Збірник праць Інституту математики НАН України 2018, т. 15, № 1, 7–15

УДК 519.6

Експоненціально збіжний метод для моделювання поширення забруднень від рухомих джерел *

В. Б. Василик, Д. О. Ситник, Н. О. Комащенко

Інститут математики НАН України, Київ;
vasylyk@imath.kiev.ua, sytnik@imath.kiev.ua

An exponentially convergent method is constructed for an approximate solution of the boundary value problem for the convection-diffusion equation, which describes the process of propagation of pollution from moving sources of emission. The method is based on the representation of the solution by means of fundamental solutions and Sinc-quadrature formulas. Test calculations were conducted to simulate the spread of air pollution during the take-off of an airplane.

У статті побудовано експоненціально збіжний метод для наближеного розв'язування крайової задачі для рівняння переносу-дифузії, що описує процес розповсюдження забруднення від рухомих джерел викиду. Метод базується на зображенні розв'язку за допомогою фундаментальних розв'язків та Sinc-квадратурних формулах. Проведено тестові розрахунки для моделювання поширення забруднення атмосфери під час злету літака.

1 Вступ

На сьогодні внаслідок активної людської діяльності порушується екологічна рівновага, значно погіршується стан навколишнього середовища. Атмосферне повітря є основним природнім компонентом, що забезпечує життя людини. Тому його забруднення, яке постійно зростає, має негативний вплив не тільки на загальний стан навколишнього середовища, а й на здоров'я кожної людини. Інтенсивний технічний розвиток призводить до збільшення концентрації шкідливих речовин

*Робота виконана за частковою підтримкою НДР № 0117U004077.

у повітрі. Щоб зменшити їхній негативний вплив на навколишнє середовище, визначають екологічний стан довкілля розробляють методи для виявлення проблем.

Найзначнішим і наймасштабнішим забрудненням навколишнього середовища є попадання в нього газоподібних і аерозольних сполук, які раніше не були йому властиві. Серед джерел формування речовин, які забруднюють повітря, виділяють три такі типи: точкові джерела, які характеризуються постійною величиною викиду і сталою температурою забруднювальних речовин, які виділяються з промислових підприємств; лінійні джерела, до яких відносяться автомагістралі і дороги з високою інтенсивністю руху, а також відкриті каналізаційні труби; поверхневі джерела, до яких належать відстійники, сміттєзвалища та болота (об'єм викиду забруднення з таких джерел залежить від їх геометричних розмірів і процесів, що в них відбуваються).

Одним з найпоширеніших джерел забруднення атмосфери є транспорт, зокрема, авіаційний транспорт. Найбільша кількість забруднення викидається в навколишнє середовище в зоні аеропортів під час зльоту і приземлення літаків, а також під час прогріву їхніх двигунів. При роботі двигунів на етапі зльоту й приземлення в навколишнє середовище надходить максимальна кількість оксиду вуглецю і вуглеводневих сполук. Найбільші викиди сажі та задимлення відбувається при зльоті та наборі висоти, коли двигуни працюють із максимальним навантаженням. Розробці різних методик для оцінки забруднення територій аеропортів та аеродромів продуктами згоряння авіаційного палива присвячені багато робіт, таких науковців як: М.Є. Берляндт, А.О. Картишев, В.Ю. Медведєв, Р. Вейсон, Г. Флемінг та інш.

Водночас, аналіз методик і підходів, які використовували ці вчені показує, що в них часто переважають емпіричні співвідношення й відсутнє врахування особливостей руху літального апарата (ЛА). Як наслідок зазначені недоліки можуть призвести або до невиправдано занижених розмірів санітарно-захисної зони й негативно позначитися на здоров'ї людей, або, навпаки, до завищення її площі, що є недоліком із економічного погляду. Тому для отримання докладнішої інформації про рівень і характер забруднення потрібна розробка нових методик розрахунку поширення шкідливих речовин, що враховують особливості руху ЛА. В цій роботі пропонується чисельний метод із експоненційною швидкістю збіжності [1, 2] для розрахунку поширення забруднення на основі математичної моделі переносу-дифузії. Для ілюстрації роботу цього методу показано моделювання поширення забруднення від літального апарату на етапі зльоту.

2 Математична модель поширення забруднення та чисельний метод

Для опису поширення забруднень найчастіше використовується математична модель із рівнянням переносу-дифузії з початковими і крайовими умовами. Ми використовуватимемо нестаціонарну двовимірну за простором модель, яка отримується з загальної моделі після усереднення рівня викидів за висотою [3–6]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + u\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + v\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} + \sigma\varphi - \mu \vartriangle \varphi = f, \\ \varphi(x, y, 0) = \varphi_0(x, y), \\ \varphi(x, y, t) = 0, \ \ x \to \pm\infty, \ y \to \pm\infty, \\ t \in [0, \tau]\,. \end{cases} \tag{1}$$

$\mu > 0$, $\sigma > 0$. Тут u, v – компоненти вектора, що описує силу й напрям вітру, f– функція, що описує потужність джерел забруднення, μ– коефіцієнт дифузії, σ– коефіцієнт хімічного розпаду. Якщо ψ є розв'язком рівняння (1) при $u = v = 0$, то розв'язок задачі (1) за довільних u, v записується у вигляді біжучої хвилі:

$$\varphi\left(x, y, t\right) = \psi\left(x - ut, y - vt, t\right).$$

Нехай

$$\psi(x, y, t) = \psi_1(x, y, t)e^{-\sigma t},$$

тоді

$$f = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sigma\psi - \mu \vartriangle \psi = e^{-\sigma t}\frac{\partial \psi_1}{\partial t} - \sigma e^{-\sigma t}\psi_1 + \sigma e^{-\sigma t}\psi_1 - \mu e^{-\sigma t} \vartriangle \psi_1 =$$

$$= e^{-\sigma t}\frac{\partial \psi_1}{\partial t} - \mu e^{-\sigma t} \vartriangle \psi_1.$$

Таким чином, ψ_1 задовольняє рівняння й початкові і крайові умови:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi_1}{\partial t} - \mu \vartriangle \psi_1 = e^{\sigma t} f, \\ \psi_1(x, y, 0) = \varphi_0(x, y), \\ \psi_1(x, y, t) = 0, \ \ x \to \pm\infty, \ y \to \pm\infty. \end{cases} \tag{2}$$

Фундаментальний розв'язок рівняння (2) записується у вигляді:

$$U(x,y,t) = \frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{4t\mu}}}{4\pi t\mu}. \tag{3}$$

Використовуючи (3), маємо:

$$\psi_1(x,y,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} U(x-\xi, y-\eta, t)\varphi_0(\xi,\eta)d\xi d\eta +$$

$$+\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} U(x-\xi, y-\eta, t-\tau)e^{\sigma\tau} f(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau =$$

$$= \frac{1}{4\pi\mu t}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4\mu t}}\varphi_0(\xi,\eta)d\xi d\eta +$$

$$+\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4\mu(t-\tau)}}}{4\pi\mu(t-\tau)} e^{\sigma\tau} f(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau.$$

Отже,

$$\psi_1(x,y,t) = \frac{e^{-\sigma t}}{4\pi\mu t}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4\mu t}}\varphi_0(\xi,\eta)d\xi d\eta +$$

$$+\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4\mu(t-\tau)}}}{4\pi\mu(t-\tau)} e^{-\sigma(t-\tau)} f(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau.$$

Таким чином, розв'язок задачі (1) матиме вигляд:

$$\begin{aligned}\varphi(x,y,t) = \frac{e^{-\sigma t}}{4\pi\mu t}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-ut-\xi)^2+(y-vt-\eta)^2}{4\mu t}}\varphi_0(\xi,\eta)d\xi d\eta +\\ +\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-ut-\xi)^2+(y-vt-\eta)^2}{4\mu(t-\tau)}-\sigma(t-\tau)}}{4\pi\mu(t-\tau)} f(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau\end{aligned} \tag{4}$$

Розглядатимемо випадок рухомого джерела забруднення. Як зазначалося вище, важливим об'єктом для вивчення поширення забруднень атмосфери є аеропорти. Тому розглянемо задачу розповсюдження забруднення від літака під час зльоту. В цьому випадку сам процес зльоту складається з трьох етапів: вирулювання й передстартова перевірка систем, розгін і відрив, а також поширення забруднення після зльоту. Двигуни літака розглядаються як точкові джерела забруднення. Розгляньмо другий етап зльоту, який характеризується довжиною розбігу, швидкістю відриву й часом розбігу.

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial\varphi_2}{\partial t} + u\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} + \upsilon\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} + \sigma\varphi_2 - \mu\Delta\varphi_2 = f_2, \\ \varphi_2\left(x, y, t_0\right) = \varphi_1\left(x, y, t_0\right), \\ \varphi_2\left(x, y, t\right) = 0, \quad x, y \to \pm\infty. \end{array} \right. \tag{5}$$

Літак рухається прямолінійно рівноприскорено, прискорення $= a$. Літак починає рухатися з точки $(0, 0)$:

$$f_2\left(x, y, t\right) = Q_2\delta\left(x - \frac{a(t - t_0)^2}{2}\right)\left[\delta\left(y - y_0\right) + \delta\left(y + y_0\right)\right], \quad t \in \left(t_0, t_1\right],$$

де y_0– відстань від осі літака до двигунів, Q_2– потужність викиду відпрацьованих газів двигунами.

Для розв'язку задачі (5) зробимо заміну змінної, підставивши:

$$\psi\left(x, y, t\right) = \varphi_2\left(x, y, t + t_0\right).$$

Тоді

$$\psi\left(x, y, t\right) = \frac{e^{-\sigma t}}{4\pi\mu t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[e^{-\frac{(x-ut-\xi)^2+(y-y_0-\upsilon t)^2}{4\mu(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x-ut-\xi)^2+(y+y_0-\upsilon t)^2}{4\mu(t-\tau)}}\right]\times$$

$$\times\, e^{-\sigma(t-\tau)}\varphi_1\left(\xi, \eta, t_0\right)d\xi\, d\eta +$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{4\pi\mu\left(t-\tau\right)}\left[e^{-\frac{(x-ut-\xi)^2+(y-y_0-\upsilon t)^2}{4\mu(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x-ut-\xi)^2+(y+y_0-\upsilon t)^2}{4\mu(t-\tau)}}\right]\times$$

$$\times\, e^{-\sigma(t-\tau)}Q_2\delta\left(\xi - \frac{a\tau^2}{2}\right)\delta\left(\xi\right)d\xi\, d\eta\, d\tau.$$

Тоді, повернувшись до старих змінних, отримаємо розв'язок задачі (5)

$$t \to t - t_0 \to \varphi_2(x, y, t) = \psi(x, y, t - t_0),$$

отже,

$$\varphi_2(x, y, t) = \psi(x, y, t - t_0) = \psi_1(x, y, t - t_0) +$$

$$+ \int_0^{t-t_0} \frac{Q_2}{4\pi\mu(t - t_0 - \tau)} e^{-\frac{\left(x - u(t-t_0) - \frac{a\tau^2}{2}\right)^2 + (y - \upsilon(t-t_0))^2}{4\mu(t-t_0-\tau)} - \sigma(t - t_0 - \tau)} d\tau =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \tau + t_0 = s \\ d\tau = ds \end{array} \right| = \psi_1(x, y, t - t_0) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \frac{Q_2}{4\pi\mu(t - s)} e^{-\frac{\left(x - u(t-t_0) - \frac{a(s-t_0)^2}{2}\right)^2 + (y - \upsilon(t-t_0))^2}{4\mu(t-s)} - \sigma(t - s)} ds.$$

Невласні інтеграли наближаємо за допомогою Sinc-квадратурної формули $T_N(f, h) = h \sum\limits_{k=-N}^{N} f(kh)$ з (див. [6]). Для цього оберемо $(2N + 1)$ вузлів за віссю Oy і $(4N + 3)$ вузлів за віссю Ox. Кількість вузлів за віссю Ox ми обираємо більшою, оскільки джерело викиду рухається за видовженим прямокутником. Отже, матимемо після застосування квадратурної формули:

$$\psi_1(x, y, t - t_0) = \frac{\sqrt{2} e^{-\sigma(t-t_0)}}{4\mu(t - t_0)(N + 1)} \times$$

$$\times \sum_{j=-(2N+1)}^{2N+1} \sum_{i=-N}^{N} F(x, y, t, x_j, y_i) \, \varphi_1(x_j, y_i, t_0),$$

де

$$F(x, y, t, x_j, y_i) = \exp\left\{ -\frac{(x - u(t - t_0) - x_j)^2 + (y - \upsilon(t - t_0) - y_i)^2}{4\mu(t - t_0)} \right\},$$

де

$$\omega_{h,y} = \left\{ y_i = ih = i\sqrt{\frac{2\pi}{N + 1}}, i = \overline{-N, N} \right\},$$

$$\omega_{h,x} = \left\{ x_j = jh_1 = j\sqrt{\frac{\pi}{N + 1}}, j = \overline{-(2N + 1), (2N + 1)} \right\}.$$

Згідно з Sinc-квадратурною формулою кроки h, h_1 будуть:

$$h = \sqrt{\frac{2\pi}{N+1}},$$
$$h_1 = \sqrt{\frac{2\pi}{2N+2}} = \sqrt{\frac{\pi}{N+1}} = \frac{h}{\sqrt{2}}. \tag{6}$$

При такому виборі параметрів швидкість збіжності квадратурної формули буде експоненційною [1, 6].

3 Чисельні розрахунки

На рисунках 1–6 показано розподіл забруднення у різні моменти часу для тестової задачі (5) при $T2 = 25$, $N = 60$, $u = 0$, $v = 0$, $sigma = 0.1$, $Q = 0.5$, $\mu = 0.1$, $a = 0.7$. У таблиці 1 наведено чисельні дані

Час	Максимальне значення забруднення	Сумарне забруднення
11	1,571	95,139
12	1,099	102,022
14	0,511	111,693
16	0,359	117,836
19	0,104	93,189
21	0,049	58,491

Таблиця 1. Параметри забруднення.

4 Висновок

Розроблено експоненційно збіжний наближений метод для розв'язування початково-крайової задачі для рівняння переносу-дифузії, що описує процес поширення забруднення від рухомих джерел. Запропонований метод використовує зображення розв'язку через фундаментальні розв'язки й наближені Sinc-квадратурні формули. Проведено тестові розрахунки для випадку рівноприскореного джерела, яке є математичною моделлю процесу зльоту літака.

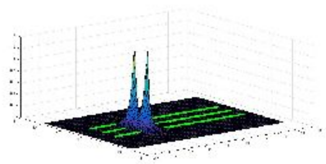

Рис 1. Розподіл забруднення при $t = 11c$.

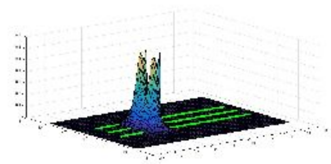

Рис 2. Розподіл забруднення при $t = 12c$.

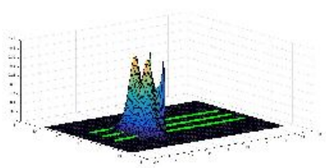

Рис 3. Розподіл забруднення при $t = 14c$.

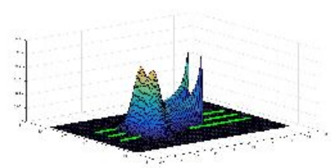

Рис 4. Розподіл забруднення при $t = 16c$.

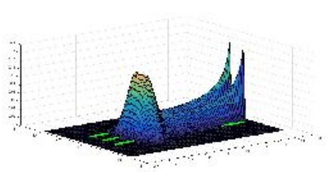

Рис 5. Розподіл забруднення при $t = 19c$.

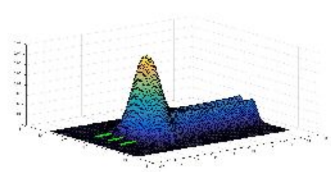

Рис 6. Розподіл забруднення при $t = 21c$.

[1] Stenger, F. Numerical methods based on sinc and analytic functions / Frank Stenger. — Springer-Verlag, New York, 1993. — Vol. 20 of Springer Series in Computational Mathematics. — XVI+565 p. — http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-2706-9.

[2] Gavrilyuk, I. Exponentially convergent algorithms for abstract differential equations / Ivan Gavrilyuk, Volodymyr Makarov, Vitalii Vasylyk. Frontiers in Mathematics. — Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011. — VIII+180 p.

[3] Марчук, Г. И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды / Г. И. Марчук. — М.: Наука, 1982. — 320 с.

[4] Марчук, Г. И. Математическое моделирование общей циркуляции атмосферы и океана / Г. И. Марчук. — Л.: Гидрометеоиздат, 1984. — 320 с.

[5] Jacobson, M. Z. Fundamentals of Atmospheric Modeling / M. Z. Jacobson. — Cambridge, 2005. — 813 p.

[6] Василик, В. Б. Швидкодіючий алгоритм для моделювання динаміки розповсюдження викидів в атмосферу від зосереджених джерел / В. Б. Василик, В. Л. Макаров, Д. О. Ситник // Зб. праць Інституту математики НАН України. — 2014. — **11**, № 4. — С. 176–197.