{k-1}\theta^k}{(k+1)!} +$$
$$+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\eta\mu^{k-1}\theta^{k+1}}{(k+1)!}\Big) \times \exp\Big(\nu t + t\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\eta\mu^{k-1}\theta^k}{(k+1)!}\Big).$$

Полагая, что $t=\theta$, получим оценку

$$\|D-E\| \le \Big(\frac{\nu\eta\theta^3}{4} + \frac{\eta\theta^3}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\eta\mu^{k-1}\theta^k}{(k+1)!} +$$
$$+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\eta\mu^{k-1}\theta^{k+1}}{(k+1)!}\Big) \times \exp\Big(\nu\theta + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\eta\mu^{k-1}\theta^{k+1}}{(k+1)!}\Big) := \vartheta.$$

Для оценки нормы $\|U\|$ рассмотрим функцию Ляпунова $v(z) = (z, Pz)$, тогда наши оценки будут

$$\frac{dv(z(t))}{dt} = -(z, Qz) \le -\frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)}v(z(t)),\ t\in(0,\theta],$$

Аналогично, при $t=\theta$ получим

$$v(z(\theta+0)) = (z(\theta+0), Pz(\theta+0)) =$$
$$= ((I+D)z(\theta), P(I+D)z(\theta)) = (z(\theta), Pz(\theta)) +$$
$$+((E^*P + PE + E^*PE)z(\theta), z(\theta)) +$$
$$+2((I+E)Pz(\theta), (D-E)z(\theta)) +$$
$$+((D-E)Pz(\theta), (D-E)z(\theta)).$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского, получим оценку

$$v(z(\theta+0)) \le (\chi_0 + 2\chi_1\vartheta + \|P\|\vartheta^2)\|z(\theta)\|^2 \le$$
$$\le \frac{\chi_0 + 2\chi_1\vartheta + \|P\|\vartheta^2}{\lambda_{\min}(P)} v(z(\theta)).$$

Следовательно,

$$\|U\| \le \frac{\sqrt{\lambda_{\max}(P)(\chi_0 + 2\chi_1\vartheta + \|P\|\vartheta^2)}}{\lambda_{\min}(P)} \cdot \exp\Big(-\frac{\lambda_{\min}(Q)\theta}{2\lambda_{\max}(P)}\Big).$$

Итак, $\|x(\theta, x_0)\| \le q\|x_0\|$. Вследствие периодичности дифференциального уравнения (7)

$$\|x(n\theta, x_0)\| = \|x(\theta, x((n-1)\theta, x_0))\| \le q\|x((n-1)\theta, x_0)\|,$$

поэтому $\|x(n\theta, x_0)\| \le q^n\|x_0\|$, $q \in (0,1)$. Из этого неравенства глобальная асимптотическая устойчивость решения $x = 0$ дифференциального уравнения (7) следует очевидным образом. Теорема доказана. □

4 Глобальная стабилизация нижнего положения равновесия математического маятника переменной длины

Рассмотрим задачу о стабилизации нижнего положения равновесия математического маятника переменной длины. Используя уравнения Лагранжа второго рода, нетрудно показать, что движение этой механической системы описывается нелинейным неавтономным уравнением второго порядка

$$\ddot\varphi(t) + \frac{2\dot l(t)}{l(t)}\dot\varphi(t) + \frac{g}{l(t)}\sin\varphi(t) = \frac{u}{ml^2(t)}, \tag{12}$$

где φ — угол отклонения маятника от вертикали, $l(t)$ — положительная θ-периодическая дифференцируемая функция, моделирующая изменение длины маятника, g — ускорение свободного падения, u — управляющий момент, m — масса маятника.

Пусть $\omega_0^2 = \int\limits_0^\theta \frac{g}{l(t)}dt$, определим безразмерное время $\tau = \omega_0 t$ и перейдём в уравнении к безразмерным переменным

$$\bar l(\tau) = l(\tau/\omega_0), \quad \overline\theta = \omega_0\theta,$$

получим дифференциальное уравнение

$$\varphi''(\tau) + \frac{2\bar{l}'(\tau)}{\bar{l}(\tau)}\varphi'(\tau) + \frac{g}{\omega_0^2\bar{l}(\tau)}\sin\varphi(\tau) = \frac{u}{m\omega_0^2\bar{l}^2(\tau)}. \qquad (13)$$

Представим уравнение движения управляемой механической в виде псевдолинейной аффинной системы (7). Для этого введем матрицы

$$\mathbf{x}(\tau) = \begin{pmatrix} \varphi(\tau) \\ \varphi'(\tau) \end{pmatrix}, \quad B(\tau, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\omega_0^2 m\bar{l}^2(\tau)} \end{pmatrix},$$

$$A(\tau, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\omega_0^2\bar{l}(\tau)}\frac{\sin x_1}{x_1} & -\frac{2\bar{l}'(\tau)}{\bar{l}(\tau)} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A_0(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\sin x_1}{x_1} & 0 \end{pmatrix}, \quad B_0(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ b_0 \end{pmatrix},$$

где $b_0 = \int\limits_0^{\bar{\theta}} \frac{d\tau}{\omega_0^2 m\bar{l}^2(\tau)}$.

Управление $u(\mathbf{x})$ синтезируем в виде обратной связи $u(\mathbf{x}) = K(\mathbf{x})\mathbf{x}$, выбирая

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\mu \end{pmatrix}, \quad \mu > 0,$$

$$K(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} k_1(\mathbf{x}) & k_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix},$$

когда $A_0(\mathbf{x}) + B_0(\mathbf{x})K(\mathbf{x}) = \widetilde{A}$. Тогда

$$k_1(\mathbf{x}) = \frac{\sin x_1 - x_1}{x_1 b_0}, \quad k_2(\mathbf{x}) = -\frac{2\mu}{b_0},$$

$$u(\mathbf{x}) = -\frac{1}{b_0}\Big(-\sin x_1 + x_1 + 2\mu x_2\Big). \qquad (14)$$

Для того, чтобы применить теорему 3.1, введём следующие функции

$$c_{21}(\tau) = -\frac{g}{\omega_0^2\bar{l}(\tau)}, \quad c_{22}(\tau) = \frac{2\mu}{mb_0\omega_0^2\bar{l}^2(\tau)} - \frac{2\bar{l}'(\tau)}{\bar{l}(\tau)},$$

$$\hat{c}_{21}(\tau) = \int\limits_0^\tau c_{11}(s)\,ds, \quad \hat{c}_{22}(\tau) = \int\limits_0^\tau c_{22}(s)\,ds.$$

Тогда
$$[C(\tau),\hat C(\tau)]=\begin{pmatrix}\hat c_{21}-\tau c_{21} & \hat c_{22}-\tau c_{22}\\ c_{22}\hat c_{21}-\hat c_{22}c_{21} & -\hat c_{21}+\tau c_{21}\end{pmatrix}.$$
Элементы матрицы E имеют вид
$$e_{11}=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\overline{\theta}}(\hat c_{21}(\tau)-\tau c_{21}(\tau))\,d\tau,\quad e_{12}=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\overline{\theta}}(\hat c_{22}(\tau)-\tau c_{22}(\tau))\,d\tau,$$
$$e_{21}=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\overline{\theta}}(c_{22}(\tau)\hat c_{21}(\tau)-\hat c_{22}(\tau)c_{21}(\tau))\,d\tau,\quad e_{22}=-e_{11}.$$
Обозначим
$$\varrho_1=\max_{\tau\in[0,\overline{\theta}]}\Big|1-\frac{g}{\omega_0^2\overline{l}(\tau)}\Big|,\quad \varrho_2=\max_{\tau\in[0,\overline{\theta}]}\Big|1-\frac{1}{b_0\omega_0^2\overline{l}^2(\tau)}-\frac{2\overline{l}'(\tau)}{\overline{l}(\tau)}\Big|.$$
Тогда $\varrho=\sqrt{\varrho_1^2+4\mu^2\varrho_2^2}$, $\beta=\beta_0\varrho_1$, $\beta_0=1+|\min\limits_{x\in\mathbb{R}}\frac{\sin x}{x}|\approx 1.2$. Нетрудно показать, что
$$\nu=\frac{1}{2}\sqrt{2\varrho_1^2+4\max_{\tau\in[0,\overline{\theta}]}c_{22}^2(\tau)},\quad \mu=\frac{2}{\overline{\theta}}\max_{\tau\in[0,\overline{\theta}]}\sqrt{\tau^2+\hat c_{21}^2+\hat c_{22}^2},$$
$$\eta=\frac{1}{\overline{\theta}}\max_{\tau\in[0,\overline{\theta}]}\sqrt{f},$$
где $f=2(\hat c_{21}-\tau c_{21})^2+(\hat c_{22}-\tau c_{22})^2+(c_{22}\hat c_{21}-\hat c_{22}c_{21})^2$. Матрицу Q можно выбрать произвольной симметричной матрицей, а матрицу P определить из матричного уравнения Ляпунова $\widetilde{A}^TP+P\widetilde{A}=-Q$. Таким образом, определены все параметры, необходимые для проверки условий теоремы 3.1, которые гарантируют, что построенное управление (14) глобально стабилизирует нижнее положение равновесия математического маятника.

5 Обсуждение результатов

Отметим, что предложенные оценки оператора монодромии линейного периодического дифференциального уравнения являются конструктивными и эффективными, особенно при малых нарушениях условия Лаппо–Данилевского. Рассмотренные методы могут быть использованы для исследования устойчивости и стабилизации других классов неавтономных аффинных систем. Например, аффинных систем, близких к периодическим, аффинных систем с дискретным регулятором, а также при исследовании робастной устойчивости аффинных систем.

[1] *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive differential equations. — Singapore: World Scientific, 1995.

[2] *Magnus W.* On the exponential solution of differential equations for a linear operator // Communications on Pure and Applied Mathematics. — 1954. — vol. 7. — c. 649–673.

[3] *Айерленд К., Роузен М.* Классическое введение в современную теорию чисел. — М.: Мир, 1987.— 416 с.

[4] *Dynkin E. B.* On the representation by means of commutators of the series $\log(e^x e^y)$ for noncommuting x and y // Mat. Sb. — 1949. — Vol. 25(67). — P. 155—162.

[5] *Serre J. P.* Lie Algebras and Lie Groups. — Springer, Berlin: Lect. Notes Math., 1992.— Vol. 1500.

[6] *Dynkin E. B.* Normed Lie algebras and analytic groups // Uspehi Matem. Nauk (N.S.) — 1950. — Vol. 5, no. 1(35). — c. 135–186.

[7] *Magnus W., Karras A., Solitar D.* Combinatorial group theory. — Interscience Publ., 1966.

[8] *Daletskii Yu. L., Krein M. G.* Stability of solutions of differential equations in Banach space. — Amer. Math. Soc., 1974.

[9] *Лаппо–Данилевский И. А.* Применение функций от матриц к теории систем линейных дифференциальных уравнений. — М.: ГТТИ, 1957.— 456 с.

[10] *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. — М.: Наука, 1965.— 176 с.