

Собственные колебания жидкости в тороидальных баках*

А.В. Солодун

*Институт математики НАН Украины, Киев;
solodun@imath.kiev.ua*

A variational Ritz-Trefftz method for constructing an approximate solution of a spectral problem describing free oscillations of an ideal fluid in toroidal tanks is developed. A complete family of particular solutions of polynomial type are adopted as a functional basis. The natural frequencies and modes in the considered cavity over a wide range of geometric parameters are calculated.

Розвинуто варіаційний метод Рітца-Трефтца побудови наближеного розв'язку спектральної задачі, що описує вільні коливання ідеальної рідини в резервуарах у формі тороїдальних баків. В якості координатного базису виступає повне сімейство частинних розв'язків поліноміального типу. Пораховано власні частоти і форми коливань у розглядуваній порожнині в широкому діапазоні геометричних параметрів.

Введение

При проектировании конструкций, имеющих в своём составе значительные массы жидких грузов, возникает целый комплекс проблем, связанных с их прочностью и устойчивостью. Основными здесь становятся проблемы определения частот и форм свободных колебаний жидкости. Эти силы играют важную роль при составлении уравнений движения механической системы в целом и прогнозирования на их основе динамического поведения конструкций при воздействии на неё различных внешних возмущающих факторов (вибрационного, сейсмического и прочего характера).

Традиционно эти проблемы возникают в авиационной и ракетно-космической технике. С ними приходится сталкиваться при создании танкеров для транспортировки нефтепродуктов и сжиженных газов,

*Работа выполнена при частичной поддержке НИР № 0117U004077

а также при исследовании прочности и устойчивости железнодорожных цистерн. В последние годы исследования по динамике твёрдых тел с жидкостью пополнились новыми постановками задач в связи с проектированием новых морских жидкостно-наполненных механических объектов в виде рыбных ферм. Эти исследования направлены на обеспечение их надёжного функционирования в экстремальных условиях.

В общем случае не существует точных методов решения задачи о колебаниях жидкости в тороидальных баках. Главным образом, для нахождения приближённых собственных частот и форм колебаний опираются на методы конечных и граничных элементов. Существует ряд экспериментальных работ, исследующих колебания в тороидальных полостях [14, 15].

Следует отметить, что в данном случае удаётся использовать метод разделения переменных для решения задач о колебаниях жидкости в тороидальных баках, оставаясь в рамках гипотез линейной теории. Методом разделения переменных решения задачи удаётся представить через степенные функции и присоединённые функции Лежандра первого и второго рода. Об особенностях применения этих результатов в теории движения тел с жидкостью речь идёт в работах [1, 5, 8, 9, 13] и др. К этой задаче может быть применима также методология нахождения решений в случае полостей с невертикальными стенками работ [2, 3, 6, 7, 12, 17, 18].

В настоящей работе обсуждается численно-аналитический метод определения частот и форм собственных колебаний жидкости в тороидальных резервуарах, основанных на вариационных формулировках соответствующих краевых задач. В качестве координатных функций в вариационном методе Ритца-Трефтца используются классические гармонические функции (полиномы).

Метод численно реализован в широком диапазоне геометрических параметров тороидальных полостей. Результаты вычислительных экспериментов поданы в виде таблиц и графических зависимостей. Они доставляют полное представление о практической сходимости предложенного метода и границах его применимости. Приближённые решения найдены в аналитическом виде, пригодном для их использования при построении малоразмерных нелинейных модальных систем методами работ [10, 11, 16, 18].

1 Постановка задачи

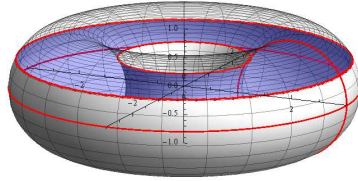


Рис 1. Гидростатическое положение жидкости в тороидальных баках.

Рассмотрим безвихревые волновые движения идеальной несжимаемой жидкости, частично заполняющей покоящийся абсолютно жёсткий бак тороидального типа, размещённый в горизонтальной плоскости, как показано на рис. 1. Ось вращения тора совпадает с осью Ox . Здесь через R обозначен радиус от центра тора до центра образующей, а через r – радиус образующей окружности. Вектор ускорения сил гравитации \vec{g} направлен вниз вдоль оси тора.

Гидростатическое положение жидкости под действием сил тяжести совпадает с областью Q_0 , изображённой на рисунке. Смачиваемые стенки сосуда S , при этом невозмущённая свободная поверхность жидкости, обозначенная через Σ_0 , совпадает с плоскостью изображённой на рисунке голубым цветом. Начало декартовой системы координат $Oxyz$ размещено в центре тора O , причём ось Ox направлена вертикально вверх.

В качестве характерного линейного размера выбран радиус образующей окружности тора r . Соотношение радиусов $\delta_R = r/R$ ($R \geq r$) становится геометрической характеристикой бака, а соотношение δ_H к удвоенному радиусу r тогда будет характеристикой заполнения бака ($\delta_H = h/2r$). В частности, предел $H \rightarrow 0$ влечёт к нулевому объёму бака, а при $H \rightarrow 1$ бак стремится к тороидальной полости.

Как известно [5, 13], линеаризованная задача о малых свободных колебаниях жидкости в покоящемся сосуде имеет следующий вид:

$$\Delta\phi = 0 \text{ в } Q_0, \quad \frac{\partial\phi}{\partial\nu} = 0 \text{ на } S, \quad \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial t} + gf = 0 \text{ на } \Sigma_0 \quad (1)$$

при дополнительном условии $\int_{\Sigma_0} \frac{\partial\phi}{\partial x} dS = 0$, где $\phi(x, y, z, t)$ – потен-

циал скоростей, $x = f(y, z, t)$ – уравнение возмущённой свободной поверхности, $\vec{\nu}$ – орт внешней нормали к границе S , g – ускорение сил тяжести. Кроме этого, общая постановка эволюционной краевой задачи (1) предполагает подчинения её решений начальным условиям

$$f(y, z, t_0) = F_0(y, z), \quad \frac{\partial f}{\partial t}(y, z, t_0) = F_1(y, z), \quad (2)$$

где некоторые известные функции F_0 и F_1 задают начальное отклонение свободной поверхности жидкости и распределение скоростей на ней в начальный момент времени $t = t_0$.

Путём дифференцирования последнего условия по t два условия на Σ_0 задачи (1) обычно заменяют одним и сводят задачу (1) к рассмотрению следующей краевой задачи:

$$\Delta\phi = 0 \text{ в } Q_0, \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\phi}{\partial x} = 0 \text{ на } \Sigma_0, \quad \frac{\partial\phi}{\partial\nu} = 0 \text{ на } S. \quad (3)$$

2 Задача о собственных колебаниях и соответствующая ей спектральная задача

Практический интерес представляет задача о собственных гармонических колебаниях жидкости.

Собственные колебания жидкости (стоячие волны) описываются в этом случае решениями задачи (1) вида

$$\phi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) \exp(i\sigma t), \quad i^2 = -1, \quad (4)$$

причём частота собственных колебаний σ и соответствующая ей форма (мода) $\psi(x, y, z)$ определяется как решения следующей базовой спектральной задачи:

$$\Delta\psi = 0 \text{ в } Q_0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x} = \varkappa\psi \text{ на } \Sigma_0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\nu} = 0 \text{ на } S, \quad \int_{\Sigma_0} \frac{\partial\psi}{\partial x} dS = 0, \quad (5)$$

где параметр \varkappa , именуемый в этом классе задач частотным параметром, определяется соотношением $\varkappa = \sigma^2/g$. Для задачи на собственные значения (5) существует бесконечная последовательность собственных значений \varkappa_n ($0 < \varkappa_1 \leq \varkappa_2 \leq \dots \leq \varkappa_n \leq \dots$), сходящаяся на бесконечности ($\varkappa_n \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$), и каждому собственному значению \varkappa_n соответствует конечное число собственных функций $\psi_n(x, y, z)$ [5, 13]. Тот факт, что система собственных функций

ψ_n задачи (5) образует на невозмущённой свободной поверхности Σ_0 вместе с константой полную систему функций, играет в теории колебаний жидкости фундаментальную роль.

Задача на собственные значения с параметром в граничном условии (5) допускает соответствующую эквивалентную ей вариационную формулировку, связанную с функционалом

$$K(\varphi) = \int_{Q_0} (\nabla\psi)^2 dQ \bigg/ \int_{\Sigma_0} \psi^2 dS, \quad (6)$$

определённом на классе функций $\psi \in W_2^1(Q_0)$ при дополнительном условии $\int_{\Sigma_0} \psi dS = 0$.

В соответствии с общей схемой, изложенной в работах [5, 13], вариационная задача на минимум для функционала (6) позволяет последовательно определить все собственные числа и собственные функции задачи (5), обладающие свойствами обобщённых решений в смысле интегрального соотношения

$$\int_{Q_0} (\nabla\psi_n, \nabla\eta) dQ - \varkappa_n \int_{\Sigma_0} \psi_n \eta d\Sigma_0 = 0$$

при любой функции $\eta \in W_2^1(Q)$.

В соответствии с общей схемой Ритца-Трефтца для первого собственного значения \varkappa_1 и собственной функции ψ_1 имеем $\varkappa_1 = \min F(\psi)$, ($\psi \in W_2^1(Q)$) при условии $\int_{\Sigma_0} \psi^2 d\Sigma_0 = 1$, а для последующих собственных значений имеем $\varkappa_n = \min F(\psi)$, ($\psi \in W_2^1(Q)$) при том же условии и дополнительных условиях ортогональности $\int_{\Sigma_0} \psi \psi_k d\Sigma_0 = 0$ ($k = 1, \dots, n-1$).

К решению вариационной задачи применим метод Ритца. Систему координатных функций выбираем в пространстве $W_2^1(Q)$ при условии полноты и линейной независимости её элементов. Приближённые решения ищем в виде линейной комбинации

$$\psi_n = \sum_{k=1}^q a_k w_k, \quad w_k \in W_2^1(Q). \quad (7)$$

Для определения коэффициентов a_k из условия минимума функцио-

нала $K(\psi)$ (6) получаем систему Ритца

$$\sum_{k=1}^q a_k (\alpha_{ik} - \varkappa \beta_{ik}) = 0, \quad i, k = 1, \dots, q, \quad (8)$$

где

$$\alpha_{ik} = \int_{Q_0} (\nabla w_i, \nabla w_k) dQ, \quad \beta_{ik} = \int_{\Sigma_0} w_i w_k d\Sigma_0.$$

Приближённые значения собственных чисел \varkappa_n определяем из уравнения

$$\det|\alpha_{ik} - \varkappa \beta_{ik}| = 0, \quad (9)$$

которое представляет собой необходимое условие разрешимости системы линейных алгебраических уравнений (8).

2.1 Частные решения полиномиального типа

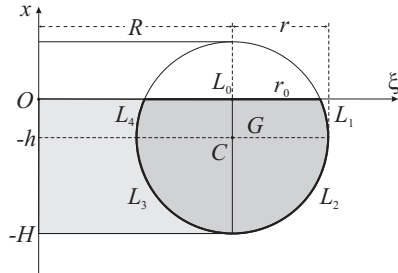


Рис 2. Меридиональное сечение.

Перейдём к цилиндрической системе координат (X, ξ, η)

$$x = X + X_0, \quad y = \xi \cos \eta, \quad z = \xi \sin \eta \quad (10)$$

(сдвиг вдоль вертикальной оси X_0 подобран таким образом, чтобы начало цилиндрической системы совпадало с центром невозмущённой свободной поверхности) и представим решение задачи (5) в виде:

$$\psi(x, y, z) = \varphi_m(X, \xi) \frac{\sin m\eta}{\cos m\eta}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

Неизвестные функции $\varphi_m(X, \xi)$ определяются как решения двумерных краевых спектральных задач

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X} \left(\xi \frac{\partial \varphi_m}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial \varphi_m}{\partial \xi} \right) - \frac{m^2}{\xi} \varphi_m = 0 \text{ в } G, \quad \frac{\partial \varphi_m}{\partial \nu} = 0 \text{ на } L, \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial X} = \varkappa_m \varphi_m \text{ на } L_0, \quad |\varphi_m(X, 0)| < \infty, \quad \int_{L_0} \xi \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} d\xi = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

сформулированных в меридиональном сечении области Q_0 (обозначения даны на рис. 2), здесь $L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4$. Совокупность собственных значений исходной трёхмерной задачи становится при этом двухпараметрическим множеством \varkappa_{mi} , где индекс i обозначает номер собственного значения задачи (12) при фиксированном значении m . Соответствующие собственные функции исходной задачи представляются в виде (11), где вместо φ_m следует теперь понимать собственную функцию φ_{mi} , соответствующую собственному значению \varkappa_{mi} ($i = 1, 2, \dots$).

Существует ряд приёмов построения частных решений двумерного в области G уравнения задачи (12). Наиболее интересными и важными для практических целей представляются решения полиномиального типа, полученные благодаря представлению 4, 5, 13

$$\begin{aligned} w_k^{(m)}(X, \xi) &= \frac{2(k-m)!}{(k+m)!} R^k P_k^{(m)}(\mu), \\ w_k^{*(m)}(X, \xi) &= \frac{2(k-m)!}{(k+m)!} R^k Q_k^{(m)}(\mu), \\ R &= \sqrt{X^2 + \xi^2}, \quad \mu = \cos \eta, \quad k \geq m, \end{aligned} \quad (13)$$

где $P_k^{(m)}(\mu)$, $Q_k^{(m)}(\mu)$ – присоединённые функции Лежандра первого и второго рода соответственно. В общем случае для задачи (12) существует четыре типа частных решений $w_k^{(m)}$, $w_k^{*(m)}$, $\bar{w}_k^{(m)}$, $\bar{w}_k^{*(m)}$ 5. Однако за счёт геометрии рассматриваемой полости и выбора начала системы координат для получения решения базисной задачи с достаточной точностью можно ограничиться лишь двумя из них $w_k^{(m)}$, $w_k^{*(m)}$. Частные решения $w_k^{(m)}$, $w_k^{*(m)}$, будучи подставленными в формулу (11), приводят к системам гармонических по совокупности переменных x, y, z полиномам различных порядков однородности 5. Легко проверить, что (13) действительно имеют полиномиальную структуру относительно переменных X и ξ , причём каждый

такой полином содержит лишь члены порядка k . Первые функции из семейства (13) ($m = 0$) имеют вид

$$w_0^{(0)} = 1, \quad w_1^{(0)} = X, \quad w_2^{(0)} = X^2 - \frac{\xi^2}{2};$$

$$w_0^{*(0)} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{\xi^2 + X^2} + X}{\sqrt{\xi^2 + X^2} - X} \right),$$

$$w_1^{*(0)} = \frac{1}{2} X \ln \left(\frac{\sqrt{\xi^2 + X^2} + X}{\sqrt{\xi^2 + X^2} - X} \right) - \sqrt{\xi^2 + X^2},$$

$$w_2^{*(0)} = \left(\frac{X^2}{2} - \frac{\xi^2}{4} \right) \ln \left(\frac{\sqrt{\xi^2 + X^2} + X}{\sqrt{\xi^2 + X^2} - X} \right) - \frac{3}{2} X \sqrt{\xi^2 + X^2}.$$

Частные решения $w_k^{(m)}$ высших по m и k порядков могут быть вычислены при помощи известных рекуррентных соотношений

$$\frac{\partial w_k^{(m)}}{\partial X} = (k - m) w_{k-1}^{(m)},$$

$$\xi \frac{\partial w_k^{(m)}}{\partial \xi} = k w_k^{(m)} - (k - m) X w_{k-1}^{(m)},$$

$$(k - m + 1) w_{k+1}^{(m)} = (2k + 1) X w_k^{(m)} - (k - m) (X^2 + \xi^2) w_{k-1}^{(m)},$$

$$(k - m + 1) \xi w_k^{(m+1)} = 2(m + 1) \left((X^2 + \xi^2) w_{k-1}^{(m)} - X w_k^{(m)} \right).$$

Для частных решений $w_k^{*(m)}$ справедливы те же рекуррентные соотношения, необходимо лишь подставить вместо $w_k^{(m)}$ функции $w_k^{*(m)}$ в вышеприведённых формулах.

2.2 Вариационный метод решения задачи (12).

Приближённый метод решение спектральной задачи (12) методом Ритца-Грефтца связан с ее вариационной формулировкой с использованием функционала [4, 5, 13]

$$\mathcal{J}_m(\varphi_m) = \int_G \left[\xi \left(\frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial \xi^2} \right) + \frac{m^2}{\xi} \varphi_m^2 \right] dX d\xi - \varkappa_m \int_{L_0} \xi \varphi_m^2 d\xi, \quad (14)$$

при дополнительном условии $\int_{L_0} \xi \varphi_m d\xi = 0$.

В общем случае представим приближённое решение задачи (12) в виде

$$\varphi_m(X, \xi) = \sum_{k=1}^{q_1} a_k^{(m)} w_{k+m-1}^{(m)}(X, \xi) + \sum_{k=1}^{q_2} a_k^{*(m)} w_{k+m-1}^{*(m)}(X, \xi), \quad (15)$$

где $a_k^{(m)}$, $a_k^{*(m)}$ – неизвестные подлежащие определению постоянные. В классе допустимых функций (15) находятся те, которые доставляют функционалу (14) минимальное значение по совокупности параметров $a_k^{(m)}$, $a_k^{*(m)}$. В результате на основе локального условия экстремума

$$\frac{\partial \mathcal{J}_m}{\partial a_{k_1}^{(m)}} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{J}_m}{\partial a_{k_2}^{*(m)}} = 0, \quad k_1 = 1, 2, \dots, q_1, \quad k_2 = 1, 2, \dots, q_2, \quad (16)$$

приходим к матричной спектральной проблеме

$$\det \left(\{ \alpha_{ij}^{(m)} \} - \varkappa_m \{ \beta_{ij}^{(m)} \} \right) = 0, \quad (17)$$

позволяющей определить приближённые собственные значения \varkappa_{mn} и соответствующие им собственные векторы. Вследствие того, что приближённое решение $\varphi_m(X, \xi)$ имеет вид (15), матрицы $\{ \alpha_{ij}^{(m)} \}$ и $\{ \beta_{ij}^{(m)} \}$ приобретают следующую структуру:

$$\alpha_{ij}^{(m)} = \begin{pmatrix} \alpha_{ij1}^{(m)} & \alpha_{ij2}^{(m)} \\ \alpha_{ij3}^{(m)} & \alpha_{ij4}^{(m)} \end{pmatrix}, \quad \beta_{ij}^{(m)} = \begin{pmatrix} \beta_{ij1}^{(m)} & \beta_{ij2}^{(m)} \\ \beta_{ij3}^{(m)} & \beta_{ij4}^{(m)} \end{pmatrix},$$

где элементы матриц $\{ \alpha_{ijk}^{(m)} \}$ и $\{ \beta_{ijk}^{(m)} \}$ ($l = \overline{1, 4}$) вычисляются по формулам

$$\alpha_{ijl}^{(m)} = \int_{R-r_0}^{R+r_0} \left(\xi \frac{\partial \mathcal{W}_{i+m-1,l}^{(m)}}{\partial X} \mathcal{V}_{j+m-1,l}^{(m)} \right)_{X=0} d\xi + \int_{-H}^0 \left(\xi \left(\frac{\partial \mathcal{W}_{i+m-1,l}^{(m)}}{\partial \xi} + \varsigma(x) \frac{\partial \mathcal{W}_{i+m-1,l}^{(m)}}{\partial X} \right) \mathcal{V}_{j+m-1,l}^{(m)} \right)_{\xi=\zeta_+(x)} dX$$

$$+ \int_{-H}^0 \left(\xi \left(-\frac{\partial \mathcal{W}_{i+m-1,l}^{(m)}}{\partial \xi} + \zeta(x) \frac{\partial \mathcal{W}_{i+m-1,l}^{(m)}}{\partial X} \right) \mathcal{V}_{j+m-1,l}^{(m)} \right)_{\xi=\zeta_-(x)} dX,$$

$$\beta_{ijl}^{(m)} = \int_{R-r_0}^{R+r_0} \left(\xi \mathcal{W}_{i+m-1,l}^{(m)} \mathcal{V}_{j+m-1,l}^{(m)} \right)_{X=0} d\xi,$$

при

$$\zeta(x) = \frac{(x+h)}{\sqrt{r^2 - (x+h)^2}}, \quad \zeta_{\pm}(x) = R \pm \sqrt{r^2 - (x+h)^2},$$

где для каждого индекса l в матрицах $\{\alpha_{ijl}^{(m)}\}$ и $\{\beta_{ijl}^{(m)}\}$ в качестве набора пары функций $(\mathcal{W}, \mathcal{V})$ фигурируют указанные ниже пары

$$(\mathcal{W}_{i+m-1,l}, \mathcal{V}_{j+m-1,l}) = \begin{cases} (w_{i+m-1}^{(m)}, w_{j+m-1}^{(m)}), & \text{при } l = 1, \\ (w_{i+m-1}^{(m)}, w_{j+m-1}^{*(m)}), & \text{при } l = 2, \\ (w_{i+m-1}^{*(m)}, w_{j+m-1}^{(m)}), & \text{при } l = 3, \\ (w_{i+m-1}^{*(m)}, w_{j+m-1}^{*(m)}), & \text{при } l = 4. \end{cases}$$

Матричная спектральная задача (17) имеет $q = q_1 + q_2$ собственных значений, что соответствует количеству членов в разложении (15). Как обычно, для каждого фиксированного m собственные значения упорядочены в порядке возрастания.

Для каждого фиксированного значения m уравнения (17) есть алгебраическое уравнение q -го порядка. Оно имеет q положительных корней $\varkappa_{mn}^{(q)}$ ($n = 1, 2, \dots, q$), которые являются приближениями к q первым собственным значениям \varkappa_{mn} ($n = 1, 2, \dots, q$). С ростом q приближённые значения $\varkappa_{mn}^{(q)}$ сходятся сверху к соответствующим значениям \varkappa_{mn} , т.е. $\varkappa_{mn}^{(q)} \geq \varkappa_{mn}$ и $\varkappa_{mn}^{(q)} \rightarrow \varkappa_{mn}$ при $q \rightarrow \infty$. При этом вектор $a_{kn}^{(q)}$ в (15) обеспечивает для собственной функции φ_m сходимость, вообще говоря, лишь в слабом смысле.

2.3 Сходимость

Большинство численных экспериментов фокусировалось на расчёте наиболее важных с практической точки зрения наименьших собственных значений \varkappa_{m1} , $m \geq 0$.

В табл. 14 проиллюстрирована типичная сходимость метода для одной конфигурации тороидальной полости $r = 1$, $R = 2$ при $0 < H < 1$.

Таблица 1. Сходимость \varkappa_{01} для тора с геометрией $r = 1$, $R = 2$ относительно глубины заполнения H .

q	$H = 1/2$	$H = 5/6$	$H = 7/6$	$H = 3/2$	$H = 11/6$
6	1.187794	1.340804	1.554684	1.973546	7.562344
8	1.187053	1.339853	1.552945	1.968312	5.835573
10	1.186957	1.339563	1.552923	1.963316	4.698763
12	1.186934	1.339357	1.552885	1.957812	3.855682
14	1.186877	1.339049	1.552832	1.956738	3.645841
16	1.186875	1.338954	1.552583	1.955663	3.583445
18	1.186867	1.338697	1.552434	1.954828	3.528765
20	1.186862	1.338492	1.552372	1.954248	3.497856
22	1.186858	1.338345	1.552237	1.953862	3.495826
24	1.186835	1.338174	1.552194	1.953337	3.489876
26	1.186776	1.338049	1.552136	1.953174	3.488534
28	1.186768	1.338094	1.551902	1.953124	3.486368
30	1.186760	1.338049	1.551902	1.953001	3.485915

Таблица 2. Сходимость \varkappa_{11} для тора с геометрией $r = 1$, $R = 2$ относительно глубины заполнения H .

q	$H = 1/2$	$H = 5/6$	$H = 7/6$	$H = 3/2$	$H = 11/6$
6	0.092274	0.163118	0.242618	0.343423	0.559949
8	0.090493	0.158862	0.237007	0.337881	0.550184
10	0.090288	0.157704	0.234606	0.334781	0.549353
12	0.090268	0.157568	0.234398	0.334718	0.548129
14	0.090238	0.157565	0.234068	0.334414	0.547972
16	0.090213	0.157559	0.234050	0.333609	0.547063
18	0.090207	0.157531	0.234013	0.333208	0.547055
20	0.090200	0.157507	0.233984	0.333162	0.546865
22	0.090193	0.157482	0.233912	0.333103	0.546750
24	0.090188	0.157479	0.233704	0.333024	0.546747
26	0.090186	0.157469	0.233683	0.332988	0.546584
28	0.090177	0.157291	0.233653	0.332986	0.546271
30	0.090173	0.157142	0.233652	0.332743	0.546056

Хорошо видно, что пять-шесть значащих цифр \varkappa_{m1} стабилизируются уже при $q = 28$. Относительно медленная сходимость наблюдается лишь к частотному параметру \varkappa_{01} , т.е. для осесимметричных форм, а также для \varkappa_{31} . В то же время, для \varkappa_{11} , определяющего минимальную собственную частоту в системе, метод гарантирует высокую точность приближения при относительно небольшом количестве

Таблица 3. Сходимость \varkappa_{21} для тора с геометрией $r = 1$, $R = 2$ относительно глубины заполнения H .

q	$H = 1/2$	$H = 5/6$	$H = 7/6$	$H = 3/2$	$H = 11/6$
6	1.260232	1.474138	1.780775	2.498772	7.349013
8	1.250330	1.442626	1.685458	2.176470	5.119857
10	1.250176	1.442594	1.677703	2.111544	4.665100
12	1.250058	1.442199	1.677449	2.088084	3.770870
14	1.250001	1.441885	1.677270	2.079435	3.697960
16	1.249943	1.441871	1.677250	2.075833	3.546508
18	1.249926	1.441784	1.677226	2.075076	3.535378
20	1.249918	1.441767	1.677216	2.074753	3.526663
22	1.249908	1.441751	1.677206	2.074712	3.518960
24	1.249905	1.441686	1.677039	2.074445	3.453480
26	1.249899	1.441672	1.677032	2.074371	3.435167
28	1.249889	1.441445	1.676637	2.071474	3.428535
30	1.249877	1.441161	1.676634	2.071037	3.419254

Таблица 4. Сходимость \varkappa_{31} для тора с геометрией $r = 1$, $R = 2$ относительно глубины заполнения H .

q	$H = 1/2$	$H = 5/6$	$H = 7/6$	$H = 3/2$	$H = 11/6$
8	2.992210	3.186396	3.949836	7.329782	61.299876
10	2.979368	3.128737	3.575766	5.075837	23.528960
12	2.974901	3.093914	3.403676	4.665894	22.231330
14	2.970124	3.078493	3.364456	4.645642	19.638805
16	2.968666	3.067717	3.361220	4.529287	13.245565
18	2.968482	3.066706	3.325201	4.215477	11.894338
20	2.967255	3.060119	3.321418	4.178164	8.684766
22	2.967067	3.043408	3.319341	4.118428	8.314833
24	2.965296	3.037322	3.317860	4.042001	6.670474
26	2.964449	3.031681	3.275260	3.978168	5.678100
28	2.963802	3.018087	3.274334	3.959143	5.615097
30	2.962755	3.005803	3.259811	3.510003	5.518858

базисных функций.

Замедленная сходимость метода наблюдается также в случае $H \approx 1$. По-видимому, это связано с наличием сингулярности в первых производных собственных функций ψ_m в угловой точке между L_0 и $L_1(L_4)$ (см. результаты Луковского и др. [5] для областей с тупыми угловыми точками).

Пополнение частных решений полиномиального типа функциями,

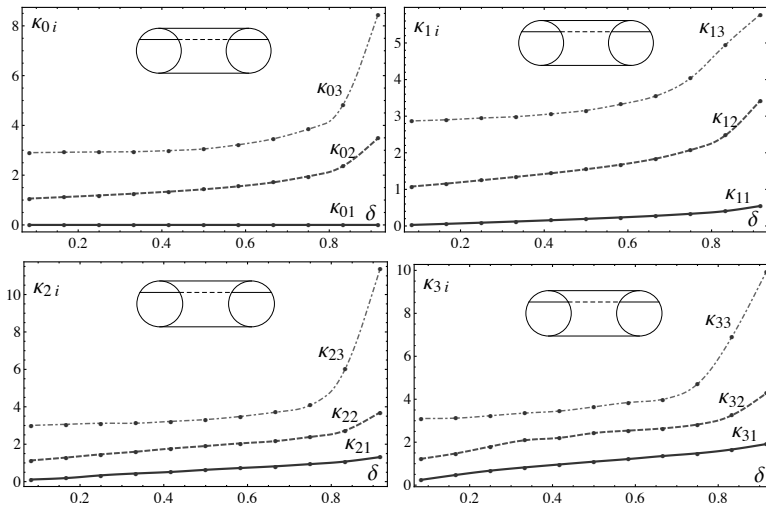


Рис 3. Значения κ_{mi} для одной конфигурации тора $\delta_R = 1/2$ относительно безразмерной глубины заполнения δ_H .

которые отражают сингулярный характер решения около угловых точек области, обычно значительно улучшает сходимость вариационного метода. Примеры таких пополнений для двумерных спектральных задач даны в книге Луковского и др. [5].

3 Анализ

Величины собственных значений κ_{mn} зависят от геометрических параметров бака – радиуса свободной поверхности r_0 , большого R и малого r радиуса тороидальной полости (либо от их соотношений δ_R, δ_H).

Результаты расчётов по определению собственных значений κ_{mn} для тороидальных полостей, проиллюстрированные на рис. 3 показывают, что при стремлении δ_H к нулю собственные значения стремятся к нулю (подобно результатам работы [6]), т.е. объём жидкости почти нулевой, что являет собой типичную физическую картину. При стремлении же δ_H к единице, как видно из рисунка, кривые собствен-

ных значений \varkappa_{mn} возрастают нелинейно, причём чем выше порядковый номер, тем ближе зависимость к экспоненциальной. Величины собственных значений \varkappa_{mn} соотносятся как $\varkappa_{3n} > \varkappa_{2n} > \varkappa_{0n} > \varkappa_{1n}$.

Значения низших собственных частотных параметров \varkappa_{mn} для тороидальных полостей являются актуальными для расчёта реальных конструкций. Реальную размерную величину собственной частоты σ_{mn} можно получить, воспользовавшись формулой

$$\sigma_{mn}^2 = \frac{g \varkappa_{mn}(\delta_R, \delta_H)}{2r_0} \quad (18)$$

и данными из приведённых таблиц, где g , r_0 , R и r размерные.

Также производилось сравнение величин собственных значений в некоторых определённых случаях. Для этого использовались результаты работы [12] по усечённым соосным цилиндрическим полостям. Для сравнения вычислялись частоты для одинакового объёма полостей. Сопоставление выбиралось из условия, что радиус невозмущённой свободной поверхности конической полости принимался равным единице, тогда радиусы тороидальной полости половинного заполнения ($H = r$) принимали значения $R = 2/3$ и $r = 1/3$ ($V_t \approx 0.73$). После, варьируя радиус внутреннего конуса и высоту отсечения конической полости, подбиралась конфигурация равного объёма ($V_c \approx 0.73$), что дало необходимые параметры $\theta_0 = 30^\circ$, $\theta_1 = 10^\circ$, $r_{00} = 1$, $r_{10} \approx 0.8$. Для этого случая первая собственная частота при $m = 1$ для тора половинного заполнения равна $\varkappa_{11}^t = 0.5818$, а для усечённого соосного конуса имеем $\varkappa_{11}^c = 0.6035$. Расхождения по объёму не более процента, а по собственной частоте не более пяти процентов, что представляет достаточно хорошее совпадение и подтверждение достоверности настоящей методики.

4 Выводы

Рассмотрен численно-аналитический метод расчёта собственных частот и форм для тороидальных баков, основанный на вариационном алгоритме Ритца-Трефтца. Метод позволяет построить эффективную координатную систему функций, восходящую к функциям Лежандра первого и второго рода.

Численные данные этой работы сравниваются с результатами работы [12], полученными для конических полостей с малым углом

раствора. Удовлетворительное согласование результатов наблюдается для широкого диапазона полостей.

Результаты работы предполагается использовать для развития нелинейной модальной теории для тороидальных баков.

- [1] Докучаев Л. В., Луковский И. А. Методы определения гидродинамических характеристик подвижного сосуда с перегородками. Изв. АН СССР: МЖГ. — 1968. — № 6. — С. 205–213.
- [2] Луковський І. О. До розв'язування спектральних задач лінійної теорії коливань рідини в конічних баках // Доповіді НАН України. Механіка. — 2002. — № 5. — С. 53–58.
- [3] Луковский И. А. Об одной математической модели волновых движений жидкости в резервуарах с наклонными стенками // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2005. — 2, 1. — С. 227–253.
- [4] Луковский И. А. Математические модели нелинейной динамики твердых тел с жидкостью. Киев: Наук. думка, 2010. — 408 с.
- [5] Луковский И. А., Барняк М. Я., Комаренко А. Н. Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объема жидкости. Киев: Наукова думка, — 1984. — 212 с.
- [6] Луковский И. А., Солодун А. В., Тимоха А. Н. Собственные частоты колебаний жидкости в усеченных конических баках// Акустический вестник. Ин-т гидромеханики НАН Украины. — 2006. — 9, 3. — С. 18–34.
- [7] Луковский И. А., Солодун А. В. Вариационный метод исследования спектральной задачи о собственных колебаниях жидкости в соосных конических резервуарах// Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2013. — 10, 3. — С. 88–112.
- [8] Луковский И. А., Троценко В. А., Фещенко С. Ф. Расчет динамических характеристик жидкости в подвижных полостях. Киев: Академия наук Украинской ССР. — 1968. — 265 с.
- [9] Микишев Г. Н., Рабинович Б. И. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненного жидкостью. Москва: Машиностроение, — 1968. — 532 с.
- [10] Солодун А. В. Нелинейные модальные модели третьего порядка малости, описывающие колебание жидкости в усеченных конических резервуарах// Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2014. — 11, 4. — С. 280–307.
- [11] Солодун А. В. Общая нелинейная математическая модальная модель третьего порядка малости колебаний жидкости в соосных конических

- резервуарах// Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2017. — **14**, № 2. — С. 33–149.
- [12] *Солодун А. В.* Собственные колебания жидкости в усеченных соосных конических баках// Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2018. — **15**, № 1. — С. 180–205.
- [13] *Фещенко С. Ф., Луковский И. А., Рабинович Б. И., Докучаев Л. В.* Методы определения присоединенных масс жидкости в подвижных полостях. Киев: Наукова думка, 1969. — 250 с.
- [14] *Aslam M., Godden W. G., and Scalise D. T.* Sloshing of water in torus pressure-suppression pool of boiling water reactors under earthquake ground motions. Lawrence Berkeley Laboratory: University of California, Berkeley, Ca. LBL-7984, 1978. — 116 p.
- [15] *Mc Carty J. L., Leonard H. W., and Walton W. C.* Experimental investigation of the natural frequencies of liquids in toroidal tanks. Langley Research Center: Langley Field, Va. — NASA TN D-531. — 1960. — 26 p.
- [16] *Gavrilyuk I. P., Lukovsky I. A., Timokha A. N.* Linear and nonlinear sloshing in a circular conical tank// Fluid Dynamics Research. — 2005. — **37**. — P. 399–429.
- [17] *Gavrilyuk I., Hermann M., Lukovsky I., Solodun O., Timokha A.* Natural Sloshing Frequencies in Truncated Conical Tanks// Engineering Computations EC 1224. — 2008. — **25**, 6. — P. 518-540.
- [18] *Lukovsky I. A.* Variational methods of solving dynamic problems for fluid-containing bodies // International Applied Mechanics, — 2004. — **40**, 10. — P. 1092–1128.