Збірник праць Інституту математики НАН України 2018, т. 15, № 1, 206–216

УДК 531.36;531.01

Про симетричні рухи в еліптичній обмеженій задачі трьох тіл*

С.П. Сосницький

Інститут математики НАН України, Київ; sosn@imath.kiev.ua

Within the framework of the elliptic restricted three-body problem, we find sufficient conditions for the boundedness (unboundedness) of the manifold of symmetric motions.

У рамках еліптичної обмеженої задачі трьох тіл ми знаходимо достатні умови обмеженості (необмеженості) многовиду симетричних рухів.

Вступ

Відомо, що обмежена задача трьох тіл (матеріальних точок) є доволі спрощеною моделлю руху трьох тіл [1, 2]. Разом з тим ця модель, особливо якщо взяти до уваги її еліптичний варіант, зберігає свою актуальність і нині, про що свідчить велика кількість практичних застосувань обмеженої задачі [1, 3–6]. Надалі зупинимось на симетричних рухах еліптичної обмеженої задачі. Це досить вузький, але дуже важливий клас рухів у рамках обмеженої задачі, оскільки саме ці рухи пов'язують з питанням існування осцилюючих фінальних еволюцій, що знайшло своє відображення у відомій роботі Сітнікова [7]. Сітніков якраз у рамках еліптичної обмеженої задачі трьох тіл у випадку, коли два з них мають рівні маси, довів існування осцилюючих рухів, що стало поштовхом для подальших досліджень у цьому напрямку в загальному випадку задачі трьох тіл [8–10].

Нижче, на відміну від робіт автора [11–13], де розглядалися симетричні рухи лише у загальному випадку задачі трьох тіл, зосередимо нашу увагу на еліптичній обмеженій задачі, досліджуючи, зокрема, умови обмеженості (необмеженості) симетричних рухів.

Отже, розглянемо випадок обмеженої задачі трьох тіл, коли вектори $\mathbf{r}_1$ і $\mathbf{r}_2$, як розв'язки задачі двох тіл, можуть відповідати як

*Робота виконана за часткового підтримкою НДР № 0117U004077.

круговим, так і еліптичним орбітам матеріальних точок з масами m_1 і m_2. Переходячи далі до відносних довжин векторів і розглядаючи рівняння обмеженої задачі як частинний випадок загальної задачі трьох тіл [16], отримуємо

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\rho}_1'' &= \mu \frac{\boldsymbol{\rho}_{12}}{|\boldsymbol{\rho}_{12}|^3}, \\
\boldsymbol{\rho}_2'' &= -(1-\mu) \frac{\boldsymbol{\rho}_{12}}{|\boldsymbol{\rho}_{12}|^3}, \\
\boldsymbol{\rho}_3'' &= -(1-\mu) \frac{\boldsymbol{\rho}_{13}}{|\boldsymbol{\rho}_{13}|^3} - \mu \frac{\boldsymbol{\rho}_{23}}{|\boldsymbol{\rho}_{23}|^3}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Тут $\boldsymbol{\rho}_{ij} = \boldsymbol{\rho}_j - \boldsymbol{\rho}_i$ $(i, j = 1, 2, 3)$, $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{r}_i / r_0$ (r_0 – сталий параметр, що має розмірність одиниці довжини), штрих означає диференціювання за безрозмірним часом

$$\tau = \frac{\sqrt{G(m_1 + m_2)}}{|\mathbf{r}_{12}|_0{}^{3/2}} t,$$

де $G > 0$ – гравітаційна стала, а

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad 0 < \mu \leq \frac{1}{2}.$$

Системі (1) також можна надати форми

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\rho}_{12}'' &= -\frac{\boldsymbol{\rho}_{12}}{|\boldsymbol{\rho}_{12}|^3}, \\
\boldsymbol{\rho}_3'' &= -(1-\mu) \frac{\boldsymbol{\rho}_{13}}{|\boldsymbol{\rho}_{13}|^3} - \mu \frac{\boldsymbol{\rho}_{23}}{|\boldsymbol{\rho}_{23}|^3}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Надалі поряд з рівняннями (1) і (2) використовуватимемо також рівняння руху обмеженої задачі у формі рівнянь відстаней [14]:

$$\rho_{12}^2{}'' = 2\left(v_{12}^2 - \frac{1}{\rho_{12}}\right),$$

$$\rho_{13}^2{}'' = 2v_{13}^2 - 2\frac{(1-\mu)}{\rho_{13}} + \frac{\mu}{\rho_{12}}\left(\frac{\rho_{23}^2 - \rho_{13}^2}{\rho_{12}^2} - 1\right) + \frac{\mu}{\rho_{23}}\left(\frac{\rho_{12}^2 - \rho_{13}^2}{\rho_{23}^2} - 1\right),$$

$$\rho_{23}^2{}'' = 2v_{23}^2 - 2\frac{\mu}{\rho_{23}} + \frac{(1-\mu)}{\rho_{12}}\left(\frac{\rho_{13}^2-\rho_{23}^2}{\rho_{12}^2}-1\right) + \frac{(1-\mu)}{\rho_{13}}\left(\frac{\rho_{12}^2-\rho_{23}^2}{\rho_{13}^2}-1\right),$$

$$v_{13}^2{}' + \frac{\rho_{13}^2{}'}{\rho_{13}^3} = -\mu\left[\rho_{13}^2{}'\left(\frac{1}{\rho_{12}^3}-\frac{1}{\rho_{13}^3}\right) + 2\boldsymbol{\rho}_{23}\boldsymbol{\rho}'_{13}\left(\frac{1}{\rho_{23}^3}-\frac{1}{\rho_{12}^3}\right)\right], \tag{3}$$

$$v_{23}^2{}' + \frac{\rho_{23}^2{}'}{\rho_{23}^3} = (1-\mu)\left[\rho_{23}^2{}'\left(\frac{1}{\rho_{23}^3}-\frac{1}{\rho_{12}^3}\right) + 2\boldsymbol{\rho}_{13}\boldsymbol{\rho}'_{23}\left(\frac{1}{\rho_{12}^3}-\frac{1}{\rho_{13}^3}\right)\right],$$

$$(\boldsymbol{\rho}_{23}\boldsymbol{\rho}'_{13})' = \frac{1}{2}(-v_{12}^2+v_{13}^2+v_{23}^2) - \frac{(1-\mu)}{2\rho_{13}}\left(1+\frac{\rho_{23}^2-\rho_{12}^2}{\rho_{13}^2}\right)$$
$$+\frac{\mu}{2\rho_{12}}\left(1+\frac{\rho_{23}^2-\rho_{13}^2}{\rho_{12}^2}\right) - \frac{\mu}{\rho_{23}},$$

де $\rho_{ij} = |\boldsymbol{\rho}_{ij}|, \quad v_{ij} = |\boldsymbol{\rho}'_{ij}|$.

Якщо взяти до уваги отримані автором раніше [14, 15] рівності

$$x = -\boldsymbol{\rho}_3\boldsymbol{\rho}_{12}, \quad y = -\boldsymbol{\rho}_3\boldsymbol{\rho}'_{12}, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{\rho}_{23}\boldsymbol{\rho}'_{13} = -y + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}_{23}^2{}' - \frac{1-\mu}{2}\boldsymbol{\rho}_{12}^2{}', \quad \boldsymbol{\rho}_{13}\boldsymbol{\rho}'_{23} = y + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}_{13}^2{}' - \frac{\mu}{2}\boldsymbol{\rho}_{12}^2{}', \tag{5}$$

$$\boldsymbol{\rho}_{12}\boldsymbol{\rho}_3 = \frac{1}{2}\left[(1-2\mu)\boldsymbol{\rho}_{12}^2 + \boldsymbol{\rho}_{13}^2 - \boldsymbol{\rho}_{23}^2\right], \tag{6}$$

то останні три рівняння системи (3) можна замінити на рівняння

$$v_{13}^2{}' + \frac{\rho_{13}^2{}'}{\rho_{13}^3} = -\mu\left[\left(\frac{2}{\rho_{13}}-\frac{2}{\rho_{23}}\right)' + 2y\left(\frac{1}{\rho_{12}^3}-\frac{1}{\rho_{23}^3}\right) + \frac{(\rho_{13}^2-\rho_{23}^2)'}{\rho_{12}^3}\right.$$
$$\left. -2(1-\mu)\left(\frac{1}{\rho_{12}}\right)' - (1-\mu)\frac{(\rho_{12}^2)'}{\rho_{23}^3}\right], \tag{7}$$

$$v_{23}^2{}' + \frac{\rho_{23}^2{}'}{\rho_{13}^3} = (1-\mu)\left[\left(\frac{2}{\rho_{13}}-\frac{2}{\rho_{23}}\right)' + 2y\left(\frac{1}{\rho_{12}^3}-\frac{1}{\rho_{13}^3}\right) + \frac{(\rho_{13}^2-\rho_{23}^2)'}{\rho_{12}^3}\right.$$
$$\left. +2\mu\left(\frac{1}{\rho_{12}}\right)' + \mu\frac{(\rho_{12}^2)'}{\rho_{13}^3}\right],$$

$$y' = -\frac{x}{\rho_{12}^3} + \frac{1}{2}\left[-(1-2\mu)v_{12}^2 + (v_{23}^2 - v_{13}^2)\right].$$

В подальшому залежно від обставин використовуватимемо будь-яку з систем (1)–(3).

1 Про многовид сииметричниих рухів для обмеженої задачі трьох тіл

За умови, що $m_1 = m_2$ й, відповідно, $\mu = 1/2$, приходимо до многовиду симетричних рухів:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}_{12}'' &= -\frac{\boldsymbol{\rho}_{12}}{|\boldsymbol{\rho}_{12}|^3}, \\ \boldsymbol{\rho}_3'' &= -\frac{\boldsymbol{\rho}_3}{|\boldsymbol{\rho}_{13}|^3}, \end{aligned} \tag{8}$$

на якому $|\boldsymbol{\rho}_{13}| = |\boldsymbol{\rho}_{23}|$ й виконується рівність

$$\boldsymbol{\rho}_3^2 = \frac{1}{4}\left(-\boldsymbol{\rho}_{12}^2 + 4\boldsymbol{\rho}_{13}^2\right). \tag{9}$$

Відповідно до структури системи (8), справедливі рівності

$$\boldsymbol{\rho}_{12} \times \boldsymbol{\rho}_{12}' = \mathbf{C_1}, \quad \boldsymbol{\rho}_3 \times \boldsymbol{\rho}_3' = \mathbf{C_2}, \tag{10}$$

де $\mathbf{C_1}, \mathbf{C_2}$ – сталі вектори, й, отже, маємо змогу якісне дослідження системи (8) звести до системи з двома ступенями вільності:

$$\begin{aligned} {\rho_{12}^2}'' &= 2v_{12}^2 - \frac{4\mu}{\rho_{12}}, \\ {\rho_3^2}'' &= 2v_3^2 - 2\frac{\rho_3^2}{\rho_{13}^3}, \end{aligned} \tag{11}$$

де $|\boldsymbol{\rho}_{12}| = \rho_{12}, |\boldsymbol{\rho}_{13}| = \rho_{13}, v_{12}^2 = \boldsymbol{\rho}_{12}'^2$, $v_3^2 = \boldsymbol{\rho}_3'^2$ і, в свою чергу,

$$\boldsymbol{\rho}_{12}'^2 = \rho_{12}'^2 + \frac{|\boldsymbol{\rho}_{12} \times \boldsymbol{\rho}_{12}'|^2}{\rho_{12}^2}, \tag{12}$$

$$\boldsymbol{\rho}_3'^2 = \rho_3'^2 + \frac{|\boldsymbol{\rho}_3 \times \boldsymbol{\rho}_3'|^2}{\rho_3^2}. \tag{13}$$

Якщо $\mathbf{C}_2 = \mathbf{0}$, то рух системи (11) зводиться до коливань малої частки вздовж осі, яка проходить через центр мас пари масивних тіл і перпендикулярна до площини, в якій рухається ця пара. Саме на цьому випадку ми зосередимо свою увагу далі. Зазначимо, що якраз при $\mathbf{C}_2 = \mathbf{0}$ Сітнікову вдалося виявити осцилюючі фінальні еволюції [7].

До системи (11) ми прийшли на підставі рівнянь (2). Якщо взяти за основу рівняння (3) і врахувати (7), то многовид симетричних рухів отримаємо у вигляді

$$\begin{gathered}
{\rho_{12}^2}'' = 2E_{12} + \frac{2}{\rho_{12}}, \\
{\rho_{13}^2}'' = 2E_{13} + \frac{2}{\rho_{13}} + \mu\left(-\frac{1}{\rho_{12}} + \frac{\rho_{12}^2}{\rho_{13}^3}\right), \\
E_{12}' = 0, \\
E_{13}' = -\frac{\mu}{2}{\rho_{12}^2}'\left(\frac{1}{\rho_{12}^3} - \frac{1}{\rho_{13}^3}\right),
\end{gathered} \tag{14}$$

де

$$\rho_{ij} = |\boldsymbol{\rho}_{ij}|, \quad v_{ij} = |\boldsymbol{\rho}_{ij}'|, \quad E_{12} = v_{12}^2 - \frac{2}{\rho_{12}}, \quad E_{13} = v_{13}^2 - \frac{2}{\rho_{13}}.$$

З урахуванням рівностей (10), (12) і (13) бачимо, що це також система з двома ступенями вільності.

Оперуючи різними формами многовиду симетричних рухів нескінченно малої частки, сподіватимемося, що зможемо повніше охопити їх характерні властивості.

2 Про умови обмеженості (необмеженості) многовиду симетричних рухів

Означення 1. Многовид симетричних рухів назвемо обмеженим, якщо рухи, які його формують, є обмеженими.

Означення 2. Многовид симетричних рухів назвемо необмеженим, якщо він містить хоча б один необмежений рух.

Розглянемо многовид симетричних рухів у формі (8). Помноживши обидві частини другого рівняння системи (8) на $2\boldsymbol{\rho}_3'$, отримаємо

$$(\boldsymbol{\rho}_3'^2)' = \frac{1}{4}\frac{{\rho_{12}^2}'}{\rho_{13}^3} + \left(\frac{2}{\rho_{13}}\right)'. \tag{15}$$

Введемо позначення

$$E_3 = v_3^2 - \frac{2}{\rho_{13}} \tag{16}$$

і проінтегруємо рівність (15). В результаті приходимо до рівності

$$E_3\Big|_{\tau_1}^{\tau_2} = \frac{1}{4}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{{\rho_{12}^2}'}{\rho_{13}^3} d\tau = \frac{1}{4}\left[\frac{\rho_{12}^2}{\rho_{13}^3}\Big|_{\tau_1}^{\tau_2} - \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \rho_{12}^2 \frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{\rho_{13}^3}\right) d\tau\right]. \tag{17}$$

Припустимо тепер, що в межах сегмента $[\tau_1, \tau_2]$ функція $\boldsymbol{\rho}_{13}^2$ монотонно зростає. Тоді, застосовуючи теорему про середнє [17], на підставі рівності (17) маємо

$$E_3\Big|_{\tau_1}^{\tau_2} = \frac{1}{4}\left[\frac{\rho_{12}^2}{\rho_{13}^3}\Big|_{\tau_1}^{\tau_2} - \rho_{12}^2(\tau*)\left(\frac{1}{\rho_{13}^3}\right)\Big|_{\tau_1}^{\tau_2}\right], \tag{18}$$

де $\tau* \in [\tau_1, \tau_2]$. Надалі рівність (18) зручно зобразити у вигляді

$$E_3\Big|_{\tau_1}^{\tau_2} = \frac{1}{4}\left[\frac{\rho_{12}^2(\tau_2) - \rho_{12}^2(\tau*)}{\rho_{13}^3(\tau_2)} + \frac{\rho_{12}^2(\tau*) - \rho_{12}^2(\tau_1)}{\rho_{13}^3(\tau_1)}\right]. \tag{19}$$

У розглядуваному випадку мала частка може здійснювати коливний рух навколо центра мас масивних тіл. При цьому амплітуда коливань може бути як обмеженою, так і необмеженою. Можливе також монотонне віддалення малої частки від центра мас на нескінченну відстань. В підсумку, оскільки $\mathbf{C}_2 = \mathbf{0}$, то $\boldsymbol{\rho}_3'^2(\tau) = \rho_3'^2(\tau)$ і, таким чином, $v_3^2 = \rho_3'^2$.

Вважаючи, що мала частка здійснює коливний рух навколо центра мас пари масивних тіл, розглянемо послідовність $\{(v_3^2)_n\}$ значень функції v_3^2 у точці $\rho_3^2 = 0$. Зв'яжемо з кожним номером n проміжок часу T_n, упродовж якого функція $\rho_3^2(\tau)$ монотонно зростає до моменту її максимуму, коли ${\rho_3^2}'(\tau) = 0$. Послідовність таких проміжків позначимо через $\{T_n\}$.

Згідно з рівністю (9) маємо

$$(\rho_{13}^2)' = (\rho_3^2)' + \frac{1}{4}(\rho_{12}^2)', \tag{20}$$

а отже, за достатньо малого ексцентриситету еліпса, який стосується пари масивних тіл, у відповідність послідовності$\{T_n\}$ можна поставити таку послідовність $\{T_n^*\}(n = 1, 2, 3, \dots)$, на елементах якої монотонно зростає функція $\boldsymbol{\rho}_{13}^2(\tau)$, $\rho_{13}^2 \in [\rho_{12}^2/4, \infty)$. Зрозуміло, що оскільки в точці максимуму функції $\rho_3^2(\tau)$ її похідна дорівнює нулю, то проміжки часу $\{T_n^*\}$ можуть бути коротшими, ніж T_n. Це безпосередньо випливає з рівності (20). Тому надалі зручно вважати, що $T_n^* \subseteq T_n$.

Твердження 1. *Нехай*

$$\lim_{n\to\infty} (v_3^2)_n = \tilde{v}^2 \tag{21}$$

і, крім того, виконується нерівність

$$\tilde{v}^2 - \frac{4}{\rho_{12}} \le -\delta, \quad 0 < \delta = const. \tag{22}$$

Тоді, якщо ексцентриситет еліпсів, зумовлених рухом пари масивних тіл, є достатньо малим, то многовид симетричних рухів є обмеженим.

Доведення. Замінимо у рівності (19) τ_1 на τ_{1n} і τ_2 на τ_{2n}, де τ_{1n} і τ_{2n} є відповідно початком і кінцем проміжку часу $\{T_n^*\}$. Початок сегмента $[\tau_{1n}, \tau_{2n}]$ пов'яжемо з точкою $\rho_3^2 = 0$. Тоді на підставі (19) прийдемо до рівності

$$E_3\Big|^{\tau_{2n}} = E_3\Big|_{\tau_{1n}} + \frac{1}{4}\left[\frac{\rho_{12}^2(\tau_{2n}) - \rho_{12}^2(\tau*)}{\rho_{13}^3(\tau_{2n})} + \frac{\rho_{12}^2(\tau*) - \rho_{12}^2(\tau_{1n})}{\rho_{13}^3(\tau_{1n})}\right]. \tag{23}$$

У відповідності з задачею двох тіл [2] маємо

$$\rho_{12}^2(\tau) = \frac{p^2}{[1 + e\cos\varphi(\tau)]^2}, \tag{24}$$

де p і e – відповідно параметр і ексцентриситет еліптичної орбіти, φ – істинна аномалія. З урахуванням (24) рівність (23) перепишемо у вигляді

$$\begin{aligned} E_3\Big|^{\tau_{2n}} &= E_3\Big|_{\tau_{1n}} + \\ &+\frac{1}{4}p^2 e\left\{\frac{2[\cos\varphi(\tau*) - \cos\varphi(\tau_{2n})] + e[\cos^2\varphi(\tau*) - \cos^2\varphi(\tau_{2n})]}{\rho_{13}^3(\tau_{2n})[1+e\cos\varphi(\tau_{2n})]^2[1+e\cos\varphi(\tau*)]^2} + \right. \\ &\left. + \frac{2[\cos\varphi(\tau_{1n}) - \cos\varphi(\tau*)] + e[\cos^2\varphi(\tau_{1n}) - \cos^2\varphi(\tau*)]}{\rho_{13}^3(\tau_{1n})[1+e\cos\varphi(\tau_{1n})]^2[1+e\cos\varphi(\tau*)]^2}\right\}. \end{aligned} \tag{25}$$

Якщо припустити тепер, що многовид симетричних рухів є необмеженим, то він містить хоча б один необмежений рух. Отже, згідно з твердженням 2 [15] проміжки часу $T_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ і, як наслідок, T_n^*, які відповідають цьому руховi, є необмежено зростаючими. На цих проміжках відповідно монотонно зростають функції $\boldsymbol{\rho}_3^2$ і $\boldsymbol{\rho}_{13}^2$. Спрямуємо у рівності (25) n до нескінченності, беручи до уваги той факт, що $T_n^* \subseteq T_n$. Тоді на підставі рівностей (16) і (22) доходимо висновку, що за виконання умов теореми граничним значенням правої частини рівності (25) є вираз

$$\tilde{v}^2 - \frac{4}{\rho_{12}} + O(e) \tag{26}$$

й, отже, за достатньо малого e маємо оцінку

$$\tilde{v}^2 - \frac{4}{\rho_{12}} + O(e) < -\varepsilon \quad 0 < \varepsilon = \text{const}. \tag{27}$$

Враховуючи рівність (16), отримуємо суперечність, оскільки згідно з нашим припущенням на елементах послідовності T_n^* відстань ρ_{13} необмежено зростає. Отримана суперечність робить припущення про існування необмеженого руху помилковим, звідки доходимо висновку про справедливість твердження 1. $\square$

Зауваження 1. Оскільки послідовність $\{(v_3^2)_n\}$ обмежена, то вона містить збіжну підпослідовність і, таким чином, многовид симетричних рухів може містити обмежені рухи навіть у тому випадку, коли послідовність $\{(v_3^2)_n\}$ не є збіжною.

На практиці дуже важко розраховувати на збіжність послідовності $\{(v_3^2)_n\}$, а от визначити $\sup(v_3^2)$, використовуючи комп'ютерне моделювання, цілком реально. Отже, надалі логічно отримати такі достатні умови обмеженості многовиду симетричних рухів, які спиралися б на цей факт.

Твердження 2. *Нехай*

$$\sup(v_3^2) = \alpha \quad 0 < \alpha = const.$$

Тоді, якщо виконується нерівність

$$\alpha - \frac{4}{\rho_{12}} \leq -\beta, \quad 0 < \beta = const$$

і ексцентриситет еліпсів, зумовлених рухом пари масивних тіл, є достатньо малим, то многовид симетричних рухів є обмеженим.

Для доведення твердження 2 достатньо скористатися схемою, яку ми використовували при доведенні твердження 1.

Твердження 3. *Нехай в початковий момент часу енергія малої частки, яку відносимо до точки $\rho_3^2(\tau_1) = 0$, задовольняє нерівність*

$$E_3\Big|_{\tau=\tau_1} = \left(v_3^2 - \frac{2}{\rho_{13}}\right)\Big|_{\tau=\tau_1} = {v_3^0}^2 - \frac{4}{\rho_{12}^0} \geq \delta, \quad 0 < \gamma = const. \tag{28}$$

Тоді, якщо ексцентриситет еліпсів, зумовлених рухом пари масивних тіл, є достатньо малим, то многовид симетричних рухів є необмеженим.

Доведення. Припустимо супротивне, що за умов твердження многовид (8) є обмеженим. Тоді мала частка, стартуючи з точки $\rho_3^2(\tau_1) = 0$ в момент часу τ_1, досягає максимуму в момент часу τ_2 і здійснює рух у зворотному напрямі. Таким чином, на сегменті $[\tau_1, \tau_2]$ функція $\boldsymbol{\rho}_3^2$ монотонно зростає. В момент часу τ_2, коли $v_3^2 = 0$, енергія малої частки $E_3(\tau_2)$ стає від'ємною. Отже, в межах сегмента $[\tau_1, \tau_2]$ існує такий момент часу $\tilde{\tau}$, коли $E_3(\tilde{\tau})$ перетворюється в нуль. У цей момент згідно з (16)

$$v_3^2(\tilde{\tau}) = \frac{2}{\rho_{13}(\tilde{\tau})} \geq \alpha, \quad 0 < \alpha = \mathrm{const} \tag{29}$$

і, таким чином, відповідно до рівності (20), яку перепишемо у вигляді

$$(\rho_{13}^2)' = (\rho_3^2)' + \frac{1}{4}\left(\frac{p^2}{[1 + e\cos\varphi(\tau)]^2}\right)', \tag{30}$$

за достатньо малого ексцентриситету e функція ρ_{13}^2 зростає.

Дещо адаптуючи рівність (17) до випадку, що розглядається, перепишемо її у вигляді

$$E_3\Big|^{\tilde{\tau}} = E_3\Big|_{\tau_1} + \frac{1}{4}\left[\frac{\rho_{12}^2}{\rho_{13}^3}\Big|_{\tau_1}^{\tilde{\tau}} - \int\limits_{\tau_1}^{\tilde{\tau}} \rho_{12}^2 \frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{\rho_{13}^3}\right) d\tau\right]. \tag{31}$$

З урахуванням того факту, що на сегменті $[\tau_1, \tilde{\tau}]$ за достатньо малого e функція ρ_{13}^2 зростає, на підставі (31), використовуючи теорему про середнє, маємо

$$E_3\Big|^{\tilde{\tau}} = E_3\Big|_{\tau_1} +$$

$$+\frac{1}{4}p^2 e\left\{\frac{2[\cos\varphi(\tau*) - \cos\varphi(\tilde{\tau})] + e[\cos^2\varphi(\tau*) - \cos^2\varphi(\tilde{\tau})]}{\rho_{13}^3(\tilde{\tau})[1+e\cos\varphi(\tilde{\tau})]^2[1+e\cos\varphi(\tau*)]^2}+\right.$$

$$\left.+\ \frac{2[\cos\varphi(\tau_1) - \cos\varphi(\tau*)] + e[\cos^2\varphi(\tau_1) - \cos^2\varphi(\tau*)]}{\rho_{13}^3(\tau_1)[1+e\cos\varphi(\tau_1)]^2[1+e\cos\varphi(\tau*)]^2}\right\}. \qquad (32)$$

Припустивши, що за умов твердження многовид (8) є обмеженим, приходимо до суперечності, оскільки ліва частина рівності (32) дорівнює нулю, права ж при достатньо малому ексцентриситетові e є додатною. На підставі отриманої суперечності робимо висновок про справедливість твердження 3. □

Зауваження 2. Беручи до уваги останнє рівняння системи (14) і рівності (15) і (16), маємо

$$E_{13}' = -\frac{\mu}{2}\frac{(\rho_{12}^2)'}{\rho_{13}^3} + E_3'$$

і, таким чином,

$$E_{13} - E_3 - \frac{\mu}{\rho_{12}} = \text{const}.$$

На перший погляд може видатися, що ми отримали новий інтеграл руху. Однак, враховуючи структуру E_{13} і E_3, легко бачити, що це лише інша форма запису інтеграла енергії для задачі двох тіл.

3 Висновок

Твердженнями 1–3 в рамках обмеженої еліптичної задачі трьох тіл ми вказали достатні умови обмеженості (необмеженості) многовиду симетричних рухів. Отримані умови дають підстави стверджувати, що коли ексцентриситет еліптичних орбіт масивних тіл є достатньо малим, то характер симетричних рухів досить близький до тих, що реалізуються в рамках обмеженої кругової задачі. Особливо виразним у цьому сенсі є твердження 3.

[1] *Себехей В.* Теория орбит. Ограниченная задача трех тел.— М.: Наука, 1982.— 656 с.

[2] *Рой А.Е.* Движение по орбитам.— М.: Наука, 1981.— 544 с.

[3] *Hill G.W.* Researches in the Lunar Theory // Am. J. Math. — 1878. — **1**. — P. 5–26.

[4] *Georgakarakos N.* Stability criteria for hierarchical triple systems // Celestial Mech. Dyn. Astron. — 2008. — **100**. — P. 151–168.

[5] *Makó Z. and Szenkovits F.* Capture in the circular and elliptic restricted three-body problem // Celestial Mech. Dyn. Astron. — 2014. — **90**. — P. 51–58.

[6] *Gong S. and Li J.* Analytical criteria of Hill stability in the elliptic restricted three-body problem // Astrophys. Space Sci. — 2015. — **358**,(37). — P. 1–10.

[7] *Ситников К.А.*Существование осциллирующих движений в задаче трех тел // ДАН СССР. — 1960. — **133**. — С. 303–306.

[8] *Алексеев В.М.* Лекции по небесной механике.— Москва-Ижевск: НИЦ РХД, 2001.— 156 с.

[9] *Moser J.* Stable and Random Motion in Dynamical System.— Princeton University Press, 1973. 190 p.

[10] *Маршал К.* Задача трех тел.— Москва-Ижевск: Ин-т компьют. иссл., 2004. 639 с.

[11] *Сосницький С.П.* Про деякі особливості симетричних рухів у задачі трьох тіл // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем. — Зб. праць Ін-ту матем. НАН України, Київ.— 2013. — **10**, № 3. — С. 178–190.

[12] *Sosnitskii S.P.* On the bounded symmetrical motions in the three-body problem // Intern. J. Non-Linear Mech. — 2014. — **67**. — P. 34–38.

[13] *Sosnitskii S.P.* On the Hill stable motions in the three-body problem // Adv. Space Research.— 2015.— **56**.— P. 859–864.

[14] *Sosnitskii S.P.* On the Lagrange stability of motion in the planar restricted three-body problem // Adv. Space Res. — 2017. — **59**. — P. 2459–2465.

[15] *Сосницький С.П.* Про деякі якісні аспекти руху в еліптичній обмеженій задачі трьох тіл // Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики. — Зб. праць Ін-ту матем. НАН України, Київ.— 2017. — **14**, № 2. — С. 150–162.

[16] *Sosnitskii S.P.* On the orbital stability of triangular Lagrangian motions in the three-body problem // Astron. J. — 2008. — **136**. — P. 2533–2540.

[17] *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления // М.: Наука, 1970.— Т. 1, 607 с., Т. 2, 800 с.