Збірник праць Інституту математики НАН України 2018, т. 15, № 1, 147–161

УДК 511.72+517.5

Неперервна ніде не монотонна функція, означена в термінах нега-трійкових і ланцюгових A_2-дробів

М. В. Працьовитий[1]***, А. С. Чуйков***[2]

[1] *ІМ НАН України, НПУ імені М. П. Драгоманова, Київ; prats4444@gmail.com,*
[2] *ІМ НАН України, Київ; chyikov.artem@gmail.com*

We study properties of continuous nowhere monotonicity function on $[0;1]$, which is defined in terms of nega-3-adic and A_2-representation of real numbers. We proved a correctness of its definition, continuity and monotony, and described some properties of its graph and sets of levels.

Вивчаються властивості неперервної на $[0;1]$ ніде не монотонної функції, означеної в термінах нега-трійкового і ланцюгового A_2-зображення дійсних чисел. Доведено коректність її означення, неперервність і ніде не монотонність, описано деякі властивості її графіка і множини рівнів.

Вступ

Неперервні функції з фрактальними властивостями – популярний об'єкт у дослідженнях минулих десятиріч. Це функції, які мають властивості самоподібності, самоафінності, автомодельності (графіків або рівнів); функції, множини особливостей яких мають неоднорідну локальну тополого-метричну структуру тощо. Значний клас таких функцій утворюють ніде не монотонні, скрізь або майже скрізь недиференційовні функції. Сьогодні відомо чимало класів указаних функцій, які належать сім'ї ніде не монотонних функцій [4,5,9]. Окремим прикладом такої функції сьогодні мало кого здивуєш. Актуальнішими є методи вивчення їхніх властивостей, схеми дослідження, нові прийоми обґрунтування фактів.

Використовуючи нега-трійкове зображення дійсних чисел і введене в роботі [1] ланцюгове A_2-зображення, ми означуємо аналог неперервної ніде не монотонної й недиференційовної функції, яка вивчалась у роботах [2, 3, 7, 8], і досліджуємо її властивості.

Відомо, що для довільного $x \in [0;1]$ існує така послідовність (α_n), $\alpha_n \in A_3 \equiv \{0,1,2\}$, де

$$x = \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{(-3)^n} = \frac{3}{4} - \frac{\alpha_1}{3} + \frac{\alpha_2}{3^2} - \frac{\alpha_3}{3^3} + \ldots \equiv \Delta^{-3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}.$$

Таке подання числа у формі ряду називається *нега-трійковим представленням*, а символічний запис $x = \Delta^{-3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ – його нега-трійковим *зображенням*. Зауважимо, що нега-трійкове зображення, як показано в [**?**], є перекодуванням класичного трійкового зображення чисел. Кожне ірраціональне число має нескінченне неперіодичне зображення, а кожне раціональне можна подати як нескінченне періодичне нега-трійкове зображення не більш ніж двома способами. Причому, для чисел, які можна подати як два нега-трійкові зображення, вони мають вигляд:

$$x \equiv \Delta^{-3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n(20)} = \Delta^{-3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}[\alpha_n-1](02)} \equiv x', \tag{1}$$

де круглі дужки означають період.

Циліндром рангу m з основою $c_1c_2\ldots c_m$ називається множина

$$\Delta^{-3}_{c_1c_2\ldots c_m} = \{x | x = \Delta^{-3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m\alpha_{m+1}\ldots}, \alpha_i(x) = c_i, i = 1, 2, \ldots, m\}.$$

Циліндр є відрізком, а саме:

$$\Delta^{-3}_{c_1c_2\ldots c_m} = \begin{cases} \left[\Delta^{-3}_{c_1c_2\ldots c_m(20)}, \Delta^{-3}_{c_1c_2\ldots c_m(02)}\right], & \text{якщо } m \text{ – парне;} \\ \left[\Delta^{-3}_{c_1c_2\ldots c_m(02)}, \Delta^{-3}_{c_1c_2\ldots c_m(20)}\right], & \text{якщо } m \text{ – непарне.} \end{cases} \tag{2}$$

Циліндри одного рангу збігаються або не мають спільних внутрішніх точок.

Відомо також [1], що довільне дійсне число $x \in [1/2; 1]$ можна представити нескінченним ланцюговим дробом

$$x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots + \cfrac{1}{a_n + \ldots}}} \equiv [a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots], \tag{3}$$

де $a_n \in A'_2 \equiv \{\frac{1}{2}; 1\}, n \in N$. Розклад (3) дійсного числа $x \in [1/2; 1]$ називається його ланцюговим A_2-*представленням*. Рівність (3) скорочено записуватимемо $x = \Delta^{A_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$, де

$$\alpha_n = \begin{cases} 0, & \text{якщо } a_n = 1/2; \\ 1, & \text{якщо } a_n = 1, \end{cases}$$

і називатимемо ланцюговим A_2-*зображенням* числа x.

Існують числа, що мають два ланцюгові A_2-зображення. Вони вичерпуються такими: $x = \Delta^{A_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n 1(10)} = \Delta^{A_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n 0(01)}$.

1 Основний об'єкт дослідження

Розглядається функція $y = f(x)$, аргумент якої має нега-трійкове зображення

$$x = \Delta^{-3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} \equiv \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{(-3)^n}, \quad \alpha_n \in A_3,$$

а значення функції має ланцюгове A_2-зображення $f(x) = \Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots}$, причому

$$\beta_1 = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \alpha_1 = 2; \\ 0, & \text{якщо } \alpha_1 \neq 2; \end{cases} \qquad \beta_{k+1} = \begin{cases} 1 - \beta_k, & \text{якщо } \alpha_{k+1} + \alpha_k = 2; \\ \beta_k, & \text{якщо } \alpha_{k+1} + \alpha_k \neq 2. \end{cases} \tag{4}$$

Для вивчення властивостей функції корисною є описана в [1] геометрія ланцюгового A_2-зображення.

Циліндром рангу m із основою $c_1c_2\ldots c_m$ називають множину таких x, які мають ланцюгове A_2-зображення з першими m елементами, що дорівнюють відповідно $c_1, c_2, \ldots, c_m$, тобто

$$\Delta^{A_2}_{c_1\ldots c_m} = \{x | x = \Delta^{A_2}_{c_1c_2\ldots c_m\alpha_{m+1}\alpha_{m+2}\ldots}\}.$$

Довжина циліндра $\Delta^{A_2}_{c_1c_2\ldots c_m}$ обчислюється за формулою

$$\left|\Delta^{A_2}_{c_1c_2\ldots c_m}\right| = \frac{1}{(q_{m-1} + q_m)(q_{m-1} + 2q_m)},$$

де q_m – знаменник підхідного дробу числа $[0; a_1, a_2, \ldots, a_m]$:

$$q_0 = 1, \quad q_1 = a_1, \quad q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}, \quad a_n = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{якщо } c_n = 0; \\ 1, & \text{якщо } c_n = 1. \end{cases}$$

Основне метричне відношення для A_2-зображення чисел:

$$\frac{\left|\Delta^{A_2}_{c_1c_2\ldots c_n0}\right|}{\left|\Delta^{A_2}_{c_1c_2\ldots c_n}\right|}=\frac{2+\dfrac{q_{n-1}}{q_n}}{3+2\dfrac{q_{n-1}}{q_n}},\qquad \frac{\left|\Delta^{A_2}_{c_1c_2\ldots c_n1}\right|}{\left|\Delta^{A_2}_{c_1c_2\ldots c_n}\right|}=\frac{1+\dfrac{q_{n-1}}{q_n}}{3+2\dfrac{q_{n-1}}{q_n}}.$$

2 Коректність означення функції

Коректність означення функції у нега-трійково-ірраціональних точках не викликає сумнівів. Обґрунтуємо його коректність у нега-трійково-раціональних точках, тобто що для різних нега-трійкових зображень того самого раціонального значення аргумента

$$x\equiv\Delta^{-3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}\alpha_k(20)}=\Delta^{-3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}[\alpha_k-1](02)}\equiv x'$$

виконується рівність: $f(\Delta^{-3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}\alpha_k(20)})=f(\Delta^{-3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}[\alpha_k-1](02)})$.

Нехай $\Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k\ldots}$ — зображення значення функції для зображення аргумента $\Delta^{-3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}\alpha_k(20)}$, а $\Delta^{A_2}_{\beta'_1\beta'_2\ldots\beta'_k\ldots}$ — зображення значення функції для зображення аргумента $\Delta^{-3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}[\alpha_k-1](02)}$.

Оскільки $\alpha_k\neq 0$, то $[\alpha_k-1]\in\{0,1\}$. З означення функції маємо

$$\begin{cases}\beta_i=\beta'_i, & i=1,2,\ldots,k-1;\\ \beta_{k+j}=1-\beta_{k+j-1}, & j=2,3,\ldots;\\ \beta'_{k+j}=1-\beta'_{k+j-1}, & j=2,3,\ldots.\end{cases}$$

Усього існує 3 випадки. *Випадок 1.* $\begin{cases}\alpha_{k-1}+\alpha_k=2,\\ \alpha_{k-1}+\alpha_k-1\neq 2.\end{cases}$ Тоді

$$\begin{cases}\beta_k=1-\beta_{k-1},\\ \beta_{k+1}=\beta_k=1-\beta_{k-1},\\ \beta_{k+2}=1-\beta_{k+1}=\beta_{k-1},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\beta_k=1-\beta_{k-1},\\ \beta_{k+2j-1}=1-\beta_{k-1},\\ \beta_{k+2j}=\beta_{k-1}, \quad j\in N.\end{cases}$$

Отже, $y=f\left(\Delta^{-3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}\alpha_k(20)}\right)=\Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{k-1}[1-\beta_{k-1}](1-\beta_{k-1},\beta_{k-1})}$.

Аналогічно,

$$\begin{cases}\beta'_k=\beta'_{k-1}=\beta_{k-1},\\ \beta'_{k+1}=\beta'_k=\beta'_{k-1}=\beta_{k-1},\\ \beta'_{k+2}=1-\beta'_{k+1}=1-\beta_{k-1},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\beta'_k=\beta_{k-1},\\ \beta'_{k+2j-1}=\beta_{k-1},\\ \beta'_{k+2j}=1-\beta_{k-1}, \quad j\in N.\end{cases}$$

Тоді $y' = f\left(\Delta^{-3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}[\alpha_k-1](02)}\right) = \Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{k-1}\beta_{k-1}(\beta_{k-1},1-\beta_{k-1})}$.

Випадок 2. $\begin{cases} \alpha_{k-1}+\alpha_k \neq 2, \\ \alpha_{k-1}+\alpha_k-1 = 2. \end{cases}$ Маємо

$$\begin{cases} \beta_k = \beta_{k-1}, \\ \beta_{k+1} = \beta_k = \beta_{k-1}, \\ \beta_{k+2} = 1-\beta_{k+1} = 1-\beta_{k-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_k = \beta_{k-1}, \\ \beta_{k+2j-1} = \beta_{k-1}, \\ \beta_{k+2j} = 1-\beta_{k-1}, \quad j \in N. \end{cases}$$

Тоді $y = f\left(\Delta^{-3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}\alpha_k(20)}\right) = \Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{k-1}\beta_{k-1}(\beta_{k-1},1-\beta_{k-1})}$.

Аналогічно,

$$\begin{cases} \beta'_k = 1-\beta'_{k-1} = 1-\beta_{k-1}, \\ \beta'_{k+1} = \beta'_k = 1-\beta'_{k-1} = 1-\beta_{k-1}, \\ \beta'_{k+2} = 1-\beta'_{k+1} = \beta_{k-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta'_k = 1-\beta_{k-1}, \\ \beta'_{k+2j-1} = 1-\beta_{k-1}, \\ \beta'_{k+2j} = \beta_{k-1}, \quad j \in N. \end{cases}$$

Тоді $y' = f\left(\Delta^{-3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}[\alpha_k-1](02)}\right) = \Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{k-1}[1-\beta_{k-1}](1-\beta_{k-1},\beta_{k-1})}$.

Випадок 3. $\begin{cases} \alpha_{k-1}+\alpha_k \neq 2, \\ \alpha_{k-1}+\alpha_k-1 \neq 2. \end{cases}$ Маємо

$$\begin{cases} \beta_k = \beta_{k-1}, \\ \beta_{k+1} = \beta_k = \beta_{k-1}, \\ \beta_{k+2} = 1-\beta_{k+1} = 1-\beta_{k-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_k = \beta_{k-1}, \\ \beta_{k+2j-1} = \beta_{k-1}, \\ \beta_{k+2j} = 1-\beta_{k-1}, \quad j \in N. \end{cases}$$

Отже, $y = f\left(\Delta^{-3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}\alpha_k(20)}\right) = \Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{k-1}\beta_{k-1}(\beta_{k-1},1-\beta_{k-1})}$.

Аналогічно,

$$\begin{cases} \beta'_k = \beta'_{k-1} = \beta_{k-1}, \\ \beta_{k+1} = \beta'_k = \beta'_{k-1} = \beta_{k-1}, \\ \beta'_{k+2} = 1-\beta'_{k+1} = 1-\beta_{k-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta'_k = 1-\beta_{k-1}, \\ \beta'_{k+2j-1} = \beta_{k-1}, \\ \beta'_{k+2j} = 1-\beta_{k-1}, \quad j \in N. \end{cases}$$

Тоді $y' = f\left(\Delta^{-3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}[\alpha_k-1](02)}\right) = \Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{k-1}\beta_{k-1}(\beta_{k-1},1-\beta_{k-1})}$.

Отже, y і y' є A_2-зображенням того самого A_2-раціонального числа.

3 Неперервність функції

A_2-раціональними називають точки з відрізка $[0,5;1]$, які є кінцями деякого циліндра. До таких точок належать ті, що мають два ланцюгові A_2-зображення, а також точки $0,5$ і 1. Якщо ж точка x не є кінцем жодного циліндра, то таку точку називають A_2-ірраціональною.

Теорема 3.1. *Функція $y = f(x)$ є неперервною на півінтервалі* $(0;1]$.

Доведення. Нехай $x_0 = \Delta^{-3}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots} \in (0,1]$ – A_2-ірраціональна точка, $x' = \Delta^{-3}_{\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3\ldots}$. Нехай x_0 і x' належать одному циліндру m-го рангу, і різним циліндрам $m+1$-го рангу. Це означає, що існує $m : \alpha_i = \alpha'_i$ при $i \leq m$, і $\alpha_{m+1} \neq \alpha'_{m+1}$. Тоді той факт, що $x' \to x_0$, рівносильний умові $m \to \infty$. Тоді

$$|f(x') - f(x_0)| \leq |\Delta^{A_2}_{c_1c_2\ldots c_m}| \to 0, \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Нехай тепер аргумент x є A_2-раціональним числом, тобто його можна подати у вигляді двох періодичних нега-трійкових зображень (1). Очевидно, що

$$\begin{cases} \beta_i(x) = \beta_i(x'), & i = 1,2,\ldots,k-1; \\ \beta_{k+j}(x) = \beta_{k+j}(x'), & j = 2,3,\ldots. \end{cases}$$

Оскільки $2 + \alpha_k \neq 2$, то $\beta_{k+1}(x) = \beta_k(x)$. Аналогічно, оскільки $0 + \alpha_k - 1 \neq 2$, то $\beta_{k+1}(x') = \beta_k(x')$.

Залишилось визначити $\beta_k(x)$ і $\beta_k(x')$. Розглянувши три випадки, як і при доведенні коректності, впевнюємося, що значення функції від двох різних зображень є тим самим A_2-раціональним числом. $\square$

4 Ніде не монотонність функції

Неперервна функція називається ніде не монотонною, якщо вона не має жодного як завгодно малого проміжку монотонності.

Теорема 4.1. *Функція $y = f(x)$ є ніде не монотонною.*

Доведення. Для доведення ніде не монотонності покажемо, що у кожному циліндрі можна обрати такий підциліндр, у якому можна вказати точки, пов'язані нерівністю

$$x_1 < x_2 < x_3, \tag{5}$$

для яких виконується одна з двох нерівностей:

$$f(x_1) < f(x_2) > f(x_3) \qquad \text{або} \qquad f(x_1) > f(x_2) < f(x_3).$$

На довільному циліндрі парного рангу $\Delta^{-3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2k}}$ розглянемо точки:

$$x_1 = \Delta^{-3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2k}(2)}, \qquad x_2 = \Delta^{-3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2k}(1)}, \qquad x_3 = \Delta^{-3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2k}(0)}.$$

Оскільки

$$x_1 - x_2 = \left(\frac{3}{4} - \frac{\alpha_1}{3} + \frac{\alpha_1}{3^2} - \ldots + \frac{\alpha_{2k}}{3^{2k}} - \frac{2}{3^{2k+1}} + \ldots\right) -$$

$$- \left(\frac{3}{4} - \frac{\alpha_1}{3} + \frac{\alpha_1}{3^2} - \ldots + \frac{\alpha_{2k}}{3^{2k}} - \frac{1}{3^{2k+1}} + \ldots\right) =$$

$$= -\frac{1}{3^{2k+1}}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \ldots\right) = \frac{-1}{4 \cdot 3^{2k}} < 0,$$

то $x_1 < x_2$. Аналогічно показуємо, що $x_2 < x_3$. Отже, чинне (5).

Розглянемо випадок, коли $\alpha_{2k} = 0$. Тоді: $f(x_1) = \Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{2k}(1-\beta_{2k})}$,

$$f(x_2) = \Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{2k}(\beta_{2k},1-\beta_{2k})}, \; f(x_3) = \Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{2k}(\beta_{2k})}.$$

Нехай $\beta_{2k} = 0$. Тоді $f(x_1) = \Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{2k-1}0(1)}$,

$$f(x_2) = \Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{2k-1}0(01)}, \qquad f(x_3) = \Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{2k-1}0(0)}.$$

З властивостей ланцюгових дробів маємо:

$$\beta_{2k+1}(x_1) > \beta_{2k+1}(x_2) \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2),$$

$$\beta_{2k+2}(x_2) > \beta_{2k+2}(x_3) \quad \Rightarrow \quad f(x_2) > f(x_3).$$

Отже, $f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$.

Нехай $\beta_{2k} = 1$. Тоді $f(x_1) = \Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{2k-1}1(0)}$,

$$f(x_2) = \Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{2k-1}1(10)}, \quad f(x_3) = \Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{2k-1}1(1)}.$$

З властивостей ланцюгових дробів маємо:

$$\beta_{2k+1}(x_1) < \beta_{2k+1}(x_2) \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2),$$

$$\beta_{2k+2}(x_2) < \beta_{2k+2}(x_3) \quad \Rightarrow \quad f(x_2) < f(x_3).$$

Отже, $f(x_1) > f(x_2) < f(x_3)$. При $\alpha_{2k} \in \{1, 2\}$ висновки аналогічні.

Вказавши для кожного циліндра три значення аргумента, для яких діють вище зазначені системи нерівностей, ми довели ніде не монотонність функції. □

Лема 4.1. *На циліндрі* $\Delta^{-3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}1}$ *максимум або мінімум функції досягаєтья у його внутрішній точці* $x_0 = \Delta^{-3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}1(1)}$.

Доведення. Розглянемо циліндр $\Delta^{-3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}1}$. Його кінцями є точки:

$$x_1 = \Delta^{-3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}1(02)} \qquad x_2 = \Delta^{-3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}1(20)}.$$

Функція набуває у цих точках однакових значень:

$$f(x_1) = f(x_2) = \Delta^{-3}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{n-1}\beta_n(\beta_n, 1-\beta_n)}.$$

Оскільки функція є неперервною і відмінною від константи, то максимального або мінімального значення вона набуде у деякій внутрішній точці. Нехай $x_0 = \Delta^{-3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}1(1)}$, тоді

$$f(x_0) = \Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{n-1}\beta_n}(1-\beta_n, \beta_n).$$

Доведемо, що для всіх інших значень функції з цього циліндра виконується нерівність $f(x) > f(x_0)$ (або $f(x) < f(x_0)$). Нехай спочатку n – парне число; розглянемо можливі випадки.

Випадок 1. Виберемо у циліндрі $\Delta^{-3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}1}$ довільну точку $x = \Delta^{-3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}1\alpha_{n+1}\ldots}$, таку, що $\alpha_{n+1} \in \{0; 2\}$. Тоді

$$f(x) = \Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{n-1}00\ldots} > f(x_0) = \Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{n-1}0(10)}, \qquad \text{якщо } \beta_n = 0,$$

$$f(x) = \Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{n-1}11\ldots} < f(x_0) = \Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{n-1}1(01)}, \qquad \text{якщо } \beta_n = 1.$$

Випадок 2. Виберемо тепер у циліндрі $\Delta^{-3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}1}$ довільну точку $x = \Delta^{-3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}1\alpha_{n+1}\ldots}$, таку, що $\alpha_{n+k-1} = 1, k \in N$, але $\alpha_{n+k} \neq 1$. Тоді, якщо $n+k$ – парне і $\beta_{n+k} = 0$, то $f(x) > f(x_0)$; якщо ж $\beta_{n+k} = 1$, то $f(x) < f(x_0)$. Для непарного значення $n+k$ знаки цих нерівностей змінюватимуться на протилежні.

Для непарного значення n можна дійти аналогічних висновків, причому знаки нерівностей будуть змінені на протилежні.

Отже, на циліндрах парного рангу x_0 – точка мінімуму, якщо $\beta_n = 0$, і точка максимуму, якщо $\beta_n = 1$. На циліндрах непарного рангу x_0 – точка максимуму, якщо $\beta_n = 0$, і точка мінімуму, якщо $\beta_n = 1$. $\square$

Лема 4.2. *На циліндрі $\Delta^{-3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m-1}\alpha_m}$, де $\alpha_m \in \{0;2\}$, функція набуває свого найбільшого і найменшого значення на кінцях циліндра.*

Доведення. Розглянемо циліндр $\Delta^{-3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}0}$, і нехай n – парне число. Оскільки образ циліндра $\Delta^{-3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}0}$ є підмножиною циліндра $\Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{n-1}\beta_n}$, то – за властивостями ланцюгових дробів – максимальне значення функції не перевищуватиме значення $f_1 = \Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{n-1}\beta_n(01)}$.
Доведемо, що цього значення функція набуває на кінці циліндра й, можливо, ще в одній внутрішній точці циліндра. Нехай

$$x_{max} = \Delta^{-3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}0\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\ldots},$$

а $\beta_n = 0$, тоді $f(x_{max}) = \Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{n-1}0(01)}$.
Оскільки $\beta_{n+1}(f(x_{max})) = \beta_n(f(x_{max}))$, то $\alpha_{n+1} + \alpha_n \neq 2$, тобто $\alpha^{(1)}_{n+1}(x_{max}) = 0$ або $\alpha^{(2)}_{n+1}(x_{max}) = 1$. Далі, оскільки $\beta_{n+2}(f(x_{max})) \neq \beta_{n+1}(f(x_{max}))$, то $\alpha_{n+2} + \alpha_{n+1} = 2$, тобто

$$\alpha^{(1)}_{n+2}(x_{max}) = 2 \quad \text{або} \quad \alpha^{(2)}_{n+2}(x_{max}) = 1,$$

і далі. Отже,

$$x^{(1)}_{max} = \Delta^{-3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}0(02)} \text{ – правий кінець циліндра,}$$

$$x^{(2)}_{max} = \Delta^{-3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}0(1)} \text{ – внутрішня точка циліндра.}$$

Нехай тепер $\beta_n = 1$. Оскільки $\beta_{n+1}(f(x_{max})) \neq \beta_n(f(x_{max}))$, то

$$\alpha_{n+1}(x_{max}) + \alpha_n(x_{max}) = 2,$$

отже, $\alpha_{n+1}(x_{max}) = 2$. Оскільки $\beta_{n+2}(f(x_{max})) \neq \beta_{n+1}(f(x_{max}))$, то $\alpha_{n+2}(x_{max}) + \alpha_{n+1}(x_{max}) = 2$, тобто $\alpha_{n+2}(x_{max}) = 0$ і далі. Таким чином, $x_{max} = \Delta^{-3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}0(20)}$ – лівий кінець циліндра. Мінімальне значення функції на циліндрі $\Delta^{-3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}0}$ буде не меншим за $f_2 = \Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{n-1}\beta_n(10)}$. Доведемо, що це значення досягатиметься на одному з кінців циліндра й, можливо, ще в одній внутрішній його точці.

Нехай $x_{min} = \Delta^{-3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}0\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\ldots}$, і нехай $\beta_n = 0$. Тоді, повторюючи наведені вище міркування, отримуємо, що

$$x_{min} = \Delta^{-3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}0(20)} \text{ – лівий кінець циліндра.}$$

При $\beta_n = 1$ аналогічним чином доходимо висновку, що мінімальне значення функції досягається у двох точках:

$$x^{(1)}_{min} = \Delta^{-3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}0(02)} \text{ – правий кінець циліндра.}$$

$$x^{(1)}_{min} = \Delta^{-3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}0(1)} \text{ – внутрішня точка циліндра.}$$

Для непарного значення n і для $\alpha_n = 2$ доведення аналогічне. □

5 Множини рівнів функції

Множиною рівня y_0 функції f називається множина

$$f^{-1}(y_0) = \{x : f(x) = y_0\}.$$

Лема 5.1. *1) Якщо A_2-зображення точки y_0 має вигляд $\Delta^{A_2}_{(01)}$, то множина $f^{-1}(y_0)$ складається зі двох точок.*
2) Якщо A_2-зображення точки y_0 має вигляд $\Delta^{A_2}_{(10)}$, то множина $f^{-1}(y_0)$ складається з однієї точки.
3) Якщо в A_2-зображення точки y_0 всі цифри дорівнюють 0, то множина $f^{-1}(y_0)$ є зліченною множиною.

Доведення. 1) Нехай $y_0 = \Delta^{A_2}_{(01)}$. Оскільки $\beta_1 = 0$, то, виходячи з означення функції, $\alpha_1 \in \{0; 1\}$. Оскільки $\beta_2 = 1 = 1 - \beta_1$, то $\alpha_2 + \alpha_1 = 2$, тобто $\alpha_2 = 2$, якщо $\alpha_1 = 0$ і $\alpha_2 = 1$, якщо $\alpha_1 = 1$. Аналогічно, оскільки $\beta_3 = 0$, то $\alpha_3 = 0$, якщо $\alpha_2 = 2$ і $\alpha_3 = 1$, якщо $\alpha_2 = 1$ і далі. Отже, прообразами точки y_0 є два значення аргумента: $\Delta^{-3}_{(02)}$ або $\Delta^{-3}_{(1)}$.
2) Нехай $y_0 = \Delta^{A_2}_{(10)}$. Оскільки $\beta_1 = 1$, то $\alpha_1 = 2$. Далі, оскільки $\beta_2 = 0 = 1 - \beta_1$, то $\alpha_1 + \alpha_2 = 2$, тобто $\alpha_2 = 0$. Продовжуючи ці міркування доходимо висновку, що прообразом точки y_0 є лише точка $\Delta^{-3}_{(20)}$.
3) Нехай $y_0 = \Delta^{A_2}_{(0)}$. Оскільки $\beta_1 = 0$, то $\alpha_1 \in \{0; 1\}$. Те, що β_{k+1} дорівнює 0, рівносильно до того, що $\alpha_k + \alpha_{k+1} \neq 2$. Отже, кожна наступна цифра аргумента може приймати два значення, і перелік усіх значень аргументів, для яких $\alpha_k + \alpha_{k+1} \neq 2$, легко занумерувати за зростанням відповідних цифр. □

6 Автомодельність графіка функції

Теорема 6.1. *1) Частина*
$\Gamma_1 = \{M(x,y) : x = \Delta^{-3}_{1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}, \quad y = f(x)\}$ *графіка* Γ *функції* f *симетрична відносно прямої* $x = \Delta^{-3}_{(1)}$.
2) Відображення, яке переводить частину графіка

$$\Gamma_0 = \{M(x,y) : x = \Delta^{-3}_{0\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}, \quad y = f(x)\}$$

в частину $\Gamma_2 = \{M(x,y) : x = \Delta^{-3}_{2\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}, \quad y = f(x)\}$ *задається формулою:*

$$\begin{cases} x' = \Delta^{-3}_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\ldots[2-\alpha_n]\ldots}, \\ y' = \Delta^{A_2}_{[1-\beta_1][1-\beta_2]\ldots[1-\beta_n]\ldots}. \end{cases}$$

Доведення. 1. Відомо, що графік функції $y = f(x)$ має вісь симетрії $x = a$ тоді і лише тоді, коли $2a - x \in D(f)$ $\forall x \in D(f)$ і $f(2a-x) = f(x)$.

Візьмімо довільний x_0 з циліндра Δ^{-3}_1: $x_0 = \Delta^{-3}_{1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}$ і нехай $f(x_0) = \Delta^{A_2}_{1\beta_2\beta_3\ldots\beta_n\ldots}$.

Тоді

$$x_1 = 2\cdot\Delta^{-3}_{(1)} - x_0 = 2\cdot\Delta^{-3}_{(1)} - \Delta^{-3}_{1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots} =$$

$$= 2\cdot\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \ldots\right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3} + \frac{\alpha_2}{3^2} - \frac{\alpha_3}{3^3} + \ldots\right) =$$

$$= \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3} + \frac{2-\alpha_2}{3^2} - \frac{2-\alpha_3}{3^3} + \ldots\right) = \Delta^{-3}_{1[2-\alpha_2][2-\alpha_3]\ldots[2-\alpha_n]\ldots}.$$

Якщо $\alpha_2 + 1 = 2$, то $[2-\alpha_2] + 1 = 4 - (\alpha_2 + 1) = 2$.

Якщо $\alpha_{k+1} + \alpha_k = 2$, то $[2-\alpha_{k+1}] + [2-\alpha_k] = 4 - (\alpha_{k+1} + \alpha_k) = 2, k = 2, 3, \ldots$; це означає, що $f(x_1) = \Delta^{A_2}_{1\beta_2\beta_3\ldots\beta_n\ldots}$

Ми отримали, що $f\left(2\cdot\Delta^{-3}_{(1)} - x_0\right) = f(x_0), \quad \forall x_0 \in \Gamma_1$, тобто частина графіка Γ_1 симетрична відносно прямої $x = \Delta^{-3}_{(1)}$.

2. Нехай $M(x,y) \in \Gamma_0$, тобто $x = \Delta^{-3}_{0\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}, \quad y = f(x) = \Delta^{A_2}_{0\beta_2\beta_3\ldots\beta_n\ldots}$, тоді $x' = \Delta^{-3}_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\ldots[2-\alpha_n]\ldots} = \Delta^{-3}_{2[2-\alpha_2]\ldots[2-\alpha_n]\ldots}$. Звідси

$$\begin{cases} \beta_1 = 0, \beta_2 = \begin{cases} 1-\beta_1, & \text{якщо } \alpha_2 = 2; \\ \beta_1, & \text{якщо } \alpha_2 \neq 2; \end{cases} \\ \beta_{k+2} = \begin{cases} 1-\beta_{k+1}, & \text{якщо } \alpha_{k+2} + \alpha_{k+1} = 2; \\ \beta_{k+1}, & \text{якщо } \alpha_{k+2} + \alpha_{k+1} \neq 2, \quad k \in N. \end{cases} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \beta'_1 = 1 = 1-\beta_1, \\ \beta'_2 = \begin{cases} 1-\beta'_1, & \text{якщо } [2-\alpha_2]+2=2; \\ \beta'_1, & \text{якщо } [2-\alpha_2]+2\neq 2; \end{cases} \\ \beta'_{k+2} = \begin{cases} 1-\beta'_{k+1}, & \text{якщо } [2-\alpha_{k+2}]+[2-\alpha_{k+1}]=2; \\ \beta'_{k+1}, & \text{якщо } [2-\alpha_{k+2}]+[2-\alpha_{k+1}]\neq 2, \ \ k\in N. \end{cases} \end{cases}$$

Звідси бачимо, що $\beta'_i = 1-\beta_i, i \in N$, тобто $y' = f(x') = \Delta^{A_2}_{[1-\beta_1][1-\beta_2]\ldots[1-\beta_n]\ldots}$. □

7 Варіаційні властивості функції

Лема 7.1. *Для амплітуди δ коливання функції діє рівність*

$$\delta\left(\bar\Delta^3_{\alpha_1\ldots\alpha_m}\right) \equiv \max_{x\in\bar\Delta^3_{\alpha_1\ldots\alpha_m}} f(x) - \min_{x\in\bar\Delta^3_{\alpha_1\ldots\alpha_m}} f(x) = |\Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m}|.$$

Доведення. Нехай n – парне число. Тоді циліндр $\Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m}$ є відрізком із кінцями: $[\Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m(10)}, \Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m(01)}]$. Розглянемо циліндр $\bar\Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}$. Нехай $\alpha_m = 0$. Тоді числа

$$y_1 \equiv f(\bar\Delta^3_{\alpha_1\ldots\alpha_m(02)}) = \Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m(\beta_m,1-\beta_m)},$$

$$y_2 \equiv f(\bar\Delta^3_{\alpha_1\ldots\alpha_m(20)}) = \Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m(1-\beta_m,\beta_m)}$$

є кінцями циліндра $\Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m}$. Нехай $\alpha_m = 1$. Тоді числа

$$y_1 \equiv f(\bar\Delta^3_{\alpha_1\ldots\alpha_m(1)}) = \Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m(1-\beta_m,\beta_m)},$$

$$y_2 \equiv f(\bar\Delta^3_{\alpha_1\ldots\alpha_m(02)}) = \Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m(\beta_m,1-\beta_m)}$$

є кінцями циліндра $\Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m}$. Нехай $\alpha_m = 2$. Тоді числа

$$y_1 \equiv f(\bar\Delta^3_{\alpha_1\ldots\alpha_m(02)}) = \Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m(1-\beta_m,\beta_m)},$$

$$y_2 \equiv f(\bar\Delta^3_{\alpha_1\ldots\alpha_m(20)}) = \Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m(\beta_m,1-\beta_m)}$$

є кінцями циліндра $\Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m}$.
Таким чином, у всіх випадках $|y_1 - y_2| = |\Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m}|$, отже, амплітуда δ коливання функції на циліндрі $\bar\Delta^3_{\alpha_1\ldots\alpha_m}$ дорівнює довжині $\Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m}$.
При непарному значенні n міркування аналогічні. □

Лема 7.2. *Має місце подвійна нерівність*

$$\frac{1}{3}|\Delta^{A_2}_{c_1c_2\ldots c_n}| < |\Delta^{A_2}_{c_1c_2\ldots c_n i}| < \frac{2}{3}|\Delta^{A_2}_{c_1c_2\ldots c_n}|. \tag{6}$$

Доведення. Перепишемо нерівність у формі

$$\frac{1}{3} < \frac{|\Delta^{A_2}_{c_1c_2\ldots c_n i}|}{|\Delta^{A_2}_{c_1c_2\ldots c_n}|} < \frac{2}{3}.$$

Доведемо спочатку першу нерівність. З рівностей

$$\frac{|\Delta^{A_2}_{c_1c_2\ldots c_n 2^{-1}}|}{|\Delta^{A_2}_{c_1c_2\ldots c_n}|} = \frac{2+\dfrac{q_{n-1}}{q_n}}{3+2\dfrac{q_{n-1}}{q_n}}, \frac{|\Delta^{A_2}_{c_1c_2\ldots c_n 1}|}{|\Delta^{A_2}_{c_1c_2\ldots c_n}|} = \frac{1+\dfrac{q_{n-1}}{q_n}}{3+2\dfrac{q_{n-1}}{q_n}},$$

де $0 < \dfrac{q_{n-1}}{q_n} < 1$, бачимо, що $\dfrac{|\Delta^{A_2}_{c_1c_2\ldots c_n i}|}{|\Delta^{A_2}_{c_1c_2\ldots c_n}|}$ набуде меншого значення при $i = 1$.

Оскільки функція $f_1(x) = \dfrac{1+x}{3+2x}$ є зростаючою, то

$$\frac{|\Delta^{A_2}_{c_1c_2\ldots c_n 1}|}{|\Delta^{A_2}_{c_1c_2\ldots c_n}|} > \inf_{x\in(0;1)} f_1(x) = f_1(0) = \frac{1}{3}.$$

Доведемо тепер другу нерівність.

Максимального значення дріб $\dfrac{|\Delta^{A_2}_{c_1c_2\ldots c_n i}|}{|\Delta^{A_2}_{c_1c_2\ldots c_n}|}$ набуде при $i = 2^{-1}$.

Оскільки функція $f_2(x) = \dfrac{2+x}{3+2x}$ є спадною, то

$$\frac{|\Delta^{A_2}_{c_1c_2\ldots c_n 2^{-1}}|}{|\Delta^{A_2}_{c_1c_2\ldots c_n}|} < \sup_{x\in(0;1)} f_2(x) = f_2(0) = \frac{2}{3}.$$

□

Наслідок 7.1. $2|\Delta^{A_2}_{c_1c_2\ldots c_n i}| > |\Delta^{A_2}_{c_1c_2\ldots c_n(1-i)}|$.

Доведення. З нерівності (6) отримуємо

$$|\Delta^{A_2}_{c_1c_2\ldots c_n}| < 3|\Delta^{A_2}_{c_1c_2\ldots c_n i}| \quad \Leftrightarrow$$

$$|\Delta^{A_2}_{c_1c_2\ldots c_n i}| + |\Delta^{A_2}_{c_1c_2\ldots c_n(1-i)}| < 3|\Delta^{A_2}_{c_1c_2\ldots c_n}| \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\Delta^{A_2}_{c_1c_2\ldots c_n(1-i)}| < 2|\Delta^{A_2}_{c_1c_2\ldots c_n i}|. \qquad \square$$

Теорема 7.1. *Функція f є функцією необмеженої варіації.*

Доведення. Оскільки образом циліндра n-го рангу нега-трійкового зображення числа при відображенні f є циліндр A_2-зображення того самого рангу, причому точно два образи циліндрів

$$\bar{\Delta}^3_{\alpha_1\ldots\alpha_n 0}, \bar{\Delta}^3_{\alpha_1\ldots\alpha_n 1}, \bar{\Delta}^3_{\alpha_1\ldots\alpha_n 2}$$

збігаються, то варіація V функції f є не меншою від сумарної довжини образів V_n усіх циліндрів рангу n, тобто

$$V \geq V_n \equiv \sum_{\alpha_1=0}^{2} \ldots \sum_{\alpha_n=0}^{2} |f(\bar{\Delta}^3_{\alpha_1\ldots\alpha_m})|.$$

Якщо $\Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n} = f(\bar{\Delta}^3_{\alpha_1\ldots\alpha_n})$, то

$$\sum_{i=0}^{2} |f(\bar{\Delta}^3_{\alpha_1\ldots\alpha_n i})| = |\Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n 0}| + |\Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n 1}| + |\Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n c}| =$$

$$= |\Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n}| + |\Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n c}|, \quad \text{де} \quad c \in \{0; 1\}.$$

Оскільки $\frac{1}{3}|\Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n}| < |\Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n i}| < \frac{2}{3}|\Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n}|$, то

$$\sum_{i=0}^{2} |f(\bar{\Delta}^3_{\alpha_1\ldots\alpha_n i})| > |\Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n}| + \frac{1}{3}|\Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n}| = \frac{4}{3}|\Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n}|.$$

Отже,

$$V_{n+1} \equiv \sum_{\alpha_1=0}^{2} \ldots \sum_{\alpha_n=0}^{2} \sum_{i=0}^{2} |f(\bar{\Delta}^3_{\alpha_1\ldots\alpha_n i})| >$$

$$> \frac{4}{3} \sum_{\alpha_1=0}^{2} \ldots \sum_{\alpha_n=0}^{2} |f(\bar{\Delta}^3_{\alpha_1\ldots\alpha_n})| \equiv \frac{4}{3} V_n.$$

Таким чином,

$$V_{n+1} > \frac{4}{3}V_n > \left(\frac{4}{3}\right)^2 V_{n-1} > \ldots > \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} \cdot |\Delta| \to \infty \text{ при } n \to \infty,$$

а отже, варіація $V \equiv \lim\limits_{n\to\infty} V_n = \infty$. □

[1] Дмитренко С.О., Кюрчев Д.В., Працьовитий М.В. Ланцюгове A_2-зображення дійсних чисел та його геометрія // Український математичний журнал. — 2009. — **61**,9. — С. 452-463.

[2] Коваль В.В. Самоафінні графіки функцій // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2004. — № 5. — С. С. 292-299.

[3] Панасенко О.Б. Розмірність Хаусдорфа-Безиковича однієї неперервної ніде не диференційовної функції // Український математичний журнал. — 2009. — **61**, 9. — С. 1225-1239.

[4] Працьовитий М.В., Василенко Н.А. Одна сім'я неперервних ніде не монотонних функцій з фрактальними властивостями // Наук. часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова. — 2013. — № 14. — С. 176-188.

[5] Працьовитий М.В., Свинчук О.В. Розсіювання значень однієї фрактальної неперервної немонотонної функції канторівського типу // Нелінійні коливання. — 2018. — **21**, 1. — С. 116–130.

[6] Працьовитий М.В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова. — 1998. — 296с.

[7] Працевитый Н.В. Непрерывные канторовские проекторы // Методы исследования алгебраических и топологических структур. — Киев: ВКГПИ. — 1989. — С. 95-105.

[8] Працьовитий М.В. Фрактальні властивості однієї неперервної ніде недиференційовної функції // Наукові записки НПУ імені М. П. Драгованова. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2002. — Вип. 3. — С. 351-362.

[9] Турбин А.Ф., Працевитый Н.В. Фрактальные множества, функции, распределения.— Киев; Наук. думка, 1992.— 208 с.