Збірник праць Інституту математики НАН України 2018, т. 15, № 1, 132–146

УДК 511.72+517.5

Геометрія числових рядів: ряд як модель дійсного числа в новій двосимвольній системі кодування чисел

М. В. Працьовитий [1], ***І. М. Лисенко*** [2], ***Ю. П. Маслова*** [3]

[1] *Інститут математики НАН України, НПУ імені М.П. Драгоманова Київ; prats4444@gmail.com,*
[2] *НПУ імені М.П. Драгоманова Київ; iryna.pratsiovyta@gmail.com,*
[3] *НПУ імені М.П. Драгоманова Київ; julia0609mas@gmail.com*

In the paper, we consider sets of incomplete sums of subharmonic normalized series. Their topological, metric, and fractal properties are studied. We give model examples and prove theorems of existence as well as massiveness of classes of series. A new polybase two-symbol system of encoding of real numbers with zero redundancy is also introduced. It is topologically equivalent to representation of numbers by A_2-continued fractions and by nega-binary representation. For this system, we describe geometry (properties of cylindrical sets) and foundations of metric theory.

Стаття присвячена множинам неповних сум субгармонічних нормованих рядів, їхнім тополого–метричним і фрактальним властивостям, а також одній новій поліосновній двосимвольній системі кодування дійсних числе з нульовою надлишковістю, топологічно еквівалентній до зображення чисел ланцюговими A_2–дробами й нега–двійковим зображенням. Для першої тематики наводяться модельні приклади і доводяться теореми існування, а також масивності класів рядів, для другої — проводиться опис геометрії (властивостей циліндричних множин) і основ метричної теорії.

© **Працьовитий М. В., Лисенко І. М., Маслова Ю. П., 2018**

Вступ

Моделлю дійсного числа у змістовній теорії дійсних чисел Веєрштраса є s–ковий ряд (сума всіх членів спеціальної числової послідовності), зокрема двійковий ($1 < s \in N$). У цій теорії дійсне число ототожнюється з нескінченним упорядкованим набором (послідовністю) елементів алфавіту $A_s = \{0, 1, 2, \ldots, s-1\}$, яка називається *$s$–ковим зображенням числа.* Існують інші базисні ряди, що дозволяють за допомогою скінченного алфавіту отримувати зображення чисел на основі їхніх розкладів у ряд із коефіцієнтами з алфавіту [13, 16]. Але не кожний ряд придатний для цього. Якщо ряд і дозволяє отримувати зображення чисел заданого проміжку, то не завжди система кодування чисел засобами заданого алфавіту має нульову надлишковість, тобто кожне число має не більш як два зображення. Окремої уваги заслуговують ті ряди, які дозволяють отримати систему кодування дійсних чисел (передусім, дробової частини дійсного числа) засобами двійкового алфавіту $A_2 = \{0; 1\}$. Окрім класичної двійкової системи числення [1] у математиці широко використовуються інші двосимвольні системи кодування чисел (Q_2–зображення [8,10], Q_2^*–зображення [9], марківське зображення [7], медіантне зображення, ланцюгове A_2–зображення [5,6] тощо). Побудова тополого–метричної, ймовірнісної і фрактальної теорій дійсних чисел на основі їх зображень у тій чи іншій системі кодування визначається геометрією зображень (геометричним змістом цифр, властивостями циліндричних, надциліндричних, хвостових та ін. множин). Геометрія ряду значною мірою визначається співвідношеннями між членам ряду і його залишками з тими самими порядковими номерами. Свідченням цього є вже перші результати в галузі геометрії рядів, яка бере свій початок від роботи Какея [14].

Дана робота присвячена субгармонічним нормованим рядам (збіжним підрядам гармонічного ряду з сумою 1) і новій двосимвольній поліосновній системі кодування чисел відрізка [0;1] зі двома основами, одна з яких є додатною, а друга — від'ємною, а саме: їхній геометрії (метричним співвідношенням, топологічним і метричним задачам).

1 Субгармонічні нормовані ряди

Додатний ряд, збіжний до одиниці, називається *нормованим.* Якщо ряд є збіжним і має суму S, то, помноживши його на число $\frac{1}{s}$, отримаємо нормований ряд.

У цьому розділі мова йтиме про нормовані додатні ряди, членами яких є числа, обернені до натуральних. Найпростішими прикладами таких рядів є:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^k} + \ldots = \frac{1/2}{1 - 1/2}. \tag{1}$$

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^n} + \ldots \tag{2}$$

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \ldots \tag{3}$$

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} + \ldots = \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \ldots . \end{aligned} \tag{4}$$

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2^2 \cdot 3} + \frac{1}{2^2 \cdot 3^2} + \ldots \tag{5}$$

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{43} + \ldots \frac{1}{a_n} + \ldots , \tag{6}$$

де $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n(a_n - 1) + 1$. Цей ряд називається рядом Сільвестера [12].

Лема 1.1. *Існує нескінченна кількість нормованих додатних рядів зі членами, оберненими до натуральних чисел, таких, що вони є сумами членів геометричних прогресій, починаючи з деякого члена.*

Доведення. Візьмімо довільне натуральне число $m \geq 2$. Розгляньмо геометричну прогресію з першим членом $b_1 = \frac{1}{m}$ і знаменником $q = \frac{1}{m}$. Її сума дорівнює

$$\frac{b_1}{1 - q} = \frac{1}{m - 1}.$$

Тоді сума ряду

$$\underbrace{\frac{1}{m-1}+\ldots+\frac{1}{m-1}}_{m-2\ \text{доданки}}+\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\ldots$$

дорівнює 1.

Отже, з довільності вибору числа m випливає, що існує нескінченна множина рядів, що задовольняють умови леми. □

Означення 1.1. Два ряди $\sum\limits_{n} a_n$ і $\sum\limits_{n} b_n$ називатимемо *формально різними*, якщо існує таке n, що $a_n \neq b_n$.

Теорема 1.1. *Існує континуальна кількість розкладів одиниці на формально різні додатні ряди, членами яких є числа, обернені до натуральних.*

Доведення. Розгляньмо нормований ряд:

$$1=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right)+\ldots=$$
$$=\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right)+\ldots.$$

У ряді можна поміняти місцями другий і третій члени, четвертий і п'ятий, шостий і сьомий, і т. д., а можна залишити попередній порядок цих пар членів ряду. Поставимо кожній заміні у відповідність 1, а кожній сумі двох доданків, що не змінилася, 0. Таким чином, на зліченній множині місць є дві альтернативи, тобто існує континуальна множина формально різних рядів, отриманих такими перестановками. □

Два абсолютно збіжні ряди $\sum\limits_{n} a_n$ і $\sum\limits_{n} b_n$ із монотонною послідовністю членів називатимемо *змістовно рівними*, якщо $a_n = b_n$ для будь–якого n.

Природним є запитання: Скільки існує змістовно різних нормованих рядів, члени яких є числами, оберненими до натуральних, і утворюють монотонну послідовність?

Лема 1.2. *Для довільного натурального числа a мають місце змістовно різні розклади:*

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{(a+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(a+1)^n} + \ldots, \tag{7}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{1 \cdot (a+1)} + \frac{1}{(a+1)(2a+1)} + \ldots + \frac{1}{((n-1)a+1)(na+1)} + \ldots. \tag{8}$$

Доведення. Справді, згідно з формулою суми нескінченно спадної геометричної прогресії:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+1)^n} = \frac{\frac{1}{a+1}}{1 - \frac{1}{a+1}} = \frac{1}{a}.$$

А для другого ряду маємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{((n-1)a+1)(na+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a}\left(\frac{1}{(n-1)a+1} - \frac{1}{na+1}\right) = \frac{1}{a}\lim_{m\to\infty}\left(1 - \frac{1}{ma+1}\right) = \frac{1}{a}.$$

Ряди (7) і (8) є змістовно різними, оскільки другий ряд містить член $\frac{1}{(a+1)(2a+1)}$, якого немає в першому ряді. Справді, рівність

$$\frac{1}{(a+1)(2a+1)} = \frac{1}{(a+1)^k}$$

виконується тоді і тільки тоді, коли

$$2a+1 = (a+1)^{k-1}.$$

При $k = 1$ і $k = 2$ рівність, очевидно, не виконується. Для $k = 3$ маємо

$$2a+1 < (a+1)^2 = a^2 + 2a + 1.$$

При $k > 3$ нерівність

$$2a+1 < (a+1)^{k-1}$$

є очевидною. Лему доведено. □

Лема 2 дає розклади

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \cdots + \frac{1}{7^n} + \cdots ;$$

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7 \cdot 15} + \cdots + \frac{1}{(6(n-1)+1)(6n+1)} + \cdots .$$

2 Гармонічний ряд і його підсуми

Широковживаний розбіжний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \tag{9}$$

називається *гармонічним*. Кожен член цього ряду, починаючи зі другого, є середнім гармонічним двох сусідніх членів.

Збіжний до одиниці ряд, членами якого є числа, обернені до натуральних, називатимемо *субгармонічним нормованим рядом*. Найпростішими прикладами таких рядів є ряди (1)-(6).

Теорема 2.1. *Існує континуальна множина нормованих нескінченних підрядів гармонічного ряду, тобто субгармонічних нормованих рядів.*

Доведення. Нехай

$$A = [0,1] = \left\{ x \colon x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{2^i},\ \alpha_i \in \{0,1\} \right\},$$

$$B = \left\{ y \colon y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i}{3^i},\ \beta_i \in \{0,1\} \right\}.$$

Якщо $u \in B$, то число 1 належить множині

$$u \oplus A = [u, 1+u],$$

тобто

$$1 = x + y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{2^k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{3^k}. \tag{10}$$

Оскільки це стосується довільного числа $u \in B$, а остання множина є континуальною, то існує континуальна множина C розкладів (10) числа 1.

Усі члени ряду (10) є оберненими до натуральних, причому відсутні однакові доданки, оскільки знаменники є різними степенями чисел 2 і 3. $\square$

3 Множина неповних сум ряду

Означення 3.1. Нехай M — підмножина множини N всіх натуральних чисел. Число $x = x(M)$ називається неповню сумою нормованого додатного ряду $\sum\limits_n a_n$, якщо

$$x = x(M) = \sum_{n \in M} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n,$$

де

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \ n \in M, \\ 0, & \text{якщо } \ n \notin M. \end{cases}$$

Означення 3.2. Множина усіх неповних сум даного ряду, тобто

$$E(a_n) = E = \{x : \ x = \sum_{n \in M \subset N} a_n, \ M \in 2^N\},$$

називається його множиною неповних сум.

Зрозуміло, що множина неповних сум додатного нормованого ряду є геометричною фігурою числової прямої, точніше, відрізка $[0; 1]$, яка має свої геометричні (топологічні й метричні) властивості. Саме вони розкривають суть геометрії ряду.

Сьогодні відомо [15], що множина неповних сум збіжного додатного ряду належить одному з топологічних типів, а саме:

1) є скінченним об'єдананням відрізків;

2) є множиною, гомеоморфною класичній множині Кантора (множині неповних сум ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^k}$);

3) є канторвалом — множиною, гомеоморфною множині неповних сум ряду $\frac{3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{2}{4^3} + \ldots$.

Загальні критерії належності двом останнім типам досі не встановленні, як і не розв'язана задача про необхідні та достатні умови нуль-мірності Лебега множини неповних сум [3].

Множиною неповних сум ряду (1) є відрізок $[0;1]$, а ряду (2) є ніде нещільна множина нульової міри Лебега, що є об'єднанням двох самоподібних множин зі фрактальною розмірністю Гаусдорфа–Безиковича $\log_6 2$. Множина неповних сум ряду (4) є аномально фрактальною [12], тобто є континуальною множиною з нульовою розмірністю Гаусдорфа–Безиковича [2].

Хотілось би дати вичерпну відповідь на запитання: які тополого–метричні і фрактальні властивості можуть мати субгармонічні нормовані ряди? Тобто отримати повну класифікацію топологічних і тополого-метричних типів, зокрема відповісти на запитання: чи існують субгармонічні нормовані ряди, множини неповних сум яких є канторвалами?

4 Нова двосимвольна система кодування дійсних чисел

Нехай $A_2 = \{0;1\}$ – алфавіт; $L_2 = A_2 \times A_2 \times ... \times A_2 \times ...$ – простір послідовностей елементів алфавіту; $\overline{g} = (g_0; g_1)$ — фіксований набір чисел, причому $0 < g_0 < 1$, $g_1 \equiv g_0 - 1$, $g_0 > -g_1$; $\delta_0 \equiv 0$, $\delta_1 \equiv g_0$. Зауважимо, що $\delta_i = i g_{1-i}$, $i = 0, 1$.

Лема 4.1. *Для будь-якої послідовності* $(\alpha_n) \in L_2$ *ряд*

$$\delta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} (\delta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j}) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \tag{11}$$

є збіжним знакопочережним і його сума належить відрізку $[0; g_0]$.

Доведення. Зауважимо, що очевидно істинним є твердження: значення виразу

$$\delta_{\alpha_{n+1}} \prod_{j=1}^{n} g_{\alpha_j} = u_{n+1}$$

є *нулем* тоді і тільки тоді, коли $\alpha_{n+1} = 0$;

додатним числом, якщо $\alpha_{n+1} = 1$ і кількість одиниць серед чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ є парним числом;

від'ємним числом, якщо $\alpha_{n+1} = 1$ і кількість одиниць серед чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ є непарним числом.

Тому, коли в послідовності (α_n) міститься нескінченна кількість 1, то ряд (11) містить нескінченну кількість як додатних, так і від'ємних членів. Після вилучення нульових членів ряду (11) він стане знакозмінним (почережним), причому члени з непарними номерами додатні, а з парними – від'ємні. □

Теорема 4.1. *Для будь-якого числа* $x \in [0;1]$ *існує послідовність* $(\alpha_n) \in L_2$*, така, що*

$$x = \delta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} (\delta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j}) \equiv \Delta_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k...}. \qquad (12)$$

Доведення. Для $x = 0$ маємо $x = \Delta_{(0)}$. Круглі дужки символізують період. Для $x = g_0$ маємо $g_0 = \Delta_{1(0)}$.

Нехай $x \in (0; g_0)$, але $(0; g_0) = (\delta_0; \delta_1 g_0] \cup [\delta_1 g_0; \delta_1)$, $\delta_1 g_0 = g_0^2$.

Якщо $x = g_0^2$, то $x = \Delta_{01(0)} = \Delta_{11(0)}$. Якщо $x \neq g_0^2$, то очевидно, що існує $\alpha_1 \in \{0; 1\}$, таке, що $x \in (\delta_1 g_0; \delta_1) = (g_0^2; g_0)$, тобто $x = \delta_{\alpha_1} + x_1$, причому x_1 є від'ємним або додатним, а саме:

1) $g_0 g_1 < x_1 < 0$, якщо $\alpha_1 = 1$;

2) $0 < x_1 \equiv x < g_0^2$, якщо $\alpha_1 = 0$.

Розглянемо перший випадок, тобто

$$g_0 g_1 \neq x_1 \in [g_0 g_1; 0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [g_1 g_0^n; g_1 g_0^{n+1}).$$

Тоді існує $k_1 \in N$, таке, що $g_1 g_0^{k_1} < x_1 < g_1 g_0^{k_1+1}$, звідки

$$0 < x_1 - g_1 g_0^k \equiv x_2 < g_1^2 g_0^{k_1},$$

$$x_1 = g_1 g_0^{k_1} + x_2$$

і

$$x = \delta_1 + \delta_1 g_1 g_0^{k_1} + x_2 = \delta_1 g_0^{1-1} + \delta_1 g_1 g_0^{1+k_1-1} + x_2.$$

Розглянемо тепер випадок, коли $\alpha_1 = 0$, тобто $x_1 \in (0; g_0^2)$.

Оскільки $g_0^2 \neq x_1 \in (0; g_0^2] = \bigcup\limits_{n=2}^{\infty} (g_0^{n+1}; g_0^n]$, то очевидно, що існує натуральне $m_1 \geq 2$, таке, що

$$g_0^{m_1+1} < x_1 \leq g_0^{m_1}.$$

Якщо $x_1 = g_0^{m_1} = \delta_1 g_0^{m_1-1} = \delta_0 + \delta_0 g_0 + ... + \delta_0 g_0^{m_1-2} + \delta_1 g_0^{m_1-1}$, то $\alpha_2 = \alpha_3 = ... = \alpha_{m_1-1} = 0 = \alpha_1$ і $\alpha_{m_1} = 1$, а отже,

$$x = x_1 = \Delta_{\underbrace{0..0}_{m_1-1}1(0)} = \Delta_{\underbrace{0..0}_{m_1-1}11(0)}.$$

Якщо ж $g_0^{m_1+1} < x_1 < g_0^{m_1}$, то $g_0^{m_1} g_1 < x_1 - g_0^{m_1} \equiv x_2 < 0$

$$x = x_1 = g_0^{m_1} + x_2 = \delta_1 g_0^{m_1-1} = \delta_0 + \delta_0 g_0 + ... + \delta_0 g_0^{m_1-2} + \delta_1 g_0^{m_1-1} + x_2.$$

Оскільки

$$g_0^{m_1} g_1 \neq x_2 \in [g_0^{m_1} g_1; 0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [g_1 g_0^{m_1+n-1}; g_1 g_0^{m_1+n}),$$

то існує натуральне m_2 таке, що $g_1 g_0^{m_1+m_2-1} \leq x_2 \leq g_1 g_0^{m_1+m_2}$ і $x_2 = g_1 g_0^{m_1+m_2-1} + x_3$, де $0 \leq x_2 - g_1 g_0^{m_1+m_2-1} \equiv x_3 < g_1^2 g_0^{m_1+m_2-1}$.

Тоді

$$x = x_1 = \delta_1 g_0^{m_1-1} + g_1 g_0^{m_1+m_2-1} + x_3 = \delta_1 g_0^{m_1-1} + \delta_1 g_0^{m_1+m_2}.$$

Якщо $x_3 = 0$, то $x_2 = g_1 g_0^{m_1+m_2}$ і
$x = x_1 = \delta_1 g_0^{m_1-1} + g_1 g_0^{m_1+m_2-1} = \Delta_{\underbrace{0...0}_{m_1-1}1\underbrace{0...0}_{m_2-1}1(0)} = \Delta_{\underbrace{0...0}_{m_1-1}1\underbrace{0...0}_{m_2-1}11(0)}$

За скінченну кількість кроків отримаємо $x_k = 0$ або ж процес продовжуватиметься до нескінченності, його збіжність очевидна. $\square$

Означення 4.1. Зображення $\Delta_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}$ числа $x \in [0; g_0]$, встановлене рівністю (12), називається Δ-зображенням (або циліндричним Δ-зображенням).

Зауваження 4.1. Як видно з доведення попередньої теореми, існують числа, що мають два Δ-зображення.

Інтерес до даного зображення обумовлений однією зі проблем, пов'я- заною зі встановленням лебегівської структури розподілу значень неперервної функції канторівського типу, яка не має проміжків монотонності крім проміжків сталості (їй присвячена робота [4]).

5 Геометрія циліндричного Δ-зображення

Означення 5.1. Циліндром рангу m з основою $c_1c_2...c_m$ називається множина $\Delta_{c_1c_2...c_m}$ всіх чисел $x \in [0; g_0]$, які мають таке Δ-зображення $x = \Delta_{c_1c_2...c_m\alpha_{m+1}\alpha_{m+2}...\alpha_{m+k}...}$, $\alpha_{m+j} \in A$.

Циліндри 1-го рангу: $\Delta_0 = [0; g_0^2]$; $\Delta_1 = [g_0^2; g_0]$;

Циліндри 2-го рангу: $\Delta_{00} = [0; g_0^3]$, $\Delta_{01} = [g_0^3; g_0^2]$;

$\Delta_{11} = [g_0^2; g_0(1 + g_0g_1)], \Delta_{10} = [g_0(1 + g_0g_1); g_0]$;

Циліндри 3-го рангу: $\Delta_{000} = [0; g_0^4], \Delta_{001} = [g_0^4; g_0^3]$;

$\Delta_{011} = [g_0^3; g_0^2(1 + q_1^2)]$, $\Delta_{010} = [g_0^2(1 + g_1^2); g_0^2]$;

$\Delta_{110} = [g_0^2; g_0^2(1 + g_1^2)]$, $\Delta_{111} = [g_0^2(1 + g_1^2); g_0(g_0 + g_1^2)]$;

$\Delta_{101} = [g_0(1 + g_1g_0); g_0(1 + g_0^2g_1)]$, $\Delta_{100} = [g_0(1 + g_0^2g_1); g_0]$.

Нехай $(c_1, c_2, ..., c_m)$ — довільний набір нулів і одиниць, $N_1 = c_1 + c_2 + ... + c_m$, $N_0 \equiv m - N_1$, $a = \delta_{c_1} + \sum\limits_{k=2}^{m} (\delta_{c_k} \prod\limits_{j=1}^{k-1} g_{c_j})$, $b = a + g_0 \prod\limits_{j=1}^{m} g_{c_j}$.

Легко довести наступне твердження.

Лема 5.1. *Циліндр $\Delta_{c_1c_2...c_m}$ є відрізком, причому*
$[a; b]$, *якщо* N_1 *— парне,*
$[b; a]$, *якщо* N_1 *— непарне.*

Наслідок 5.1. *Довжина циліндра $\Delta_{c_1c_2...c_m}$ обчислюється за формулою*

$$|\Delta_{c_1c_2...c_m}| = g_0 \prod_{j=1}^{m} |g_{c_j}| = (-g_1)^{N_1} g_0^{m-N_1+1},$$

де $N_1 = c_1 + c_2 + \ldots + c_m$.

Наслідок 5.2. *Основне метричне відношення для Δ–зображення дійсних чисел із відрізка $[0; g_0]$ має вигляд*

$$\frac{|\Delta_{c_1c_2...c_mi}|}{|\Delta_{c_1c_2...c_m}|} = |g_i|.$$

Циліндри мають властивості:

1. $\Delta_{c_1c_2\ldots c_m} = \Delta_{c_1c_2\ldots c_m0} \cup \Delta_{c_1c_2\ldots c_m1}$, причому
   $\max\Delta_{c_1c_2\ldots c_m0} = \min\Delta_{c_1c_2\ldots c_m1}$, якщо N_1 — парне;
   $\max\Delta_{c_1c_2\ldots c_m1} = \min\Delta_{c_1c_2\ldots c_m0}$, якщо N_1 — непарне.
2. $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \Delta_{c_1c_2\ldots c_m} = x \in [0; g_0]\ \forall(c_m \in L_2)$.

Властивості циліндрів розкривають геометричну суть цифр Δ-зображення чисел і виправдовують вибір терміну циліндричне Δ-зображення.

6 Оператор лівостороннього зсуву цифр Δ–зображення чисел

Теорема 6.1. *Оператор ω лівостороннього зсуву цифр Δ–зображення чисел відрізка $[0; g_0]$, який у просторі Δ-зображень визначється рівністю*

$$\omega(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}, \tag{13}$$

аналітично задається

$$\omega(x) = \frac{1}{g_{\alpha_1(x)}}x - \frac{\delta_{\alpha_1(x)}}{g_{\alpha_1(x)}}, \tag{14}$$

є неперервною коректно означеною на $[0; g_0]$ функцією, що є лінійною на кожному з циліндрів першого рангу, причому зростаючою на Δ_0 і спадною на Δ_1.

Доведення. Оскільки

$$x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} = \delta_{\alpha_1} + g_{\alpha_1}\left(\delta_{\alpha_2} + \sum_{k=3}^{\infty}\delta_{\alpha_k}\prod_{j=2}^{k-1}g_{\alpha_j}\right) = \delta_{\alpha_1} + g_{\alpha_1}\omega(x),$$

то виконується рівність (14). Враховуючи, що

$$g_{\alpha_1} = \begin{cases} g_0 > 0 & \text{при} \quad \alpha_1 = 0 \ \Leftrightarrow \ x \in \Delta_0; \\ g_1 < 0 & \text{при} \quad \alpha_1 = 1 \ \Leftrightarrow \ x \in \Delta_1; \end{cases}$$

лінійність і монотонність функції ω на циліндрах першого рангу стає очевидною. Коректність означення і неперервність ω є наслідком рівностей $\omega(g_0^2) = \omega(\Delta_{01(0)}) = \omega(\Delta_{11(0)}) = \Delta_{1(0)} = g_0$. □

Інваріантними точками оператора лівостороннього зсуву цифр ω є $0 = \Delta_{(0)}$ і $\Delta_{(1)} = g_0 + g_0 g_1 + g_0 g_1^2 + ... = \frac{g_0}{2+g_0}$.

Зауваження 6.1. Теорема 6.1 засвідчує суттєву відмінність Δ–зображення від інших відомих двосимвольних зображень, зокрема Q_2–зображення, $\tilde{Q}$–зображення [11] та ланцюгового A_2–зображення.

Теорема 6.2. *Інваріантною мірою оператора ω лівостороннього зсуву цифр Δ–зображення чисел є міра μ_τ, що відповідає розподілу неперервної випадкової величини $\tau = \Delta_{\tau_1 \tau_2, ..., \tau_n, ...}$, цифр (τ_n) Δ–зображення якої є незалежними й однаково розподіленими, які набувають значень $P\{\tau_n = 0\} = p_0, \quad P\{\tau_n = 1\} = p_1, \;\; 0 < p_0 < 1$.*

Доведення. Будь-яка борелівська підмножина відрізка $[0; g_0]$ як завгодно точно може бути наближена об'єднанням циліндрів. Оскільки міра μ_τ неперервна, то вона однозначно визначається значеннями на циліндричних множинах, а саме:

$$\mu_\tau(\Delta_{c_1 c_2 ... c_n}) = p_0^{N_0} p_1^{N_1}, N_1 = c_1 + c_2 + ... + c_n, N_0 \equiv n - N_1.$$

Тому достатньо довести, що $\mu_\tau(\omega^{-1}) = \mu_\tau$. Для цього виразимо

$$\omega^{-1}(\Delta_{c_1 c_2 ... c_n}) = \Delta_{0 c_1 c_2 ... c_n} \cup \Delta_{1 c_1 c_2 ... c_n}.$$

$$\begin{aligned} \mu_\tau(\omega^{-1}(\Delta_{c_1 c_2 ... c_n})) = & \mu_\tau(\Delta_{0 c_1 c_2 ... c_n} \cup \Delta_{1 c_1 c_2 ... c_n}) = \\ = & p_0 p_0^{N_0} p_1^{N_1} + p_0^{N_0} p_1 p_1^{N_1} = \\ = & p_0^{N_0} p_1^{N_1} (p_0 + p_1) = p_0^{N_0} p_1^{N_1} = \mu_\tau(\Delta_{c_1 c_2 ... c_n}). \end{aligned}$$

Отже, μ_τ є інваріантною мірою оператора ω. □

Теорема 6.3. *Якщо (τ_n) — послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, які набувають значень 0 і 1 з ймовірностями p_0 і p_1, тобто $P\{\tau_n = i\} = p_i, \quad 0 < p_i < 1, i = 0, 1$, то розподіл випадкової величини $\tau = \Delta_{\tau_1 \tau_2 ... \tau_n ...}$ є рівномірним при $p_0 = g_0$ і сингулярно неперервним при $p_0 \neq g_0$.*

Доведення. Згідно з теоремою Лебега кожна неперервна монотонна функція майже скрізь у розумінні міри Лебега має скінченну похідну.

Якщо в точці x_0 похідна існує, то вона обчислюється за формулою

$$F'_\tau(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{P\{\tau \in \Delta_{\alpha_1(x_0)\alpha_2(x_0)\ldots\alpha_n(x_0)}\}}{|\Delta_{\alpha_1(x_0)\alpha_2(x_0)\ldots\alpha_n(x_0)}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{p_0^{N_0} p_1^{N_1}}{g_0 \prod\limits_{j=1}^{n} |g_{c_j}|} =$$

$$= \frac{1}{g_0} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{p_0^{\frac{N_0}{n}} p_1^{\frac{N_1}{n}}}{g_0^{\frac{N_0}{n}} |g_1|^{\frac{N_1}{n}}} \right)^n = \frac{1}{g_0} \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{p_0}{g_0}\right)^{\frac{N_0}{n}} \left(\frac{p_1}{|g_1|}\right)^{\frac{N_1}{n}} \right]^n =$$

$$= \frac{1}{g_0} \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{p_0}{g_0}\right)^{\nu_0} \left(\frac{p_1}{|g_1|}\right)^{\nu_1} \right]^n,$$

де $N_1 = \alpha_1(x_0) + ... + \alpha_n(x_0)$, $N_0 = n - N_1$, $\nu_1(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{N_1(x,n)}{n}$, $\nu_0(x) = 1 - \nu_1(x)$, $N_1(x,n) = \alpha_1(x) + ... + \alpha_n(x)$.

Можна довести (це робиться аналогічно до міркувань і висновків, наведених у роботі для Q_2-зображення) таке твердження: для майже всіх $x = \Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots} \in [0; g_0]$ у розумінні міри Лебега виконуються рівності: $\nu_0(x) = g_0$, $\nu_1(x) = g_1$. Тому для x_0, що належить множині повної міри Лебега, для кожної точки якої існує скінченна похідна і $\nu_0(x_0) = g_0$, $\nu_1(x_0) = g_1$ маємо $F'(x_0) = 0$, оскільки при $p_0 \neq g_0$ виконується $\frac{p_0^{g_0} p_1^{|g_1|}}{g_0^{g_0} |g_1|^{g_1}} < 1$. Отже, при $p_0 \neq g_0$ функція розподілу F_τ є сингулярною (її похідна майже скрізь дорівнює нулю).

Якщо $p_0 = g_0$, то

$$P\{\tau \in \Delta_{c_1 c_2 \ldots c_m}\} = p_0^{N_0} p_1^{N_1} = g_0^{N_0} |g_1|^{N_1} = \frac{1}{g_0} |\Delta_{c_1 c_2 \ldots c_m}|,$$

тобто розподіл τ на $[0; g_0]$ є рівномірним. □

[1] Працьовитий М.В. Геометрія класичного двійкового зображення дійсних чисел. — Київ: Вид-во НПУ ім. М.П. Драгоманова. — 2012. — 68с.

[2] Працьовитий М.В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ ім. М.П. Драгоманова. — 1998. — 296с.

[3] Маркітан В. П., Працьовитий М. В., Савченко І. О. Суперфрактальність множини неповних сум одного додатного ряду // Український математичний журнал. — 2018. — Т. 70, №10. — С. 1403–1416.

[4] Працьовитий М.В., Свинчук О.В. Розсіювання значень однієї фрактальної неперервної немонотонної функції канторівського типу // Нелінійні коливання. — 2018. — Т.21, №1. — С. 116–130.

[5] Дмитренко С.О., Кюрчев Д.В., Працьовитий М.В. Ланцюгове A_2-зображення дійсних чисел та його геометрія // Український математичний журнал. — 2009. — Т. 61, №9. — С. 452-463.

[6] Василенко Н.М. Фібоначчієві подання дійсних чисел // Наук. часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: Вид-во НПУ ім. М.П. Драгоманова. — 2005. — № 6. — С. 261-271.

[7] Працьовитий О.М. Про один специфічний спосіб кодування дійсних чисел та його застосування // Студентські фізико-математичні етюди. — Київ: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2008. — № 7. — С. 57–67.

[8] Працевитый Н.В. Случайные величины с независимыми Q_2-символами // Асимптотические методы в исследовании стохастических моделей. — Киев: Ин-т математики АН УССР. — 1987. — С. 92–102.

[9] Працевитый Н.В., Торбин Г.М. Случайные величины с независимыми Q^*-знаками // Случайные эволюции: теоретические и прикладные задачи. — Киев: Ин-т математики АН Украины. — 1992. — С. 95–104.

[10] Працевитий М.В. Фрактальні властивості розподілів випадкових величин, Q_2-знаки яких утворюють однорідний ланцюг Маркова // Асимптотичний аналіз випадкових еволюцій. — Київ: Ін-т математики АН України. — 1994. — С. 249–254.

[11] Працевитый Н.В. Поліосновне $\tilde{Q}$-представлення і фрактальні математичні об'єкти з ним пов'язані // Фрактальний аналіз та суміжні питання. — Київ: IM НАН України – НПУ імені М.П. Драгоманова. — 1998. — № 2. — С. 14–35.

[12] Працьовита I.М., Задніпряний М.В. Розклади чисел в ряди Сільвестра та їх застосування // Наук. часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова. — 2009. — № 10. — С. 174–189.

[13] Galambos J. Representations of real numbers by infinite series // Lecture Notes in Mathematics. — vol. 502 (E. D. Itor, ed.),— Springer, Berlin, — 1976.

[14] Kakeya S. On the partial sums of an infinite series // Tôhoku Sci Rep. — 1914. — 3, no. 4. — P. 159–164.

[15] Nymann J. E., Sáenz R. A. On the paper of Guthrie and Nymann on subsums of infinite series // Colloq. Math.— 2000. — 83. — P. 323–327.

[16] Schweiger F. Ergodic theory of fibred system and metric number theory // Oxford Sci.Publ., (E. D. Itor, ed.).— Oxford Univ. Press, — New York, — 1995. — 295 p.