

Свободные колебания произвольных оболочек вращения переменной толщины*

Ю. В. Троценко

Институт математики НАН Украины, Киев; trots@imath.kiev.ua

A variational formulation of the problem on the free oscillations of arbitrary shells of revolution with variable thickness is given. An algorithm for solving the is proposed based on the Ritz method. As an example, free oscillations of the truncated conical shell with the clamped ends are considered.

Наведено варіаційне формулювання задачі про власні коливання довільних оболонок обертання зі змінною товщиною. Запропоновано алгоритм її розв'язування, який базується на основі методу Рітца. Як приклад розглянуто розрахунок власних коливань зрізаної конічної оболонки з жорстко закріпленими торцями.

Введение

В современном машиностроении и строительстве широко применяются конструкции, при моделировании и расчёте которых используются различного рода оболочечные элементы. Особое место здесь занимают тонкие упругие оболочки вращения. Определение частот и форм свободных колебаний как основных характеристик оболочек является первым этапом их динамического расчёта.

Разработке численных методов решения задач о колебаниях оболочек различного вида посвящены монографии Я.М. Григоренко, Е.И. Беспаловой, А.Б. Китайгородского, А.И. Шинкаря [1], А.В. Кармишина, В.А. Ляскова, В.И. Мяченкова, А.Н. Фролова [2], В.И. Мяченкова, В.И. Григорьева [3].

*Работа выполнена при частичной поддержке НИР № 0117U004077.

В работе [4] рассматривается задача о собственных колебаниях цилиндрической оболочки с переменной толщиной $h(s)$ по образующей. Для её решения предлагается разбить интервал интегрирования исходных уравнений на конечное число подинтервалов. При этом зависимость $h = h(s)$ заменяется кусочно-постоянной функцией. Решение исходной задачи сводится к построению общих решений уравнений для каждого участка с постоянной толщиной оболочки и подстановкой этих решений в граничные условия на торцах оболочки и в условия сопряжения решений на смежных границах введённых подобластей. Условия сопряжения обеспечивают непрерывность геометрических и силовых факторов. В результате этого решение спектральной задачи сводится к решению системы алгебраических уравнений, порядок которой зависит от числа разбиений интервала интегрирования исходных уравнений. Основной трудностью при таком подходе является построение общих интегралов в подобластях, структура которых зависит от корней соответствующего характеристического уравнения, меняющихся при изменении параметров оболочки и частоты собственных колебаний.

Эффективность использования вариационного метода к решению спектральных задач теории оболочек постоянной толщины продемонстрирована в работах [5], [6].

В настоящей работе применяется метод Ритца к решению задачи о собственных колебаниях тонкостенной произвольной оболочки вращения с толщиной $h(s)$, непрерывно изменяющейся по образующей. Изменения толщины оболочки в окружном направлении не происходят.

1 Постановка задачи

Рассмотрим тонкостенную упругую оболочку, срединная поверхность которой является поверхностью вращения (рис. 1).

У такой оболочки линиями главных кривизн будут её меридианы и параллели. В соответствии с этим срединную поверхность оболочки отнесём к ортогональной системе криволинейных координат s и φ , где φ — полярный угол, отсчитываемый от оси Ox по часовой стрелке, если смотреть в сторону увеличения координаты z , s — длина дуги меридиана, отсчитываемая от некоторой начальной параллели (или полюса для замкнутой оболочки).

Проекция перемещения точек срединной поверхности на положи-

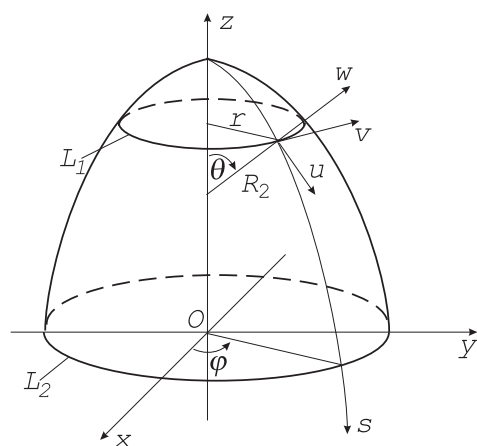


Рис 1. Оболочка вращения.

тельные направления меридиана и параллели, а также на внешнюю нормаль к поверхности оболочки обозначим через u , v и w соответственно.

Предположим в дальнейшем, что перемещения настолько малы, что можно пренебречь членами второго и более высокого порядка малости по сравнению с линейными. Будем считать также, что для оболочки справедливы гипотезы Кирхгофа–Лява.

Уравнения равновесного состояния оболочки, находящейся под действием сил инерции, можно получить с использованием какого-либо вариационного принципа механики. Такой подход позволит сформулировать вариационную постановку задачи, которая будет использована в дальнейшем при построении её приближённого решения.

Воспользуемся принципом возможных перемещений, согласно которому

$$\delta\Pi = \delta A, \quad (1)$$

где $\delta\Pi$ — вариация потенциальной энергии упругой деформации оболочки, δA — работа сил инерции на возможных перемещениях, кото-

рая может быть представлена в следующем виде:

$$\delta A = - \iint_{\Sigma} \rho h \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} \cdot \delta \vec{U} d\Sigma, \quad (2)$$

где Σ , ρ и $h = h(s)$ — срединная поверхность, плотность материала и толщина оболочки соответственно, \vec{U} — вектор с компонентами u , v и w .

Вариацию потенциальной энергии деформации срединной поверхности оболочки можно представить в виде [8]:

$$\delta \Pi = \iint_{\Sigma} (T_1 \delta \varepsilon_1 + T_2 \delta \varepsilon_2 + S \delta \omega + M_1 \delta \kappa_1 + M_2 \delta \kappa_2 + 2H \delta \tau) d\Sigma. \quad (3)$$

Здесь:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2); & T_2 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1); \\ M_1 &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\kappa_1 + \nu \kappa_2); & M_2 &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\kappa_2 + \nu \kappa_1); \\ S &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \omega; & H &= \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \tau; \end{aligned} \quad (4)$$

E и ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки соответственно. Компоненты тензора деформаций срединной поверхности оболочки ε_1 , ε_2 , κ_1 , κ_2 , ω , τ связаны с компонентами вектора перемещений следующими соотношениями [8]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R_1}; & \varepsilon_2 &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\cos \theta}{r} u + \frac{\sin \theta}{r} w; \\ \omega &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\cos \theta}{r} v; & \kappa_1 &= -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{u}{R_1} \right); \\ \kappa_2 &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{u}{R_1}; \\ \tau &= -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{R_1 \partial \varphi} - \frac{\cos \theta \sin \theta}{r^2} v + \frac{\cos \theta}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial v}{\partial s}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $R_1(s)$ — радиус кривизны меридиана оболочки; $\theta(s)$ — угол, образованный нормалью к срединной поверхности и осью вращения

оболочки Oz ; $r(s)$ — радиус окружности, образованной параллельными оболочками.

Далее рассмотрим незамкнутую оболочку вращения, ограниченную контурами L_1 и L_2 , как показано на (рис. 1).

Воспользовавшись формулами интегрирования по частям для двойных интегралов, после ряда преобразований с учётом соотношений (2) – (5) вариационное уравнение (1) можно представить в следующей форме:

$$\begin{aligned}
& \iint_{\Sigma} \left[\left(-\frac{\partial T_1}{\partial s} + \frac{\cos \theta}{r} (T_2 - T_1) - \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial \varphi} - \frac{1}{r R_1} \frac{\partial}{\partial s} (M_1 r) + \right. \right. \\
& + M_2 \frac{\cos \theta}{r R_1} - \frac{2}{r R_1} \frac{\partial H}{\partial \varphi} \Big) \delta u + \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} - \frac{\partial S}{\partial s} - \frac{2 \cos \theta}{r} S - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial M_2}{\partial \varphi} - 2H \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial s} (H \sin \theta) \right) \delta v + \\
& \quad + \left(\frac{T_1}{R_1} + T_2 \frac{\sin \theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial s^2} (M_1 r) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 M_2}{\partial \varphi^2} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s} (M_2 \cos \theta) - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 H}{\partial s \partial \varphi} - \frac{2 \cos \theta}{r^2} \frac{\partial H}{\partial \varphi} \right) \delta w \Big] d\Sigma + \\
& \quad + \oint_{L_2} \left[\left(T_1 + \frac{M_1}{R_1} \right) \delta u + \left(S + 2H \frac{\sin \theta}{r} \right) \delta v + \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s} (M_1 r) - M_2 \frac{\cos \theta}{r} + \frac{2}{r} \frac{\partial H}{\partial \varphi} \right) \delta w - M_1 \frac{\partial \delta w}{\partial s} \right] dL_2 - \\
& \quad - \oint_{L_1} \left[\left(T_1 + \frac{M_1}{R_1} \right) \delta u + \left(S + 2H \frac{\sin \theta}{r} \right) \delta v + \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s} (M_1 r) - M_2 \frac{\cos \theta}{r} + \frac{2}{r} \frac{\partial H}{\partial \varphi} \right) \delta w - M_1 \frac{\partial \delta w}{\partial s} \right] dL_1 = \\
& \quad = - \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \delta v + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \right) \rho h r ds d\varphi. \quad (6)
\end{aligned}$$

Учитывая независимость вариаций δu , δv и δw в области Σ , из вариационного уравнения (6) получим три уравнения, которые описывают движение оболочки под воздействием её инерционных сил. Если в этих уравнениях перейти от усилий к перемещениям согласно

формулам (4) и (5), то получим уравнения относительно перемещений u , v и w , которые ввиду их достаточной громоздкости здесь не приводятся. Из уравнения (6) следуют также и граничные условия задачи. Так, в случае жёсткого крепления края оболочки будем иметь

$$u = v = w = \frac{\partial w}{\partial s} = 0. \quad (7)$$

Соответственно на свободном краю оболочки должны выполняться граничные условия

$$\begin{aligned} T_1 = 0, \quad M_1 = 0, \quad S + 2H \frac{\sin \theta}{r} = 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s} (M_1 r) - M_2 \frac{\cos \theta}{r} + \frac{2}{r} \frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

В других случаях крепления края оболочки используются линейные комбинации условий (7) и (8).

Следует особо отметить, что наиболее сложные силовые граничные условия (8) являются естественными граничными условиями для соответствующего функционала. Следовательно, поиск его минимума можно осуществлять на классе функций, удовлетворяющих лишь кинематические граничные условия.

2 Построение решений

Малость параметров движения оболочки и её симметрия позволяют общее движение разложить на независимые составляющие в направлении и вокруг продольной оси, а также в двух взаимно перпендикулярных плоскостях Oxz и Oyz . В дальнейшем будем рассматривать поперечные колебания оболочки в одной из плоскостей симметрии, в качестве которой, в частности, примем плоскость Oxz . В этом случае перемещения срединной поверхности оболочки будем искать в виде:

$$\begin{aligned} u(s, \varphi, t) &= e^{i\omega t} U_n(s) \cos n\varphi, \\ v(s, \varphi, t) &= e^{i\omega t} V_n(s) \sin n\varphi, \\ w(s, \varphi, t) &= e^{i\omega t} W_n(s) \cos n\varphi, \end{aligned} \quad (9)$$

где n — число волн в окружном направлении оболочки.

Перейдём к безразмерным величинам, которые связаны с соответствующими размерными величинами следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \{U_n, V_n, W_n\} &= R_0\{\bar{U}_n, \bar{V}_n, \bar{W}_n\}; \quad \{r, s, R_1\} = R_0\{\bar{r}, \bar{s}, \bar{R}_1\}; \\ c^2(s) &= \frac{h^2(s)}{12R_0^2}; \quad \tilde{h}(s) = \frac{h(s)}{h_0}; \quad \bar{\omega}^2 = \frac{R^2\rho(1-\nu^2)}{E}\omega^2, \end{aligned} \quad (10)$$

где R_0 — радиус ограничивающей оболочку контура L_1 , h_0 — некоторая толщина оболочки (например, на контуре L_1).

Далее, для сокращения записи, чёрточку над безразмерными величинами начнём опускать. Предположим также, что края оболочки жёстко закреплены.

Тогда вариационное уравнение задачи об установившихся свободных колебаниях незамкнутой оболочки вращения можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_0^{l_s} \tilde{h} \left[\Psi_{11}(U_n, \delta U_n) + \Psi_{12}(V_n, \delta U_n) + \Psi_{13}(W_n, \delta U_n) + \right. \\ &\quad \left. + \Psi_{12}(\delta V_n, U_n) + \Psi_{22}(V_n, \delta V_n) + \Psi_{23}(W_n, \delta V_n) + \right. \\ &\quad \left. + \Psi_{13}(\delta W_n, U_n) + \Psi_{23}(\delta W_n, V_n) + \Psi_{33}(W_n, \delta W_n) \right] r ds - \\ &\quad - \omega^2 \int_0^{l_s} \tilde{h}(U_n \delta U_n + V_n \delta V_n + W_n \delta W_n) r ds = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где l_s — длина оболочки по координате s . Введённые здесь дифференциальные операторы $\Psi_{ij}(p, q)$, где p и q — произвольные функции, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \Psi_{11}(p, q) &= \left(\frac{\cos^2 \theta}{r^2} + \frac{\nu_1 n^2}{r^2} + \frac{c^2 \cos^2 \theta}{r^2 R_1^2} + \frac{2(1-\nu)c^2 n^2}{r^2 R_1^2} \right) pq + \\ &\quad + \left(\frac{dp}{ds} + \frac{\nu \cos \theta}{r} p \right) \frac{dq}{ds} + \frac{\nu \cos \theta}{r} \left[\frac{dp}{ds} + \frac{c^2}{R_1} \frac{d}{ds} \left(\frac{p}{R_1} \right) \right] q + \\ &\quad + c^2 \left[\frac{d}{ds} \left(\frac{p}{R_1} \right) + \frac{\nu \cos \theta}{r R_1} p \right] \frac{d}{ds} \left(\frac{q}{R_1} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_{12}(p, q) &= \frac{n \cos \theta}{r^2} \left(1 + \frac{c^2 \sin \theta}{r R_1} \right) pq + \frac{\nu n}{r} \left[\frac{dq}{ds} + \frac{c^2 \sin \theta}{r} \frac{d}{ds} \left(\frac{q}{R_1} \right) \right] p + \\ &\quad + \left[\left(\frac{\nu_1 n}{r} + \frac{2(1-\nu)c^2 n \sin \theta}{r^2 R_1} \right) \left(\frac{\cos \theta}{r} p - \frac{dp}{ds} \right) \right] q, \\ \Psi_{13}(p, q) &= \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu \sin \theta}{r} \right) p \frac{dq}{ds} + \frac{\cos \theta}{r} \left(\frac{\sin \theta}{r} + \frac{\nu}{R_1} + \frac{c^2 n^2}{r^2 R_1} \right) pq - \\ &- c^2 \left(\frac{d^2 p}{ds^2} - \frac{\nu n^2}{r^2} p + \frac{\nu \cos \theta}{r} \frac{dp}{ds} \right) \frac{d}{ds} \left(\frac{q}{R_1} \right) - \frac{c^2 \cos \theta}{r R_1} \left(\frac{\cos \theta}{r} \frac{dp}{ds} + \nu \frac{d^2 p}{ds^2} \right) q + \\ &\quad + \frac{2(1-\nu)c^2 n^2}{r^2 R_1} \left(\frac{\cos \theta}{r} p - \frac{dp}{ds} \right) q, \\ \Psi_{22}(p, q) &= \frac{1}{r^2} \left(n^2 + \nu_1 \cos^2 \theta + \frac{c^2 n^2 \sin^2 \theta}{r^2} \right) pq - \frac{\nu_1 \cos \theta}{r} \left(\frac{dp}{ds} q + p \frac{dq}{ds} \right) + \\ &\quad + \nu_1 \frac{dp}{ds} \frac{dq}{ds} + \frac{2(1-\nu)c^2 \sin^2 \theta}{r^2} \left[\left(\frac{\cos \theta}{r} q - \frac{dq}{ds} \right) \left(\frac{\cos \theta}{r} p - \frac{dp}{ds} \right) \right], \\ \Psi_{23}(p, q) &= \left(\frac{n \sin \theta}{r^2} + \frac{\nu n}{r R_1} + \frac{c^2 n^3 \sin \theta}{r^4} \right) pq - \frac{c^2 n \sin \theta}{r^2} \left(\nu \frac{d^2 p}{ds^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\cos \theta}{r} \frac{dp}{ds} \right) q + 2(1-\nu)c^2 \left[\frac{n \sin \theta}{r^2} \left(\frac{dp}{ds} - \frac{\cos \theta}{r} p \right) \left(\frac{dq}{ds} - \frac{\cos \theta}{r} q \right) \right], \\ \Psi_{33}(p, q) &= c^2 \left[\frac{d^2 p}{ds^2} \frac{d^2 q}{ds^2} + \frac{\nu \cos \theta}{r} \left(\frac{d^2 p}{ds^2} \frac{dq}{ds} + \frac{d^2 q}{ds^2} \frac{dp}{ds} \right) - \frac{\nu n^2}{r^2} \left(\frac{d^2 p}{ds^2} q + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{d^2 q}{ds^2} p \right) + \frac{\cos^2 \theta + 2(1-\nu)n^2}{r^2} \frac{dp}{ds} \frac{dq}{ds} - \frac{n^2 \cos \theta (3-2\nu)}{r^3} \left(\frac{dq}{ds} p + \frac{dp}{ds} q \right) \right] + \\ &\quad + \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} + \frac{2\nu \sin \theta}{r R_1} + \frac{c^2 n^4 + 2(1-\nu)c^2 n^2 \cos^2 \theta}{r^4} \right) pq, \end{aligned}$$

где $\nu_1 = (1-\nu)/2$.

В случае применения технической теории оболочек [7] вместо приведённых выше формул следует воспользоваться следующими выражениями для $\Psi_{ij}(p, q)$:

$$\Psi_{11}(p, q) = \left(\frac{\cos^2 \theta}{r^2} + \frac{\nu_1 n^2}{r^2} \right) pq + \left(\frac{dp}{ds} + \frac{\nu \cos \theta}{r} p \right) \frac{dq}{ds} + \frac{\nu \cos \theta}{r} \frac{dp}{ds} q,$$

$$\Psi_{12}(p, q) = \left(\frac{n \cos \theta}{r^2} + \frac{\nu_1 n \cos \theta}{r^2} \right) pq + \frac{\nu n}{r} p \frac{dq}{ds} - \frac{\nu_1 n}{r} q \frac{dp}{ds},$$

$$\Psi_{13}(p, q) = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu \sin \theta}{r} \right) p \frac{dq}{ds} + \left(\frac{\cos \theta \sin \theta}{r^2} + \frac{\nu \cos \theta}{r R_1} \right) pq,$$

$$\Psi_{22}(p, q) = \left(\frac{n^2}{r^2} + \frac{\nu_1 \cos^2 \theta}{r^2} \right) pq + \left(\nu_1 \frac{dp}{ds} - \frac{\nu_1 \cos \theta}{r} p \right) \frac{dq}{ds} - \frac{\nu_1 \cos \theta}{r} \frac{dp}{ds} q,$$

$$\Psi_{23}(p, q) = \left(\frac{n \sin \theta}{r^2} + \frac{\nu n}{r R_1} \right) pq.$$

Выражение для $\Psi_{33}(p, q)$ остаётся без изменений.

Решения, удовлетворяющие уравнение (11), должны быть подчинены следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} U_n(0) = V_n(0) = W_n(0) &= \left. \frac{dW_n}{ds} \right|_{s=0} = 0; \\ U_n(l_s) = V_n(l_s) = W_n(l_s) &= \left. \frac{dW_n}{ds} \right|_{s=l_s} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Поиск минимума функционала, вариация которого представлена в форме (11), на классе функций, удовлетворяющих граничным условиям (12), будем осуществлять с помощью метода Ритца, согласно которому компоненты перемещений оболочки представим в виде конечных рядов следующего вида:

$$U_n(s) = \sum_{j=1}^N a_j u_j(s); \quad V_n(s) = \sum_{j=1}^N b_j v_j(s); \quad W_n(s) = \sum_{j=1}^N c_j w_j(s), \quad (13)$$

где a_j, b_j, c_j — подлежащие определению постоянные.

Координатные функции $u_j(s), v_j(s)$ и $w_j(s)$ выберем в форме:

$$\begin{aligned} u_j(s) = v_j(s) &= s(l_s - s) P_j \left(\frac{2s}{l_s} - 1 \right); \\ w_j(s) &= s^2(l_s - s)^2 P_j \left(\frac{2s}{l_s} - 1 \right), \\ j &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь $P_j(s)$ — смещённые на единицу по индексу j многочлены Лежандра, вычисление которых и их первых двух производных можно проводить с помощью рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned} P_{j+2}(s) &= \frac{1}{j+1} [(2j+1)sP_{j+1}(s) - jP_j(s)], \\ P'_{j+2}(s) &= sP'_{j+1}(s) + (j+1)P_{j+1}(s), \\ P''_{j+2}(s) &= sP''_{j+1}(s) + (j+2)P'_{j+1}(s), \\ P_1(s) &= 1; \quad P_2(s) = s, \quad (j = 1, 2, \dots, N-2). \end{aligned} \quad (15)$$

При таком представлении разложения (13) удовлетворяют граничным условиям (12) при любых значениях вектора

$$\vec{X} = [a_1, a_2, \dots, a_N, b_1, b_2, \dots, b_N, c_1, c_2, \dots, c_N].$$

При этом обеспечивается полнота и линейная независимость функций, входящих в разложения (13).

Компоненты вектора \vec{X} в дальнейшем определяются из условия стационарности соответствующего функционала I . При этом исходная задача сводится к решению однородной алгебраической системы

$$(A - \omega^2 B)\vec{X}^T = 0, \quad (16)$$

где \vec{X}^T — транспонированный вектор \vec{X} , A и B — симметричные матрицы порядка $3N$.

Элементы матриц A и B , которые расположены на главной диагонали и выше её, сможем вычислить по следующим формулам:

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= \int_0^{l_s} \tilde{h}\Psi_{11}(u_j, u_i) r ds, & a_{i,j+N} &= \int_0^{l_s} \tilde{h}\Psi_{12}(v_j, u_i) r ds, \\ a_{i,j+2N} &= \int_0^{l_s} \tilde{h}\Psi_{13}(w_j, u_i) r ds, & a_{i+N,j+N} &= \int_0^{l_s} \tilde{h}\Psi_{22}(v_j, v_i) r ds, \\ a_{i+N,j+2N} &= \int_0^{l_s} \tilde{h}\Psi_{23}(w_j, v_i) r ds, & a_{i+2N,j+2N} &= \int_0^{l_s} \tilde{h}\Psi_{33}(w_j, w_i) r ds, \end{aligned}$$

$$b_{i,j} = \int_0^{l_s} \tilde{h} u_j u_i r ds, \quad b_{i,j+N} = b_{i,j+2N} = b_{i+N,j+2N} = 0,$$

$$b_{i+N,j+N} = \int_0^{l_s} \tilde{h} v_j v_i r ds, \quad b_{i+2N,j+2N} = \int_0^{l_s} \tilde{h} w_j w_i r ds.$$

При выводе этих выражений было использовано представление для вариации функционала δI в форме (11), что обеспечило простоту их получения и значительные удобства при программировании предлагаемого алгоритма решения рассматриваемой задачи.

3 Некоторые результаты расчётов

В качестве примера использования предложенного подхода к решению задачи об определении собственных колебаний оболочек вращения с переменной толщиной ниже приведены некоторые результаты расчётов для усечённой конической оболочки с жёстко закреплёнными торцами. В этом случае получим:

$$s = \frac{l-z}{\cos \alpha}; \quad r(s) = 1 + s \sin \alpha; \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad \frac{1}{R_1} = 0, \quad (17)$$

где l и α — высота и угол полураствора усечённого конуса соответственно. Если в формулах (17) принять, что $\alpha = 0$, то получим цилиндрическую оболочку единичного радиуса.

В расчётах были использованы выражения для $\Psi_{ij}(p, q)$, полученные на основе технической теории оболочек. Кроме того, считалось, что толщина оболочки изменяется вдоль образующей по следующему закону

$$h(s) = h_0 \cdot 10^{\left(\frac{-as}{l}\right)},$$

где a — безразмерный параметр изменения толщины оболочки, h_0 — толщина оболочки при $s = 0$. Все вычисления проводились при $\nu = 0.3$ и $R_o/h_0 = 100$.

В таблице 1 представлены значения первых пяти частот колебаний оболочки ω_i , полученных при $l/R_0 = 1.0$, $n = 11$, $a = 1.0$ в зависимости от числа членов N в разложениях (13). Приведённые результаты

N	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
$\alpha = 0^\circ$					
6	.18436	.33959	.50507	.71254	.91233
7	.18384	.33869	.50168	.65204	.85254
8	.18350	.33821	.50067	.64619	.78346
9	.18332	.33788	.50027	.64484	.76729
10	.18322	.33772	.50005	.64389	.76637
11	.18317	.33765	.49998	.64378	.76333
13	.18314	.33762	.49995	.64374	.76303
14	.18314	.33762	.49994	.64374	.76301
15	.18314	.33762	.49994	.64374	.76301
$\alpha = 30^\circ$					
6	.13495	.24979	.37008	.51534	.64650
7	.13455	.24899	.36785	.47564	.61769
8	.13429	.24858	.36711	.47311	.57096
9	.13414	.24832	.36681	.47149	.56376
10	.13406	.24818	.36664	.47097	.56157
11	.13401	.24811	.36655	.47085	.55950
12	.13399	.24808	.36652	.47081	.55939
13	.13398	.24806	.36651	.47080	.55927
14	.13398	.24806	.36651	.47080	.55926
15	.13398	.24806	.36651	.47080	.55926

Таблица 1. Значения первых пяти частот колебаний оболочки ω_i , полученных при $l/R_0 = 1$, $n = 11$, $a = 1.0$ в зависимости от числа членов N в разложениях (13).

расчётов свидетельствуют о достаточно быстрой сходимости последовательностей Ритца (13). Изменение угла полураствора конуса α не влияет на скорость сходимости вычислительного процесса. Увеличение высоты l приводит к необходимости наращивания числа членов в разложениях (13) для сохранения заданной точности. Так, при $l = 10$ определение первых пяти частот с точностью до пяти значащих цифр обеспечивается при $N = 35$. При этом устойчивость вычислительного процесса сохраняется при удержании в разложениях до шестидесяти координатных функций без потери точности решения алгебраической системы (16). Это обстоятельство позволяет проводить расчёты частот и форм собственных колебаний с высокой точностью для

достаточно широкого диапазона входных параметров оболочки. Используемая подпрограмма для решения обобщённой алгебраической задачи (16) обеспечивает контроль за точностью её решения и получение всех её собственных значений и собственных векторов без каких-либо существенных затрат машинного времени.

n/S	4	6	7	8	*
10	.1923	.1893	.1886	.1882	.1871
11	.1908	.1864	.1855	.1850	.1831
12	.1940	.1885	.1874	.1867	.1843

Таблица 2. Значения частот ω_1 первого тона колебаний оболочки для различных значений чисел n , полученных при $l/R_0 = 1$, $a = 1.0$, $\alpha = 0^\circ$.

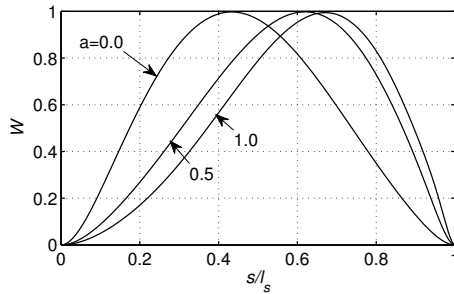


Рис 2. Поведение формы собственных колебаний W в зависимости от параметра a при $n = 11$, $l/R_0 = 1$ и $\alpha = 30^\circ$.

В таблице 2 сравниваются частоты, полученные с использованием численного метода (4) (Ю.Ю. Швейко) и в настоящей работе (обозначены звёздочкой). Здесь через S обозначено число равных по длине участков, на которые разбивался интервал $(0, l_s)$. Толщина оболочки на каждом из участков считалась постоянной и равной полусумме значений толщин на границах соответствующего участка (4). При этом считалось, что $l/R_0 = 1.0$, $a = 1.0$, $\alpha = 0^\circ$, а число волн в окружном направлении n варьировалось. Из таблицы 2 следует, что при принятых параметрах оболочки число n , отвечающее её мини-

мальной частоте, равно 11. Различие между приведенными данными составляет немногим более 1% и обусловлено, по-видимому, недостаточным количеством участков разбиения.

Поведение формы собственных колебаний W в зависимости от параметра a при $n = 11$, $l/R_0 = 1.0$ и $\alpha = 30^\circ$ показано на рис. 2. Значение $a = 0$ соответствует оболочке с постоянной толщиной по её образующей. Как и следовало ожидать, при увеличении параметра a наблюдается смещение координаты точки максимума формы в сторону уменьшения толщины оболочки. Аналогичная картина наблюдается и для форм колебаний U и V .

Таким образом, из приведенных результатов следует, что предложенный в настоящей работе метод расчёта собственных частот и форм колебаний произвольной оболочки вращения с переменной толщиной по её образующей обеспечивает необходимую для практических расчётов точность вычислительного процесса. Сопоставление полученных расчётных данных с данными, приведенными в работе [4], свидетельствует о достоверности получаемых результатов.

- [1] Григоренко Я. М., Беспалова Е. И., Китайгородский А. Б., Шинкарь А. И. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. — Киев, Наукова думка, 1986. — 172 с.
- [2] Кармишин А.В., Лясковец В.А., Мяченков В.И., Фролов А.Н. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. — М.: Машиностроение, 1975. — 376 с.
- [3] Мяченков В.И., Григорьев И.В. Расчет составных оболочечных конструкций на ЭВМ. — М.: Машиностроение, 1981. — 214 с.
- [4] Швейко Ю. Ю., Брусиловский А. Д. О собственных колебаниях цилиндрических оболочек, подкреплённых поперечными ребрами жесткости // Расчеты на прочность. — 1971. — Вып. 15. — С. 312–327.
- [5] Троценко В. А., Троценко Ю. В. Решение задачи о собственных колебаниях незамкнутой оболочки вращения в условиях ее сингулярного возмущения // Нелінійні коливання. — 2005. — Том. 8, № 3. — С. 415–432.
- [6] Троценко В. А., Троценко Ю. В. Равномерно сходящийся метод Ритца в задаче об осесимметричных колебаниях оболочки вращения в форме купола // Акустичний вісник. — 2008. — Том. 11, № 2. — С. 45–57.
- [7] Власов В. З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. — Москва, Ленинград, Гостехиздат, 1949. — 784 с.
- [8] Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. — Ленинград, Судостроение, 1962. — 431 с.