

Дослідження з математичних проблем механіки в Інституті математики НАН України

“Механика — математика, приложенная к законам равновесия и движения тел; наука о силе и сопротивлении ей ...” (рос.)

Володимир Даль

Предметом наукового напрямку “Математичні проблеми механіки” (МПМ) є створення, узагальнення і дослідження математичних моделей і об’єктів, які є результатом формалізації (математизації) законів рівноваги, стійкості, руху і/чи взаємодії макро й/чи мікро об’єктів різної природи, враховуючи тверді і пружні тіла, неперервні середовища, плазму й ряд біомеханічних систем (серед того й на рівні молекулярної взаємодії), під дією фізичних полів різної природи. Найближчим за значенням до терміну МПМ є термін “Раціональна механіка”. Інший близький за змістом термін, що з’явився зовсім недавно, ймовірно, під впливом книжки Марка Леві¹ є “Математична механіка”.

За формою, методами й логікою МПМ є розділом прикладної математики в тому сенсі, як це сформульовано у відомій книжці Блехмана, Мишкіса й Пановко². Отже, до досліджень із МПМ ставиться вимога, щоб відповідні задачі, що вивчаються, були розв’язаними не тільки математично коректно і правильно, а й своєчасно (повинні бути актуальними зі практичного погляду), економно (з погляду витрачених зусиль), розв’язок повинен бути зрозумілим інженерам (чи науковцям із відповідної галузі природничої науки) й нести прозору і зрозумілу фізичну інтерпретацію, бути легко алгоритмізованим за допомогою методів обчислювальної математики, і зрештою, побудовані аналітичні чи чисельні розв’язки повинні мати точність, відповідну до точності вихідної математичної моделі. Блехман, Мишкіс і

© Луковський І. О., Мазко О. Г., Тимоха О. М., 2018

¹Mark Levi, “The Mathematical Mechanics: Using Physical Reasoning to Solve Problems”, Princeton University Press, 2009.

²Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г. Механика и прикладная математика: Логика и особенности приложений математики. М.: Наука, 1990.

Пановко називають такі методи й розв'язки "оптимальними" (практично прийнятними). Особливістю досліджень із МПМ є також комбінування дедуктивної й так званої раціональної логік.

Наукові дослідження з МПМ мають міждисциплінарний характер. Характерними прикладами міждисциплінарних триад є "теорія звичайних диференціальних рівнянь – механіка твердого тіла – обчислювальна механіка" і "теорія крайових задач для рівнянь у частинних похідних – гідромеханіка – обчислювальна гідродинаміка". Історичний досвід вказує також на синергетичний характер досліджень із МПМ. Як приклад можна вказати на космологічні (на той час найактуальніші) задачі, які вивчали видатні науковці XVII–XIX ст. (Г. Галілей, Х. Гюйгенс, Р. Гук, А. Декарт, І. Ньютон, Г. Ляйбніц, Л. Ейлер), чії роботи про рух і рівновагу твердих тіл привели до створення аналітичної геометрії, а згодом до диференціального, інтегрального, варіаційного числення й аналітичної механіки (Ж. Лагранж, І. Бернуллі, Л. Ейлер, Ж.-Л. Даламбер, Л. Карно, Ж. Фур'є). Пізніше у XIX ст. математичні роботи К. Гаусса, М. Остроградського, В. Гамільтона, К. Якобі, Г. Герца, О. Коші, А. Пуассона, Д. Бернуллі, Ж. Даламбера, Ж. Лагранжа, Л. Нав'є, Д. Стокса заклали основу теоретичної гідромеханіки, а механічна модель примежового шару, яку побудував Л. Прандтль, стала вихідною точкою для аналітичних і чисельних досліджень так званих сингулярно збурених математичних задач. Нарешті, у XIX–XX ст. проблема математизації регулювання машин привела до створення теорії оптимального керування (М. Красовський, Р. Белман, Л. Понтрягін, В. Зубов та ін.), а роботи О. Ляпунова зі стійкості форм рівноваги рідини й руху твердих тіл привели до створення математичної теорії стійкості розв'язків диференціальних рівнянь. Зрештою, чисельні дослідження у небесній механіці і прогнозуванні погоди привели до математичної теорії динамічних систем і концепції детермінованого хаосу.

МПМ є найдавнішим, найбільшим за здобутками і впливом на природничі науки розділом сучасної прикладної математики. У XX–XXI сторіччях МПМ продовжує рости як екстенсивно (математизація природничих наук), так й інтенсивно (математичні дослідження нерозв'язаних задач МПМ). У першому випадку основними викликами є наразі проблеми біомеханіки, механічне й чисельне моделювання біологічних процесів, метеорологічні задачі, динаміка й керування складних гібридних механічних систем тощо. Розв'язність крайових

задач для рівнянь Ейлера і Нав'є-Стокса³ й доведення теорем існування і єдиності розв'язку нелінійної задачі поверхневих хвиль⁴ є прикладами класичних нерозв'язаних проблем МПМ.

Дослідження з МПМ були й залишаються найпріоритетнішими для найрейтинговіших математичних установ світу, до яких належить Курантівський інститут математичних наук (США), де проводяться дослідження з математичних проблем гідродинаміки, зокрема пов'язані з біологією й медициною, Інститут Ісаака Ньютона математичних наук (Велика Британія), де зараз активними є програми математизації феноменів льоду, проблем самоорганізації й нелінійних поверхневих хвиль, Інститут Макса Планка для математики у природничих науках (ФРН), де вивчають чисельні проблеми МПМ, Інститут Математики в Тулузі (Франція), до традиційної тематики досліджень якого зараз входять задачі оптимізації, керування, динаміки рідини і плазми, а також проблеми математизації біомеханічних процесів, дослідницький Інститут із математичних наук при університеті Кіото (Японія), де проводяться дослідження з математичних проблем в'язкої рідини.

Традиційно до складу Математичного Інституту Стеклова РАН (РФ) та *Інституту математики НАНУ* (Україна) входили і входять окремі відділи, які вивчають МПМ⁵.

Цей невеликий історичний нарис присвячено як видатним посталям, які, працюючи в Інституті математики НАНУ, створили наукові школи з МПМ, так і ключовим науковцям інституту, які зараз проводять дослідження з МПМ.

З часу створення у листопаді 1918 р. Української академії наук вона природно притерпіла цілий ряд структурних змін. Уже на початку 30-х років дослідження у системі Всеукраїнської академії наук (ВУАН) з математичних наук та їх застосувань були зосереджені в Комісії чистої математики, Комісії прикладної математики, Комісії математичної статистики і на Кафедрі математичної фізики. В

³Проблема тисячоріччя за версією Математичного Інституту Клея, J. Carlson; A. Jaffe; A. Wiles "The Millenium Prize Problems", Providence, 2006.

⁴Фундаментальні рівняння, які двісті років тому вивели О.-Л. Коші (отримав за це Премію Французької академії наук у 1816) та С.-Д. Пуассон, все ще не мають строгої математичної теорії існування та єдиності розв'язків.

⁵В довіднику за авторством А.М. Самойленко, В.В. Строк, В.І. Сукретний ("Хроніка – 2005: Сторінки з історії Інституту математики НАН України", Київ: Ін-т математики НАН України, 2005.– 236 с.) можна знайти понад десять відділів, які існували в інституті у 1934–2005 роках, де велися дослідження з МПМ.

1934 р. була запроваджена нова організаційна структура Академії, у відповідності з якою основною структурною одиницею стає інститут, який безпосередньо підпорядковується Президії Академії. Базою для створення (13 лютого 1934 р.) Інституту математики ВУАН були кафедри математичного циклу Природничо-технічного відділу ВУАН — Кафедри прикладної математики (керівник академік Д.О. Граве), Кафедра чистої математики (керівник академік Д.В. Пфейфер) і Кафедри математичної статистики (керівник академік М.П. Кравчук). Кафедра математичної фізики Індустріально-технічного циклу того ж відділу Академії увійшла до складу Інституту будівельної механіки. Відділ прикладної математики в Інституті математики створено на основі відповідно з реформованих кафедр та комісій уже на початку 1937 р. Тематика досліджень цього відділу включала математичну теорію пружності, гідро- та аеромеханіку, математичну теорію електричних машин, небесну механіку тощо. Рішенням Президії ВУАН від 22 серпня 1936 р. ВУАН перейменовано на Академію наук УРСР.

В подальшому (1936–2019) дослідження з математичних проблем механіки в Інституті математики проводилися в наступних відділах: *прикладної математики* (акад. Д.О. Граве, 1934–1939, член-кор. І.Я. Штаерман, 1939–1943), *наближених обчислень* (проф. І.Я. Штаерман, 1936–1938), *механіки* (доктор фіз.-мат. наук Ю.Д. Соколов, 1937–1952), *математичної теорії пружності* (акад. Г.М. Савін, 1946–1951), *загальної механіки* (акад. О.Ю. Ішлінський, 1955–1965), *Лабораторія № 1* (проф. С.Ф. Феценко, 1959–1965), *прикладної математики* (член-кор. АН УРСР П.Ф. Фільчаков, 1963–1968), *механіки і процесів керування* (акад. В.М. Кошляков, 1965–2004), *сучасних проблем динаміки* (проф. С.Ф. Феценко, 1965–1976), *динаміки та стійкості багатовимірних систем* (акад. І.О. Луковський, 1976–2016), *прикладних досліджень* (член-кор. В.І. Фушчич, 1978–1997), *аналітичної механіки* (проф. В.В. Новицький, 2004–2016), *математичних проблем механіки та теорії керування* (акад. І.О. Луковський, 2016–2017, член-кор. О.М. Тимоха, з 2017). Крім того, дослідження з МПМ проводилися у таких лабораторіях: *крайових задач електродинаміки та пружності* (проф. А.А. Березовський), *топологічних методів аналізу* (проф. А.В. Бондар, 1996–1999), *математичних проблем тепломасопереносу* (проф. А.С. Галіцин), *статистичних методів теорії надійності* (проф. І.І. Єжов, 1980–1996), *стійкості керованих систем* (проф. Д.Г. Коренівський, 1981–1995), *механіки робототе-*

хнічних систем (проф. В.Б. Ларін), *обертених задач спектрального аналізу* (проф. Л.П. Нижник), *електромоделювання* (проф. В.Г. Панчишин), *математичних проблем механіки* (проф. В.А. Троценко, 1981–1995).



Дмитро Олександрович Граве (1863–1939).

Дмитро Олександрович Граве (академік АН УРСР із 1919 р., почесний член АН СРСР із 1929 р.) став одним із перших членів (науковців) Національної академії наук України (тоді ВУАН). Він був другом одного з засновників ВУАН академіка В.І. Вернадського. Дуже часто наукову спадщину академіка Граве неправомірно пов'язують винятково з його алгебраїчними роботами. Насправді це не так. Значна частина його наукового доробку (за деякими оцінками понад 30 наукових праць) пов'язується з МПМ. Зокрема, академік Граве довів низку теорем теорії стійкості, вивівши умови стійкості малих коливань механічних систем із урахуванням сил опору; він також виконав цикл досліджень із динаміки неголономних систем. Чимало його результатів із МПМ описує небесну механіку. Д.О. Граве запропонував метод урахування електромагнітних сил, що діють у міжпланетному просторі, на рух планет. А спільно зі своїм учнем Ю.Д. Соколовим застосував цей метод для дослідження відхилення планет при їхньому орбітальному русі за умов урахування таких електромагнітних сил. Академік Граве є першим директором Інституту математики, який він очолював у 1934–1939 роках.

У Комісії зі прикладної математики ВУАН упродовж 1920–1934 рр. (а потім упродовж 1934–1943 рр. в Інституті математики АН



Ілля Якович Штаерман (1891–1962).



Юрій Дмитрович Соколов (1896–1971).

УРСР) працював видатний математик, механік, член-кор. АН УРСР (1939) **Ілля Якович Штаерман**. Наукова тематика досліджень Іллі Яковича сформована під впливом його вчителя, професора механіки Київського університету ім. Святого Володимира П.В. Воронця. Наукові інтереси Іллі Яковича охоплювали зокрема розробку методів розрахунку напружено-деформованого стану, міцності і стійкості тонкостінних оболонок обертання й куполів, методів дослідження стійкості будівельних конструкцій (арки, склепіння); він вивчав також контактні задачі теорії пружності. Розвиваючи теорію інтегральних рівнянь, І.Я. Штаерман розв'язав цілу низку актуальних на той час практичних задач теорії пружності. Його книжка "Контактная задача теории упругости" систематизує особисті досягнення Іллі Яковича з теорії контактних задач, доповнюючи тогочасну теорію оригінальними і дуже важливими для практики розв'язками задачі про стиснення пружних циліндрів із малим зазором, про взаємодію фундаменту й основи, про стиснення тіл, обмежених фізично (негладкими поверхнями). Ця книжка стала першою у світовій літературі з контактних задач теорії пружності. І.Я. Штаерман також увійшов в історію як науковий батько таких видатних науковців, як *О.В. Кільчевський*, *І.М. Рапопорт* і *Й.З. Штокало*.

1929 р. на публічному засіданні Комісії зі присудження вчених ступенів ВУАН **Юрій Дмитрович Соколов** захистив докторську дисертацію "Умови спільного співудару трьох тіл, що обопільно притягуються за законом Ньютона". Ця дисертація отримала широке ви-

знання і поставила її автора поруч із видатними вченими того часу. Бувши учнем академіка Граве, він присвятив три десятиріччя нахненній праці дослідженням задачі трьох тіл. Результати він підсумував у монографії 1951 р. “Особые траектории системы свободных материальных точек”. Ю.Д. Соколов уперше знайшов умови співудару трьох тіл у скінченний момент часу, дослідив особливі траєкторії системи вільних матеріальних точок, що взаємно притягаються або відштовхуються з силою, прямо пропорційною добутку мас і абсолютній величині довільної функції взаємних віддалей. Фундаментальні результати, які отримав Юрій Дмитрович у небесній механіці, а згодом і в теорії фільтрації рідини, багато в чому були зумовлені його чисельно-аналітичними методами розв’язування диференціальних рівнянь. Після заснування Інституту математики 1937 року було створено *відділ механіки*, який і очолив Ю.Д. Соколов. Сам факт створення такого відділу яскраво підкреслює увагу й високу пріоритетність (на думку академії) досліджень із МПМ.

Якщо Ю.Д. Соколов, Д.О. Граве й І.Я. Штайерман працювали над класичними, добре відомими на той час задачами аналітичної й теоретичної механіки і механіки пружних тіл, то іншим видатним вченим тієї епохи, *М.М. Крилову, М.М. Боголюбову* і *М.О. Лаврентьєву* пощастило стати засновниками нових, проривних напрямків прикладної математики, які пов’язуються з МПМ.



Микола Митрофанович Крилов
(1879–1955).



Микола Миколайович Боголюбов
(1909–1992).

У 1932 р. **Микола Митрофанович Крилов** (академік ВУАН із 1922 р., із 1929 р. — академік АН СРСР) і його 23-річний учень Ми-

кола **Миколайович Боголюбов** (який згодом, через 20 років, поєднає в одній особі видатного математика, механіка і фізика-теоретика) створили новий розділ прикладної математики, який зараз має назву “*нелінійна механіка*”. Ідеї й методи нелінійної механіки ці вчені виклали в оглядових статтях 1932 – 1933 років, а також у двох монографіях⁶. Нелінійна механіка описує періодичні чи майже періодичні процеси, період яких залежить від амплітуди коливань. З практичного погляду такі процеси можуть бути умовно корисними (коливання електричного струму і радіосигналів тощо) чи шкідливими (коливання крила літака в польоті, вібрація пружної труби з рідиною, яка протікає в ній під змінним пульсуючим тиском, вібрація валу турбіни тощо). Ці процеси часто описуються нелінійними диференціальними рівняннями. Крилов і Боголюбов розробили методи асимптотичного інтегрування такого типу нелінійних диференціальних рівнянь, коли рівняння мають малий або великий параметр. Вони проілюстрували ефективність методу для ряду практичних задач із електротехніки й авіації.

На початку 1939 р. (за рекомендацією президента Академії наук УРСР О.О. Богомольця, який надавав особливе значення математиці як фундаменту для природничих наук) Інститут очолив **Михайло Олексійович Лаврентьєв**, до того завідувач відділу Математичного інституту ім. В.А. Стеклова, вихованець московської математичної школи М.М. Лузіна, добре відомий як один із визначних математиків країни, спеціаліст у галузі теорії функцій комплексних змінних і її застосувань до аеро- і гідродинаміки. М.О. Лаврентьєва того самого року обрали академіком АН УРСР (із 1946 р. — академік АН СРСР). Наукова й організаційна діяльність М.О. Лаврентьєва привела до розвитку в Україні нового напрямку теорії функцій — теорії квазіконформних відображень із її застосуванням до газової динаміки й ряду інших розділів механіки суцільних середовищ (поверхневі хвилі важкої рідини, рух ґрунтових вод тощо). Він також розвинув наближені методи конформних перетворень на основі варіаційного принципу Ліндельофа. Дослідження за цими напрямками він підсумував у монографії 1946 року, “Конформные отображения с приложениями к некоторым вопросам механики”; того самого року ці до-

⁶Н.М. Крылов, Н.Н. Боголюбов. Приложение методов нелинейной механики к теории стационарных колебаний.— Киев: ВУАН, 1934; Введение в нелинейную механику: Приближенные и асимптотические методы нелинейной механики.— Киев: Изд-во АН УССР, 1937.

слідження відзначили присудженням Державної премії СРСР.



Михайло Олексійович Лаврентьєв (1900 – 1980).

Академіки М.О. Лаврентьєв і М.М. Боголюбов є знаковими фігурами Інституту математики. Понад 40 років вони і їхні учні заснували низку революційних математичних напрямків, серед них і для МПМ. Під впливом цих двох яскравих математиків еволюціонували наукові групи й мінялася структура інституту, де домінували, як то є типовим для дослідницьких математичних установ розвинутих країн, прикладні математичні дослідження. Тематика таких досліджень відображала практичні виклики того часу.

1940 р. Інститут складався зі п'яти відділів, *теорії функцій комплексної змінної* з застосуванням до задач суцільного середовища (М.О. Лаврентьєв), математичного аналізу (Г.В. Пфейфер), *механіки* (Ю.Д. Соколов), *прикладної математики* (І.Я. Штаерман), алгебри та функціонального аналізу (М.Г. Крейн). Як ми бачимо, три з цих п'яти відділів спеціалізувалися на дослідженнях із МПМ. Той факт, що математичні дослідження акцентувалися не на абстрактних, а на актуальних науково-практичних викликах сучасності, зокрема індустрії, дуже приваблювало талановиту наукову молодь. Багато видатних учених, інженерів і конструкторів того часу закінчували аспірантуру, захищали дисертації й починали свою кар'єру в Інституті математики. Серед тих, хто працював у відділі прикладної математики Інституту, був і видатний конструктор **Володимир Миколайович Челомей**⁷

⁷Кандидатська дисертація “Динамічна стійкість елементів авіаційних конструкцій”, 1939 рік, науковий керівник член-кореспондент І.Я. Штаерман.



Володимир Миколайович Челомей (1914 – 1984).

Друга світова війна порушила творчі й науково-організаційні плани академіка М.О. Лаврентьєва і наукового колективу інституту. Під час евакуації в Уфу (Башкирія) він зосереджується на актуальних задачах військової промисловості. Серед таких були дослідження стійкості руху снарядів із рідинним наповненням. М.О. Лаврентьєв залучив до цього своїх учнів, наукового співробітника Інституту математики АН УРСР **Селіма Григоровича Крейна** (розробка теорії) і співробітника Інституту будівельної механіки АН УРСР С.В. Малашенка (експериментальні дослідження). Ця наукова діяльність завершилася підготовкою С.Г. Крейном 1949 р. докторської дисертації “Устойчивость движения вращающегося снаряда с жидким наполнением”, яка була захищена 1950 р. в Академії артилерійських наук. У дисертаційних дослідженнях застосовувалася теорія ермітових операторів у гільбертовому просторі.

Найважливіша робота М.О. Лаврентьєва того часу присвячена теоретичним дослідженням феномену *кумуляції* (ефект Манро). Відкрите експериментальним шляхом явище кумуляції полягає в тому, що заряд вибухівки у снаряді з конічною або напівсферичною виїмкою, що облицьована тонким сталевим шаром, починає пробивати набагато товстішу броню, ніж у снаряді без такої виїмки. М.О. Лаврентьєв запропонував математичну модель, яка описує кумулятивний ефект як із якісного, так і з кількісного боку. Виявилося, що при взаємодії сталеної оболонки з вибухівкою і броні, яка відбувається за значних температур, при тиску до 100 000 атм і швидкості руху приблизно 10 км/сек, пружні сили складають соті долі сил інерції. При



Селім Григорович Крейн (1917 – 1999).



Петро Феодосійович Фільчаков (1916 – 1978).

таких параметрах фізичного процесу броня поводить як ідеальна рідина, а відповідні математичні постановки теорії можна сформулювати в термінах крайових задач для рівняння Лапласа. За ці роботи М.О. Лаврентьєву 1949 р. була присуджена Державна премія СРСР. Журнальна відкрита публікація з кумулятивного вибуху з'явилася лише 1957 р. Відзначимо також революційні результати М.О. Лаврентьєва в теорії хвиль на поверхні важкої рідини скінченної глибини. 1946 р. він довів теорему існування відокремленої хвилі (перший спогад цього фізичного явища належить до першої половини XIX сторіччя і належить Дж. Расселу). Така хвиля пізніше — наприкінці 60-х років — дістала англomовну назву *soliton* (*soliton*).

У повоєнні роки М.О. Лаврентьєв створив на основі варіаційних принципів для конформних відображень нові підходи до розв'язування задач теорії руху ґрунтових вод під гідротехнічними спорудами (греблями), які були доведені в роботах його учнів до оцінок і обґрунтування наближених методів *теорії фільтрації*. Ці дослідження почалися з 1945 р. (М.О. Лаврентьєв, Ю.Д. Соколов). У подальшому – впродовж 30-ти років – теорія фільтрації велася під керівництвом чл.-кор. **Павла Феодосійовича Фільчакова** (1916–1978). Зокрема, розроблявся метод розв'язування задач фільтрації за допомогою моделювання на електропровідному папері (В.М. Остапенко, В.Г. Пачишин, О.М. Тарапон, Б.Б. Нестеренко), а також було запропоновано наближені аналітичні методи розв'язування відповідних крайових задач (П.Ф. Фільчаков, О.Я. Олійник, В.І. Лаврик та їхні учні). Роботи

П.Ф. Фільчакова і В.Г. Панчишина з теорії фільтрації 1970 року відзначені Державною премією УРСР у галузі науки і техніки.

Математичним проблемам теорії пружності присвячені роботи повоєнного періоду І.Я. Штаермана і його учня (академіка) **Миколи Олександровича Кільчевського** (1936 – 1941 рр. — докторант, 1944 – 1947 рр. — старший науковий співробітник інституту). У працях І.Я. Штаермана досліджені плоскі задачі про тиск на пружну напівплощину одного чи кількох штампів, задачі про стиснення пружних тіл, обмежених циліндричними поверхнями близьких радіусів. Багато робіт І.Я. Штаермана і М.О. Кільчевського присвячено розвитку математичної теорії динаміки тонкостінних оболонок і методів інтегрування рівнянь цієї теорії. М.О. Кільчевський також увійшов в історію як автор неперевершеного підручника з теоретичної механіки, за яким навчалися декілька поколінь випускників математичних факультетів України.



Микола Олександрович
Кільчевський (1909 – 1979).



Йосип Захарович Штокало
(1897 – 1987).

У циклі публікацій 1945–1948 років іншого учня І.Я. Штаермана, (академіка) **Йосипа Захаровича Штокало** (працював в інституті упродовж 1942 – 1949 і 1956 – 1963 років) досліджувалася асимптотична стійкість за Ляпуновим розв'язків системи лінійних диференціальних рівнянь зі квазіперіодичними коефіцієнтами (лінійні механічні моделі) за припущення, що стала матриця коефіцієнтів збурюється малими (пропорційними до малого параметра) квазіперіодичними додатками, які мають вигляд скінченних тригонометричних сум.

Ідея полягала в тому, щоб одержати, так би мовити, “формальну теорему Флоке” і відповідно “формальне” перетворення, що зводить таку систему до системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Автор одержав ряд достатніх умов асимптотичної стійкості розв’язків системи.

Упродовж 1945–1949 рр. М.М. Боголюбов (в Інституті математики працював за сумісництвом) продовжив дослідження з теорії нелінійних коливань. Він створив метод усереднення, одночастотний асимптотичний метод і метод інтегральних многовидів. 1947 року наукові результати М.М. Боголюбова цього періоду відзначено Державною премією СРСР.

У складі Інституту математики 1948 р. працювало 7 відділів: *теорії функцій комплексної змінної та її застосувань* (М.О. Лаврентьев), *механіки* (Ю.Д. Соколов), *алгебри та функціонального аналізу* (М.Г. Крейн), *асимптотичних методів та теорії ймовірностей* (М.М. Боголюбов), *прикладної математики* (О.Ю. Ішлінський), відділ *теорії пружності* у Львові (Г.М. Савін), львівський відділ *теорії ймовірностей* (Б.В. Гнеденко), серед яких *п’ять* (тобто понад половина) досліджували МПМ. Фактично в ці роки, зокрема завдяки останньому факту, було закладено базис для подальшого наукового злету Інституту математики, екстенсивного й інтенсивного зростання його академічного складу. Зосередженість на актуальних прикладних математичних дослідженнях стала лейтмотивом цього злету. Знаковими фігурами, які визначили напрямки наукових досліджень із МПМ у 1950-70 роки, були *Г.М. Савін*, *І.М. Рапопорт* і *О.Ю. Ішлінський*.

Академік **Гурій Михайлович Савін** (віце-президент АН УРСР) небезпідставно вважається одним зі хрещених батьків наукової школи математичної теорії пружності другої половини ХХ сторіччя. З 1952 по 1957 р. він провів дослідження з теорії концентрації напружень біля отворів різної геометричної форми в ізотропних і анізотропних середовищах. Праці Г.М. Савіна та його учнів присвячені також задачам динаміки канатів змінної довжини. Вони склали основу його теорії розрахунку шахтних підймальних канатів, у яких враховується динамічний режим їхньої роботи (маятник змінної довжини). Дослідження з математичної теорії пружності й динаміки канатів зводилися до доволі складних математичних моделей, для яких потрібно було будувати не тільки наближені методи розв’язування відповідних крайових задач, а й їхню якісну теорію. До учнів Г.М. Са-



Гурій Михайлович Савін
(1907 – 1975).



Олександр Юлійович Ішлінський
(1913 – 2003).

віна належать такі видатні вчені, як академіки *Остан Степанович Парасюк* і *Ярослав Степанович Підстригач*.

У кінці 1948 р. за рекомендацією М.О. Лаврентьєва директором Інституту математики було призначено **Олександра Юлійовича Ішлінського**, 35-річного доктора фізико-математичних наук, професора Московського державного університету ім. М.В. Ломоносова, обраного цього самого року академіком АН УРСР (із 1960 р. — академік АН СРСР), на той час відомого спеціаліста з теорії тертя, пружності і пластичності, теорії гіроскопічних приладів. Із його приходом ще сильніше розширилась і збагатилась наукова тематика Інституту, зміцнився зв'язок математичних досліджень з практикою, що відповідала викликами того часу. Поряд із задачами теорії пружності й фільтрації рідини, дослідження яких продовжувалися, були започатковані три нові наукові напрямки з МПМ, а саме, (1) теорія гіроскопічних приладів і теорія інерціальної навігації та інерціального керування рухомими об'єктами (кораблі, підводні човни, літаки, ракети), (2) математичні проблеми динаміки твердих і деформівних тіл (стосовно міжконтинентальних балістичних ракет і орбітальних ракет-носіїв із рідинними двигунами), (3) динаміка твердого тіла, підвішеного на струні, яке швидко обертається навколо вертикальної осі.

Для розв'язку комплексних проблем, пов'язаних із ракетобудуванням, було залучено Інститути Академії наук УРСР. Завдяки М.О. Лаврентьєву і О.Ю. Ішлінському в Інституті математики з 1949 р. розпочалися роботи з математичного забезпечення проектування ракетної

техніки на замовлення НДІ-88 (головний науково-дослідний, проектно-конструкторський і виробничо-технологічний інститут із ракетного озброєння Міністерства озброєння СРСР, із 1967 р. — Центральний НДІ машинобудування, ЦНДІмаш). Договірні творчі стосунки Інституту математики з ЦНДІмаш тривали майже 40 років, вони перервалися лише після розпаду СРСР. Уже за перші десять років (1949 – 1958) були одержані результати для математичного моделювання руху міжконтинентальних балістичних ракет і орбітальних ракет-носіїв космічних апаратів, інерціального (автономне) наведення їхнього центра мас, теорії гіроскопічних приладів і теорія інерціальної навігації.

Механіка гіроскопічних систем. Гіроскоп — це швидко обертове симетричне тіло зі своєрідними, накладеними на нього в'язями: кардановим (двостепеневим, тристепеневим) або безкардановим (сферичним) підвісами. 1952 р. дослідження з теорії гіроскопів стосовно їхнього використання в морській артилерії і корабельних інерціальних системах А.Ю. Іплінський підсумував у закритій монографії “Механика специальных гироскопических систем” (розсекречена 1960 р.), яка пізніше перевидана розширеним і доповненим виданням 1963 р. з дещо зміненою назвою.

Теорія автономної (інерціальної) навігації морських і океанських суден і підводних човнів та наведення балістичних ракет. О.Ю. Іплінський розвинув теорію гіроскопічних приладів різного функціонального призначення і теорію основної задачі гіроскопічної інерціальної навігації — визначення географічних координат, швидкості і курсу рухомого об'єкта (корабля, підводного човна, літака, ракети, космічного літального апарата) без залучення зовнішньої інформації, тобто з використанням винятково показників чутливих елементів (гіроскопів і ньютонometrів), що вимірюють поточні значення проєкцій лінійної й кутової швидкостей і розміщені на стабілізованій платформі, центр якої рухається разом із об'єктом. Його результати підсумовано в монографії “Некоторые вопросы теории автономного управления баллистическими ракетами” (розсекречена 1995 р.). Теорія інерціальної навігації — великий розділ прикладної механіки. Відділ загальної механіки інституту, який він створив 1956 р. й очолював (на громадських засадах), став ядром київської наукової школи з теорії гіроскопів і (гіроскопічної) інерціальної навігації.

Зацікавленість у математичних проблемах *динаміки системи “тверде тіло з порожнинами, наповненими рідиною”* (із застосуван-



Ілля Маркович Рапопорт.

ням до руху ракет з двигунами на рідинному паливі) привела до всесвітньо відомої наукової школи, у витоках якої були М.О. Лаврент'єв, О.Ю. Ішлінський та **Ілля Маркович Рапопорт**. Наприкінці 1950-х років була побудована лінійна математична модель ракети з урахуванням рухомості палива в баках і пружності конструкцій. Результати цих досліджень представлені в монографії Бориса Ісааковича Рабіновича й Іллі Марковича Рапопорта “О движении твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью” (1960), що вийшла під грифом “для службового користування”. Обидва автори монографії в цей період працювали в Інституті математики: І.М. Рапопорт (учень І.Я. Штаермана) з довоєнних років і до 1959 р., а Б.І. Рабінович, котрий перебував упродовж п'яти років (із 1955 р.) на посаді викладача Київського вищого інженерного авіаційного училища (КВІАУ), одночасно перебував на посаді старшого наукового співробітника “на громадських засадах” (тобто без оплати) в Інституті математики. І.М. Рапопорт є одним із найвидатніших математиків-“практиків”, які будь-коли працювали в Інституті математики. Доля склалася так, що більшість робіт І.М. Рапопорта були і є маловідомими для сучасників, що пов'язується з режимом секретності. Можливо, тому, працюючи над цим історичним нарисом, автори ледь знайшли фотокартку Іллі Марковича в архівах інституту. Більшість статей та інша публічна інформація про І.М. Рапопорта відсутня в інтернеті. Вклад І.М. Рапопорта у створення ракетно-космічної техніки важко переоцінити. 1959 року він припинив роботу в інституті, ставши головним науковим консультантом *Сергія Павловича Коро-*

львів⁸

Окрім динаміки систем твердого тіла з порожнинами, наповненими рідиною, у 1940–50-х роках І.М. Рапопорт працював, зокрема, над математичною теорією стійкості і стабілізації руху керованих балістичних ракет дальньої дії. Цей факт цікавий тим, що над цією прикладною задачею працювали тоді ще молоді математики (академік) *Юрій Макарович Березанський* і *Марк Олександрович Красносельський*.



Юрій Макарович Березанський.



Марк Олександрович
Красносельський (1920 — 1997).

Юрій Макарович Березанський отримав результати з теорії стабілізації лінійних стаціонарних динамічних систем у загальній матричній формі стосовно задачі стабілізації й керованості руху ракет⁹

⁸Ось як пише про Іллю Марковича у своїх спогадах “Капустін Яр” один із ветеранів ракетобудування професор Яков Гельфандбейн: “... Илью Марковича Рапопорта, доктора физмат наук, профессора МАИ, Главного научного консультанта С.П. Королёва. Мы дружили семьями, он часто приезжал в Ригу на защиты диссертаций, оппонирование которых он принимал по моему совету. Интересный это был человек. Его С.П. Королёв забрал к себе из Киева. Занимался он самыми сложными проблемами конструирования, а в то время важнейшей была проблема упругих колебаний корпуса (многоступенчатость) и эту проблему, назвал “Теорией колебаний упругой линии тела, частично заполненного жидкостью”, он решал в течение ряда лет, ежегодно выпуская книги по 350–400 страниц, в которых практически не было текста – одни формулы. В одной из них он допустил две ошибки, в документах гл. Конструктора исправил их, а потом объявил конкурс среди аспирантов и студентов МАИ на их поиск, пообещав тому, кто их выявит, учёную степень кандидата наук без защиты диссертации. Ошибки были найдены, и обещание было им выполнено.”

⁹Закритий технічний звіт Інституту за спеціальною темою “Исследование

Задача керування полягала у відповіді на такі питання: яка інформація і скільки її необхідно для одержання керування бажаного типу, які внутрішні властивості характеризують дану незмінну частину (об'єкт) із погляду керування ним, тобто питання фізичної реалізованості при побудові математичних моделей керованих систем. Із 1960 р. аналогічний результат у науковій і навчальній літературі з теорії стабілізації й оптимального керування має назву "критерій керованості Калмана". Результат Ю.М. Березанського через 5 років істотно розвинув його учень, співробітник ОКБ-692 (м. Харків) В.М. Романенко¹⁰. Використовуючи методи теорії функцій від матриць, він отримав необхідну і достатню умову стабілізованості лінійної динамічної системи у випадку, коли матриця динамічної системи має кратні власні значення.

Марк Олександрович Красносельський (працював в інституті з 1947 по 1952 рр.) в науково-технічних темах під загальною назвою "Влияние параметров различных систем управления ракетами дальнего действия на устойчивость их движения по траектории и точность стрельбы"¹¹ дослідив і сформулював конкретні рекомендації для вибору органів керування на забезпечення стійкості руху центра мас ракети за розрахунковою траєкторією.

Борис Ісакович Рабінович¹² як уже було зазначено вище, хоч і тісно співпрацював із І.М. Рапопортом, ніколи не був штатним співробітником Інституту математики. Але після того, як Ілля Маркович залишив інститут, саме Борис Ісакович виявився тією необхідною ланкою, яка сприяла розвитку в інституті всесвітньо відомої наукової школи з динаміки тіл із порожнинами, що містять рідину. Цим треба завдячувати зокрема **Степанові Федоровичу Фещенку** й (академіку) **Івану Олександровичу Луковському**.

устойчивости движения ракет типа Р-12 на активном участке полета"/ Руководитель д.т.н. И.М. Рапопорт. Исполнитель д.ф.-м.н. Ю.М. Березанский, 1957 р., розсекречено 1998 р.

¹⁰Романенко В.Н. Некоторые вопросы аналитического конструирования специальных систем управления: Дис. ... кандидата физ.-мат. наук.— Харьков: ОКБ-692, 1962.— 157 с. Науч. руководитель доктор физ.-мат. наук Ю.М. Березанский. Розсекречена 1995 р.

¹¹Науковий керівник академік О.Ю. Ішлінський, виконавець доктор фіз.-мат. наук М.О. Красносельський (розсекречено 1998 р.), виконані згідно з технічним завданням НДІ-88

¹²Борис Ісакович походить із відомої наукової сім'ї. Його батько, Ісаак Мойсеевич Рабінович (член-кореспондент АН СРСР) є розробником кінематичного методу в будівельній механіці, засновником теорії вантових ферм.



Борис Ісаакович Рабінович (1924 — 2010).



Степан Федорович Фещенко
(1903 – 1981).



Іван Олександрович Луковський.

1955 р. в Інституті працювали сім відділів: *теорії ймовірностей і математичної статистики* (Б.В. Гнеденко), *математичної фізики* (Ю.О. Митропольський), із 1965 по 2000 рр. — відділ *математичної фізики і нелінійних коливань, диференціальних рівнянь* (Ю.Д. Соколов), *функціонального аналізу* (О.С. Парасюк), *загальної механіки* (О.Ю. Ішлінський), *математичної теорії пружності* (Г.М. Савін), *історії математики* (Й.З. Штокало). Як видно, в чотирьох із цих семи відділів велися цілеспрямовані дослідження в галузі МПМ.

Після трирічного (1955–1958) перебування на посаді директора Інституту математики академіка Б.В. Гнеденка 1958 р. Інститут очолив **Юрій Олексійович Митропольський**, на той час уже широко визнаний спеціаліст у галузі нелінійної механіки і теорії диференці-



Юрій Олексійович Митропольський (1917–2008).

альних рівнянь¹³ Той факт, що інститут очолив спеціаліст у галузі нелінійної механіки, сприяло розширенню й розвитку досліджень із МПМ, зокрема динаміки твердого тіла, яке підвішене на струні й обертається навколо вертикальної осі з великою кутовою швидкістю, задачам керування і стабілізації робототехнічних систем, математичної теорії стійкості руху динамічних систем при параметричних збуреннях (збуреннях коефіцієнтів) детермінованої і стохастичної природи. Розширенню тематики досліджень також сприяло цільове фінансування відомчими НДІ, КБ і Державним Комітетом з науки і техніки (ДКНТ). Дослідження з МПМ були зосереджені у відділі *загальної механіки* (створений 1956 р., керівник О.Ю. Іплінський; із 1978 р. — відділ механіки і процесів керування, з 1996 р. — відділ аналітичної механіки, керівник В.М. Кошляков), відділі *математичної фізики і теорії нелінійних коливань* (керівник Ю.О. Митропольський), *відділі сучасних проблем динаміки* (створений 1965 р. на базі спеціальної лабораторії — у штатному розкладі Інституту значилася під назвою “Лабораторія № 1” і діяла з 1959 р., керівник С.Ф. Фецен-

¹³Юрій Олексійович Митропольський (із 1950 року в Інституті математики) — учень академіка М.М. Боголюбова. Після захисту 1948 р. кандидатської дисертації “Исследование резонансных явлений в нелинейных системах с переменными частотами” він 1951 р. захистив докторську дисертацію “Медленные процессы в нелинейных колебательных системах со многими степенями свободы”, а 1953 р. очолив створений в Інституті новий відділ — відділ математичної фізики. Наукова робота Ю.О. Митропольського з проблем нелінійної механіки тих часів підсумована у двох монографіях: “Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах” (1955 р., 284 с.); “Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний” (1955 р., 448 с., співавтор М.М. Боголюбов).

ко; з 1976 р. — відділ динаміки та стійкості багатовимірних систем, керівник І.О. Луковський). Дослідження з математичних проблем нелінійної механіки в цей період інтенсивно розвивались у працях Ю.О. Митропольського, О.Б. Ликової, А.М. Самойленка, В.І. Фодчука, Д.Г. Коренівського, В.Г. Коломійця, В.Б. Ларіна та їхніх учнів. Побудована аксіоматична теорія асимптотичних методів пов'язала різні варіанти багаточастотного асимптотичного методу, методу нормальних форм Пуанкаре і методу усереднення. Асимптотичні методи поширено на нові класи динамічних систем: системи з розподіленими параметрами, математичними моделями яких є рівняння в частинних похідних параболічного і гіперболічного типів із запізненням, стохастичні динамічні системи. 1965 р. за цикл робіт, присвячений істотному розвитку і строгому математичному обґрунтуванню теорії нелінійних коливань, Ю.О. Митропольський удостоєний Ленінської премії.

Задля потреб військово-оборонного комплексу (насамперед створеного 1954 р. ОКБ-586 на чолі з М.К. Янгелем) на початку 1959 р. за Постановою Президії АН УРСР від 16.12.1958 р. в Інституті математики було створено новий науково-дослідний підрозділ “Лабораторія № 1”, яку очолив С.Ф. Феценко (з 1965 р. — відділ сучасних проблем динаміки). Уже в перші півтора роки існування була розроблена і досліджена математична модель збуреного руху міжконтинентальної балістичної ракети дальньої дії 8К64 із двигунами на рідинному пальному. З 1976 р. відділ набуває назви динаміки та стійкості багатовимірних систем; його очолив І.О. Луковський.

На початку 60-х років особливо гостро стала проблема про врахування коливання палива в нециліндричних баках при їхньому частковому заповненні. Були розроблені наближені методи визначення гідродинамічних коефіцієнтів рівнянь збуреного руху твердого тіла з порожнинами складної геометричної форми, частково заповнених ідеальною нестисливою рідиною, які ґрунтуються на варіаційних методах розв'язування основних крайових задач. Академік І.О. Луковський та його учні розробили методи визначення приєднаних мас рідини за заданим спектром частот вільних коливань обмеженого об'єму рідини, метод розбиття області з рідиною на підобласті й метод розвинення в ряди розв'язків неоднорідних крайових задач за власними функціями задач із параметром у граничних умовах. Важливе місце в цій проблематиці займають дослідження з *нелінійної динаміки тіл з порожнинами*, які частково заповнені рідиною. В цьому на-

прямку І.О. Луковський узагальнив метод Г.С. Наріманова, в якому використано ідеї методу теорії збурень на випадок порожнини довільної осесиметричної форми. В цей період для випадку просторового руху резервуара з рідиною він запропонував варіаційне формулювання задачі теорії поверхневих хвиль, яке приводить до повної сукупності рівнянь руху, включаючи нелінійні граничні умови на вільній поверхні рідини. Цим було закладено основу для створення модального методу в нелінійній теорії руху твердого тіла з порожнинами, частково заповненого рідиною, який пізніше дістав назву модального методу Майлза-Луковського. Наукові роботи І.О. Луковського в галузі прикладної механіки і ракетної техніки 1981 року відзначено премією ім. академіка М.К. Янгеля Академії наук УРСР (разом із В.Г. Сергеевим). 1983 року за прикладні дослідження задач динаміки і стійкості рухомих твердих і деформівних тіл з рідиною І.О. Луковський, Д.Г. Коренівський, М.О. Пустовойтов і В.А. Троценко у складі групи науковців і конструкторів КБ Електроприладобудування (м. Харків) удостоєні Державної премії УРСР у галузі науки і техніки.



Володимир Семенович Королюк.

Академік **Володимир Семенович Королюк** — один із перших науковців України, хто оцінив прикладне значення і роль в МПМ теорії ймовірності в цілому і напівмарківських процесів зокрема. У 80-ті роки В.С. Королюк започаткував новий напрямок – асимптотичний аналіз випадкових еволюцій. Результати досліджень із цього напрямку розвинено й підсумовано в монографіях “Стохастичні моделі систем” (1989 р.) і “Полумарковские случайные эволюции” (1992 р.).



Володимир Миколайович
Кошляков (1922–2009).



Марія Євдокимівна
Темченко (1925–2000).

Дослідження в Інституті за *прикладною теорією гіроскопів і теорії інерціальної навігації* проводив О.Ю. Ішлінський, його учні (О.П. Бойчук, В.П. Василенко, В.М. Калинович, В.О. Стороженко, М.Є. Темченко) і академік **Володимир Миколайович Кошляков**. Розглянуто геометрію і кінематику гіроскопічних систем у кардано-вих підвісах, питання орієнтації рухомих об'єктів, що регулюються гіроскопічними приладами. Велика увага приділена дослідженню нових явищ, пов'язаних з пружністю елементів гіроскопічних конструкцій. Побудована теорія різних гіровертикалей, гіроскопічних стабілізаторів, гірокомпасів, гіроінтегратора лінійних прискорень. Проведені дослідження точності і стійкості гіроскопічних інерціальних систем навігації залежно від похибок їхніх чутливих елементів і умов експлуатації, дано обґрунтування нових принципових схем платформної й безплатформної інерціальних навігаційних систем, створені узагальнені алгоритми функціонування інерціальних систем із використанням апарата кватерніонів (комплексних чисел із однією дійсною і трьома уявними одиницями), параметрів Родрига-Гамільтона і параметрів Кейлі-Клейна. За прикладні дослідження з динаміки гіроскопічних систем удостоєні Державної премії СРСР: В.М. Кошляков 1976 року, М.Є. Темченко 1981 року (у складі групи московських дослідників).

Марія Євдокимівна Темченко¹⁴ розв'язала задачу С.Л. Собо-

¹⁴Учениця О.Ю. Ішлінського, захистила 1954 дисертацію "Об устойчивости вращения тел твердых и тел с жидким наполнением эллипсоидальной формы" (Дис... канд. физ.-мат. наук. — Киев: Институт математики АН УССР, 1954).

лева про рух дзиги з порожниною, яка цілком заповнена ідеальною нестисливою рідиною, для порожнин двох конфігурацій (еліпсоїда обертання і кругового циліндра) простим і природним методом, використавши традиційний апарат математичної фізики. Вона досягла кардинального спрощення задачі завдяки вдалому вибору системи координат, зв'язавши її зі твердим обертаним тілом. Поряд із іншими питаннями стійкості руху твердого тіла, підвішеного на струні й обертаного навколо вертикальної вісі з великою кутовою швидкістю, вона дослідила питання про вплив довжини струни на стійкість обертального руху твердого тіла. При цьому зроблено аналіз двох граничних переходів: при необмеженому зменшенні довжини струни умови стійкості вироджуються у відомий критерій Маєвського для твердого тіла, обертаного навколо нерухомої точки, а при необмеженому збільшенні довжини струни — у відомий критерій Маєвського для випадку руху снарядів.

Математичне дослідження поведінки абсолютно твердого тіла з накладеними на нього тими чи іншими в'язями і, зокрема, дослідження стійкості стаціонарного обертання з великими кутовими швидкостями тіла, підвішеного на ідеально гнучкій нерозтяжній нитці (струні), в Інституті математики розпочаті, як уже йшлося, в середині 50-х років, коли О.Ю. Ішлінський із учнями досліджували стійкість вертикального обертання на струні осесиметричного твердого тіла з еліптичною і циліндричною порожнинами, цілком заповненими ідеальною нестисливою рідиною. В середині 70-х років інтерес до задачі про рух твердого тіла на струнному підвісі зріс у зв'язку із запропонованою співробітником Інституту механіки АН УРСР С.В. Малапенком ідеї використання такого підвісу для динамічного балансування твердих тіл і, зокрема, унікальних за габаритами і вагою виробів, балансування яких звичайними способами важко здійснювати (ротори турбін для електростанцій, корпуси космічних апаратів тощо). **Володимир Олександрович Стороженко** теоретично показав, що при обертанні підвішеного на струні тіла довільної конфігурації з достатньо великою кутовою швидкістю можлива така форма стаціонарного руху, при якій одна з його головних центральних осей інерції дуже близька до нерухомої вертикалі. Це створило можливість надзвичайно точно визначити розташування головної центральної вісі інерції тіла.

Поява на початку 70-х років малогабаритної електронної бортової обчислювальної техніки зняла гостроту проблеми мінімізації ваги



Володимир Олександрович
Стороженко.



Данило Григорович Коренівський (1937–2014).

бортової апаратури й обчислювальних пристроїв у автоматі керування дальністю польоту ракетних систем. Розвиваючи ідеї О.Ю. Ішлінського, на початку 80-х років **Данило Григорович Коренівський**¹⁵ розробив методи автономного інерціального наведення міжконтинентальних балістичних ракет і ракет-носіїв космічних апаратів. Він також запропонував нові електромеханічні способи автономного інерціального наведення. Зокрема встановлено, що у вертикальній площині польоту існує косокутна система координат зі змінним на проміжку часу роботи реактивного двигуна розхилом координатних осей, орієнтація за якими осей чутливості вимірювачів проекцій “уявної” швидкості центра мас ракети дає можливість побудувати на борту основне балістичне рівняння (функціонал інерціального наведення) в найпростішому вигляді — у вигляді суми вимірюваних на борту ракети проекцій “уявної” швидкості центра мас на ці координатні осі.

В 1960–70 роки велика увага приділялася дослідженням з математичної теорії стійкості руху й нелінійної механіки, якісної теорії диференціальних, різницевих, диференціально-різницевих та інших функціональних рівнянь, теорії оптимального керування. В 70-ті роки минулого сторіччя в Інституті математики сформувався новий конструктивний напрямок у теорії стійкості — застосування методів збурення (методу малого параметра тощо) при побудові функцій

¹⁵Спільно з Ю.А. Карпачовим: до 1981 р. співробітник СКБ київського заводу автоматики ім. Г.І. Петровського, у 1981–1986 рр. — співробітник КБ Електроприладобудування м. Харкова, відряджений КБЕ на цей період для наукової роботи до Інституту математики.

Ляпунова для динамічних систем, математичними моделями яких є системи лінійних диференціальних рівнянь із періодичними і квазіперіодичними коефіцієнтами і, зокрема, при побудові розв'язків матричного рівняння Ляпунова, що супроводжує метод функцій Ляпунова для лінійних систем. Введено поняття канонічної функції Ляпунова, для побудови якої розроблено варіаційні методи (М.О. Пустовойтов, О.Б. Ликова, О.А. Бойчук). У роботах А.М. Самойленка, Ю.О. Митропольського і В.Л. Кулика сформульовано і доведено абстрактний принцип зведення в теорії стійкості, що ґрунтується на дослідженні траєкторій динамічних систем за допомогою знакосталих і знакозмінних функцій Ляпунова. За прикладні розробки в галузі нелінійних коливань 1980 р. Ю.О. Митропольському, В.М. Калиновичу і В.Б. Ларіну присуджена Державна премія УРСР.



Володимир Борисович Ларін.



Остап Пилипович Бойчук
(1933–2002).

Остап Пилипович Бойчук розвинув новий метод дослідження стійкості й автоколивань нелінійних систем автоматичного керування і розв'язав деякі загальні задачі теорії оптимальних систем із особливостями в постановці Р. Калмана. Фундаментальні результати він одержав у теорії інерціальних систем навігації. Вперше вказав на загальний характер рівнянь збуреного руху автономних інерціальних систем, побудованих за різними принципами. Довів у загальній постановці теорему М. Шулера, що дало змогу закласти основи теорії класу нових інерціальних систем навігації. 1990–91 рр. О.П. Бойчук у співавторстві видав підручник із теоретичної механіки у 2-х томах. Наукові здобутки О.П. Бойчука відзначено Державною премією України в галузі науки і техніки 1992 року й першою премією КПП

за 1991 рік.

Значний внесок науковців інституту полягає в розв'язку проблем керування роботосистемами (керівник лабораторії робототехнічних систем, професор **Володимир Борисович Ларін**). Ними розроблено один із можливих підходів до розв'язку задачі синтезу систем керування рухом крокуючого апарата, який розглядається як система зі змінними в'язями. Описано ударні процеси при накладанні нових в'язей (зміна опорних кінцівок, перехід від одноопорної до двоопорної фази руху). Досліджені алгоритми керування нестационарними режимами руху (зрушення й зупинка, зміна програми руху, рух за заданою доріжкою, ходьба східцями тощо), розглянуті питання оптимізації цих алгоритмів (В.Б. Ларін, Б.А. Бордюг, К.І. Науменко, А.Г. Тимошенко).

Широкий спектр наукових досліджень і результатів із МПМ до 1990 року був обумовлений істотним збільшенням наукового потенціалу Інституту математики і його наукових відділів. Так, наприклад, у відділі динаміки та стійкості багатовимірних систем, одному з трьох відділів, у яких велися дослідження за прикладними напрямками, наприкінці 1988 року працювало 4 докторів і 5 кандидатів наук. Збільшення числа наукових працівників відділу відбувалося, здебільшого, завдяки виконанню відділом додаткових науково-дослідних робіт за державним замовленням. На виконання тем Комітет науки і техніки СРСР виділяв на поповнення штатного складу відділу цільове бюджетне фінансування в розмірі 8-ми посад старшого наукового співробітника. Треба відзначити особливі умови фінансування теми: *виділене фінансування цієї теми залишалось у бюджеті Інституту математики "довічно"*.

Важливим фактором, що сприяв розвитку досліджень з МПМ в Інституті, було обрання у 1988 році його директором учня Ю.О. Миропольського академіка **Анатолія Михайловича Самойленка**, видатного математика, одного із провідних спеціалістів у галузі диференціальних рівнянь, якому також належить низка фундаментальних результатів в нелінійній механіці й теорії стійкості. У рамках досліджень у галузі *нелінійної механіки* було, зокрема, обгрунтовано метод усереднення для систем із повільно змінними частотами й доведено нові теореми про існування інтегральних многовидів резонансних коливних систем, досліджено поведінку динамічної системи в околі періодичної траєкторії, знайдено умови звідності системи в такому околі до системи зі квазіперіодичними коефіцієнтами. Розро-



Анатолій Михайлович Самойленко.

блено класифікацію динамічних систем, у яких можливі резонансні співвідношення між основними частотами, в основу якої покладена ідея про зависання розв'язку в околі резонансних точок; розвинуто конструктивну теорію збурень, яка використовує принцип усереднення (згладжування) асимптотичного представлення в розумінні Пуанкаре й ітераційні варіанти класичного методу Ляпунова–Пуанкаре¹⁶

Віктор Володимирович
Новицький.Олександр Миколайович
Тимоха.

Дослідження з МПМ в 1980–90 роки були зосереджені у трьох відділах Інституту математики — відділі звичайних диференціальних

¹⁶Результати викладені у трьох монографіях: "Багаточастотні коливання нелінійних систем"(1998 р., автори: А.М. Самойленко, Р.І. Петришин); "Введение в резонансную аналитическую динамику"(1999 р., автори: Ю.О. Митропольський, Є.О. Гребеніков, Ю.О. Рябов); "Математичні аспекти теорії нелінійних коливань"(2004 р., автори: А.М. Самойленко, Р.І. Петришин).

рівнянь і теорії коливань (завідувач відділу академік А.М. Самойленко; створений 1987 р., вказана назва з 2000 р.), відділі динаміки та стійкості багатовимірних систем (завідувач відділу І.О. Луковський), відділі аналітичної механіки (завідувач відділу В.М. Кошляков, з 2004 р. — **Віктор Володимирович Новицький**). 2016 року ці два відділи об'єднано в один із новою назвою “*Математичні проблеми механіки та теорії керування*”. З 2017 року завідувачем цього об'єднаного відділу є учень академіка І.О. Луковського, чл.-кор. НАН України **Олександр Миколайович Тимоха**.



Володимир Леонідович Макаров.

Важливою подією стало також створення 1998 року відділу обчислювальної математики, який очолив академік **Володимир Леонідович Макаров**. Це не тільки дало можливість започаткувати нові напрямки досліджень із обчислювальної механіки¹⁷ й виграти низку сумісних міжнародних наукових грантів, а й ініціювало ряд цікавих аналітичних досліджень, серед яких треба відзначити сумісні роботи академіків В.М. Кошлякова й В.Л. Макарова, присвячені якісним дослідженням систем звичайних диференціальних рівнянь, що виникають у гіроскопічних задачах. Зокрема, вони розглянули загальну задачу виключення неконсервативних позиційних структур із диференціальних рівнянь другого порядку з постійними матричними коефіцієнтами за припущень, що матриці дисипативних і неконсервативних позиційних структур можуть бути виродженими. За доволі

¹⁷Репрезентативною є книжка Gavrilyuk, I.P., Lukovsky, I.A., Makarov, V.L., Timokha, A.N. 2006 Evolutional problems of the contained fluid. Kiev: Publishing House of the Institute of Mathematics of NASU. – 2006. – 233 p.

загальних припущень доведено теореми, які дають необхідні й достатні умови існування перетворення Ляпунова, яке зводить вихідне рівняння до еквівалентного (в сенсі Ляпунова) автономного виду з симетричною матрицею позиційних сил.

Після розпаду 1991 року СРСР і проголошення незалежності України і сама країна, і її державний устрій змінилися. Природно, що відбулася й істотна корекція наукової тематики Інституту математики. Незважаючи на зацікавленість таких відомих інституцій, як КБ "Південне" і "Хартрон", обірвалося фінансування прикладних математичних програм, які були пов'язані з військово-промисловим комплексом і з космічними дослідженнями й технологіями. Це було характерним не лише для традиційної тематики інституту, а й для нових проривних напрямків досліджень, до яких належить створена у 1980-ті роки теорія *вібраційної гідродинаміки з вільною поверхнею*, яка належить академіку І.О. Луковському і чл.-кор. О.М. Тимосі. Ця теорія могла привести до принципово нових космічних технологій, серед яких отримання надчистих матеріалів, але брак коштів унеможливив її практичну перевірку й реалізацію наприкінці 1980-х років. Ідучи паралельним шляхом, відповідні систематичні експерименти на підтвердження положень такої теорії провів науковець-астронавт Тейлор Ванг на борту космічної лабораторії (США) 1996 р. Це призвело до часткової втрати наукового пріоритету, який вдалося частково відвоювати лише впродовж минулих п'яти років завдяки відповідним європейським експериментальним програмам і активній співпраці авторів із європейськими науковцями.

1980-ті роки, а також роки незалежності, незважаючи на брак фінансування, виявилися досить плідними для досліджень у галузі МПМ. Подальшого розвитку набув *модальний метод дослідження нелінійних коливань рідини* в баках різної геометричної форми, який запропонували І.О. Луковський, О.М. Тимоха, О.В. Солодун. На основі варіаційних принципів механіки й гіпотези Релея про природу сил тертя в рідині побудовано нелінійну математичну модель у задачах про вільні й вимушені коливання в'язкої нестисливої рідини під дією гравітаційних і інерційних сил (І.О. Луковський). Разом із науковцями з Норвегії¹⁸ й ФРН проведено цілеспрямовані дослідже-

¹⁸Стаття Faltinsen O.M., Rognebakke O.F., Lukovsky I.A., Timokha A.N. "Multi-dimensional modal analysis of nonlinear sloshing in a rectangular tank with finite water depth" (Journal of Fluid Mechanics, **407**, p. 201–234) стала найцитованішою статтею за участю науковців Інституту математики за всю його історію (згідно

ння щодо типу резонансних нелінійних усталених рухів рідини в контейнерах різної геометрії. Дослідження за цим науковим напрямком також висвітлені в монографіях: “Введение в нелинейную динамику твёрдого тела с полостями, содержащими жидкость” (1990, І.О. Луковський), “Вариационные методы в нелинейных задачах динамики ограниченного объёма жидкости” (1995, І.О. Луковський, О.М. Тимоха), “Колебания жидкости в подвижных емкостях с перегородками” (2006, В.А. Троценко), “Sloshing” (2009, О.М. Тимоха, О. Faltinsen; Cambridge University Press), “Математические модели нелинейной динамики твердых тел с жидкостью” (2010, І.О. Луковський), “Nonlinear dynamics. Mathematical models for rigid bodies with a liquid” (2015, І.О. Луковський; De Gruyter). За цикл досліджень із математичних проблем аналітичної механіки суцільних середовищ І.О. Луковському й О.М. Тимосі присуджена премія ім. академіка М.М. Крилова НАН України за 2001 рік. 2012 р. разом зі групою інших науковців О.М. Тимоха отримав Державну премію України в галузі науки і техніки, а І.О. Луковський — премію НАН України імені академіків М.М. Боголюбова і М.О. Лаврентьєва.



Олексій Григорович Мазко.

В роботах **Олексія Григоровича Мазка** 1980–2000 років побудовано аналоги матричного рівняння Ляпунова для широкого класу лінійних динамічних систем. Застосовуючи оператори Крейна–Далецького, максимально узагальнено теореми Ляпунова й Островського–Шнайдера про локалізацію спектра матриці. Узагальнене рівняння Ляпунова застосовано в задачах стабілізації й оптимізації си-

Scopus).

стем керування за умов розміщення спектра в заданій області. Розвиваючи матричні інтерпретації другого методу Ляпунова, створено *узагальнену теорію інерції лінійних матричних рівнянь*. Узагальнено результати Хілла і Шнайдера про розподіл спектра матричних сімей, а також деякі класичні результати з матричного аналізу, зокрема закон інерції Сільвестра і формули для рангу й інерції блокових матриць. Сформульовано блочні спектральні задачі для матричних функцій, описано їхній зв'язок із узагальненим рівнянням Ляпунова і структурою розв'язків динамічних систем і, як наслідок, побудовано алгебраїчні критерії стійкості й локалізації спектра вироджених диференціальних і різницевих систем довільного порядку й лінійних систем із запізненням. Узагальнено теореми типу Томсона–Тета–Четаєва про стійкість механічних систем у формі Лагранжа. У співпраці з фахівцями Білоруського теплоенергетичного інституту і Київського технічного університету розроблено комплекс програм аналізу стійкості електроенергетичних систем, реалізований у Міністерстві енергетики Білорусі впродовж 1997–2002 рр. Роботи О.Г. Мазка 2000–2010 рр. присвячено *теорії динамічних систем у напівупорядкованому просторі*. Узагальнені класи позитивних і монотонних систем у банаховому просторі описано в термінах лінійних функціоналів і похідних за конусом від нелінійних операторів. У термінах позитивно оборотних операторів встановлено умови експоненціальної стійкості станів рівноваги лінійних і нелінійних позитивних систем. Розроблено метод побудови інваріантних множин динамічних систем у вигляді конусних нерівностей. Метод векторних функцій Ляпунова узагальнено як принцип порівняння за конусом сімей динамічних систем. Останні роботи О.Г. Мазка присвячено сучасним проблемам *теорії керування*. Розроблено нові методи робастної стабілізації за виходом неперервних і дискретних систем керування. Встановлено критерії робастної стійкості й оцінки квадратичних критеріїв якості нелінійних систем керування з матрично-функціональними невизначеностями. Узагальнено задачу H_∞ -оптимізації керованих систем з критеріями якості, що характеризують зважений рівень гасіння зовнішніх і початкових збурень. Запропоновано алгоритми побудови H_∞ -оптимальних динамічних регуляторів, що зводяться до розв'язання лінійних матричних нерівностей. Ці результати дозволяють будувати стабілізуючі регулятори в системах керування, які гарантують високу надійність їх функціонування в реальних умовах. Основні наукові здобутки О.Г. Мазка відзначено Державною премією

України в галузі науки і техніки (2008) і премією НАН України ім. М.В. Остроградського (2018). Він є автором трьох монографій¹⁹

У дослідженнях О.Н. Комаренка для *загальної задачі трансмісії* (крайової задачі з розривними коефіцієнтами) побудовано аналог спектральної теорії. Доведено теореми про ізоморфізм (взаємно однозначне відображення) для таких задач із операторами різних порядків за умов спряження. Ця теорія застосовується, зокрема, при розв'язанні задач фільтрації рідини в середовищах неоднорідної густини.



Володимир Антонович Троценко.

Юрій Володимирович Троценко.

У працях **Володимира Антоновича Троценка** і **Юрія Володимировича Троценка** розвинуто варіаційний метод розв'язання задачі про вільні *коливання оболонок обертання*, який має однако-ву збіжність як при середніх, так і при малих значеннях відносної товщини оболонок. Координатні функції в методі Рітца будуються з урахуванням структури формальних асимптотичних розкладів фундаментальної системи розв'язків в околі особливих точок вихідної системи диференціальних рівнянь. Отриманий алгоритм розрахунку власних коливань оболонки забезпечує збіжність у рівномірній матриці як самих розв'язків, так і їхніх перших чотирьох похідних у всій області інтегрування рівнянь. У дослідженнях Ю.В. Троценка побудована загальна математична модель динамічної взаємодії оболонок обертання зі приєднаним до одного з її торців абсолютно твердим тілом скінченних розмірів. Запропоновано метод побудови наближе-

¹⁹“Локализация спектра и устойчивость динамических систем” (1999), “Matrix equations, spectral problems and stability of dynamic systems” (2008, Cambridge Scientific Publishers Ltd), “Робастная устойчивость и стабилизация динамических систем. Методы матричных и конусных неравенств” (2016).

них розв'язків задачі на власні значення, яка виникає при цьому. Досліджено границі застосувань спрощених постановок розглядуваної задачі, які базуються на балковій апроксимації згинних коливань оболонок. Творчі здобутки В.А. Троценка 1970–80 років підсумовано в монографії “Взаимодействие тонкостенных упругих элементов с жидкостью в подвижных полостях” (И.А. Луковский, В.А. Троценко, В.И. Усюкин; АН УССР, Ин-т математики. — Киев: Наук. думка, 1989. — 239 с.).



Михайло Якимович Барняк.

У роботах **Михайла Якимовича Барняка** отримано серію результатів із математичних проблем гідромеханіки невагомості, розвинуто унікальні наближено-аналітичні методи побудови розв'язків задачі про власні коливання ідеальної рідини в посудинах складної форми за допомогою кусково-гармонійних функцій, які неперервні в області, а їхні перші частинні похідні можуть витримувати розрив на поверхнях розділу підобластей, а також системи гармонійних функцій, які задовольняють умову непротікання на сферичній поверхні крім верхнього полюса. М.Я. Барняк запропонував варіаційний метод побудови розв'язків задачі про власні коливання фізичного маятника з порожниною, частково заповненою рідиною, а також багатопаровою рідиною. Він запропонував методи дослідження властивостей розв'язків крайових спектральних задач, які описують власні *коливання в'язкої рідини* в осесиметричних порожнинах, і алгоритми побудови наближених розв'язків цих задач задовільних значень коефіцієнтів об'ємної в'язкості, а також за врахування поверхневої в'язкості.

У *прикладній теорії гіроскопів і теорії інерціальної навігації* роз-

роблено методи дослідження стійкості важкого твердого тіла, яке обертається навколо своєї осі, зокрема метод пружинно-масової аналогії й енергетичний метод; на основі непозиційної системи залишкових класів досліджено різноманітні задачі (серед них і задачі стійкості) систем інерціальної навігації напіваналітичного типу з використанням елементів скінченних поворотів, параметрів Кейлі-Клейна і стереографічного проектування; розроблено методи структурної декомпозиції й керування гіроскопічними системами; обґрунтовано допустимість застосування рівнянь прецесійної теорії до нестационарних гіроскопічних систем (О.Ю. Ішлінський, В.О. Стороженко, М.Є. Темченко, В.М. Кошляков, С.П. Сосницький, С.М. Онищенко, В.В. Новицький, К.І. Науменко)²⁰.

В роки незалежності продовжено дослідження з динаміки підвішеного на струні твердого тіла, що обертається з великою кутовою швидкістю²¹, і розпочато дослідження особливостей біфуркаційних процесів у системі підвішених, динамічно симетричних і несиметричних твердих тіл, які послідовно зв'язані між собою за допомогою шарнірів Кардана-Гука ("струнний" підвіс) і швидко обертаються. Побудовано знаковизначений інтеграл для системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з гіроскопічними членами, аналогічно до гіроскопічного інтегралу М.Г. Четаєва, побудованому раніше для простішої системи диференціальних рівнянь. 1996 р. О.Ю. Ішлінський, В.О. Стороженко і М.Є. Темченко удостоєні Державної премії Російської федерації в галузі науки і техніки.

Результати з математичної теорії стійкості руху динамічних систем при стохастичних збуреннях параметрів та інших систем у 1988—2011 роки поповнились такими досягненнями (Д.Г. Коренівський)²². За допомогою методу стохастичних функціоналів Ляпунова-

²⁰Результати досліджень частково опубліковані в монографії О.Ю. Ішлінського, В.О. Стороженко і М.Є. Темченко "Исследование устойчивости сложных механических систем" (2002 р., розділи 4, 5) і в книжці "Керування гіроскопічними системами та інші задачі аналітичної механіки" (2008 р., автор В.В. Новицький).

²¹ Результати досліджень відображені в монографіях: "Исследование устойчивости сложных механических систем" (2002 р., автори: О.Ю. Ішлінський, В.О. Стороженко, М.Є. Темченко), "Стационарные движения в задаче определения главных осей инерции неоднородных твердых тел" (2007 р., автор В.О. Стороженко).

²²Монографії "Дестабилизирующий эффект параметричного белого шума в непрерывных та дискретных динамических системах" (2006), "Дестабилизирующий эффект параметрического белого шума в непрерывных и дискретных динамических системах" (2008), "Стойкость развязков систем разностных уравнений при стохастических

Красовського й апарата матричних алгебраїчних рівнянь Сільвестра розроблено коефіцієнтні критерії абсолютної (за сталим запізненням аргумента) асимптотичної стійкості в середньому квадратичному динамічних систем із запізненням, математичними моделями яких є системи лінійних і спеціальних квазілінійних (Лур'є–Постнікова) диференціально-різницевих рівнянь запізнювального і нейтрального типів зі збуреними стохастичним процесом типу “білого” шуму коефіцієнтами. За допомогою матричних рівнянь Сільвестра виявлено і досліджено дестабілізуючий ефект параметричних збурень типу “білого” шуму в лінійних, спеціальних квазілінійних й істотно нелінійних неперервних і дискретних динамічних системах.



Степан Петрович Сосницький.



Сергій Михайлович Онищенко.

Наукова діяльність **Степана Петровича Сосницького** присвячена теорії стійкості динамічних систем: гіроскопічних, консервативних і систем небесної механіки. Зокрема, досліджено вплив параметричного резонансу на функціонування гіроскопічних компасів. Згодом ці дослідження узагальнено на більш широкі класи параметрично збурюваних динамічних систем, зокрема, на граничні випадки параметричних збурень, коли вони зі плином часу змінюються або дуже повільно, або дуже швидко. Досліджено стійкість рівноваги квазілінійних систем у стандартній формі Боголюбова, виокремлено класи систем, для яких удається визначити порогове значення малого параметра, що забезпечує на нескінченному інтервалі часу якісну

збуреннях їх коефіцієнтів. Алгебраїчні критерії” (2010), “Устойчивость решений систем дифференциальных уравнений при возмущениях их коэффициентов белым и цветным шумами. Алгебраические критерии” (2012).

відповідність між розв'язками вихідної системи рівнянь і розв'язками усередненої системи. Для дослідження стійкості консервативних систем застосовано як певний аналог функції Ляпунова функцію дії за Гамільтоном. За її допомогою встановлено умови обернення відомих теорем Лагранжа–Діріхле й Рауса і, як наслідок, запропоновано просте доведення відомої теореми Ірншоу про нестійкість статичної конфігурації електричних зарядів. Виокремлено клас неголомомних систем, для яких існує інтегральний інваріант. Доведено орбітальну нестійкість лагранжевих розв'язків у задачі трьох тіл. Введено поняття дистальності руху в задачі трьох тіл і показано важливість цієї властивості, коли мова йде про обмеженість руху. Отримано достатні умови стійкості руху за Лагранжем та Хіллом у загальному випадку задачі трьох тіл. У випадку обмеженої кругової задачі трьох тіл, коли виконується умова Хілла, доведено обмеженість руху тіла з малою масою у просторовому й у плоскому випадках. У випадку обмеженої плоскої еліптичної задачі трьох тіл отримано достатні умови стійкості руху за Лагранжем тіла з малою масою. Він є автором монографії

23

У математичній теорії керування динамічними системами запропоновано і розроблено новий конструктивний метод “жорсткого” синтезу нелінійних систем стабілізації, досліджено його можливості й ефективність реалізації для задач спостереження нелінійних систем за умов невизначеності, оптимальної стабілізації математичного маятника у верхньому (нестійкому) стані рівноваги, стабілізатора напруження, кутової оптимальної стабілізації штучного супутника Землі “Січ-2” (Сергій Михайлович Онищенко).

Зараз дослідження з МПМ зосереджені переважно у відділі математичних проблем механіки та теорії керування (зав. відділу — членкор. О. М. Тимоха), що тісно співпрацює щодо актуальних проблем обчислювальних методів механіки з відділом обчислювальної математики (зав. відділу — академік В. Л. Макаров). Працює сумісний науковий семінар “Математичні проблеми механіки та обчислювальна математика”, який очолюють академіки І. О. Луковський і В. Л. Макаров.

І. О. Луковський, О. Г. Мазко, О. М. Тимоха
Інститут математики НАН України, Київ

²³ “Функція дії за Гамільтоном та стійкість руху консервативних систем” (2002).