

## Собственные колебания жидкости в усечённых соосных конических баках

*А.В. Солодун*<sup>\*</sup>

*Институт математики НАН Украины, Киев;  
solodun@imath.kiev.ua*

A variational Ritz-Trefftz method for constructing an approximate solution of a spectral problem describing free oscillations of an ideal fluid in co-axial conical tanks is developed. The method employs the harmonic functional basis (in curvilinear coordinates), which exactly satisfies boundary conditions on the solid walls of the reservoir. Natural frequencies and modes are illustrated for a wide range of the input geometric parameters.

Розвинуто варіаційний метод Рітца-Трефтца побудови наближеного розв'язку спектральної задачі, що описує вільні коливання ідеальної рідини в резервуарах у вигляді зрізаних коаксіальних конусів. В якості координатного базису виступають побудовані в спеціальній криволінійній системі координат гармонічні функції, які точно задовольняють граничні умови на твердих стінках резервуара. Пораховано власні частоти і форми коливань в розглядуваній порожнині в широкому діапазоні геометричних параметрів.

### Введение

При проектировании конструкций, имеющих в своем составе значительные массы жидких грузов, возникает целый комплекс проблем, связанных с их прочностью и устойчивостью. Основными здесь становятся проблемы определения частот и форм свободных колебаний жидкости, а также сил взаимодействия между стенками баков и жидкостью. Эти силы играют важную роль при составлении уравнений движения механической системы в целом и прогнозировании на их основе динамического поведения конструкций при воздействии

---

<sup>\*</sup>Работа выполнена при частичной поддержке НИР № 0117U004077

на неё различных внешних возмущающих факторов (вибрационного, сейсмического и прочего характера). Традиционно эти проблемы сопровождают развитие авиационной и ракетно-космической техники. С ними приходится сталкиваться при создании танкеров для транспортировки нефтепродуктов и сжиженных газов, а также при исследовании прочности и устойчивости железнодорожных цистерн. В последние годы исследования по динамике твёрдых тел с жидкостью пополнились новыми постановками задач в связи с проектированием новых наземных жидкостно-наполненных механических объектов в виде водонапорных башен, состоящих из цилиндрических резервуаров с коническим дном. Эти исследования направлены на обеспечение их надёжного функционирования в экстремальных условиях, и в первую очередь при возникновении воздействий сейсмического происхождения.

В общем случае не существует точных методов решения задачи о колебаниях жидкости в конических баках. Исключение составляют только отдельные случаи баков в форме “перевернутого” кругового конуса с некоторыми значениями угла полураствора  $\theta_0$ . На первый такой случай ( $\theta_0 = 45^\circ$ ,  $m = 1$ ) указал Левин [27] (здесь  $m$  обозначает число волн в окружном направлении). Позже в работе [2] были приведены другие случаи, для которых существуют точные решения этой задачи по определению, как и в работе [27], только основной частоты и формы собственных колебаний жидкости. Как оказалось, эти случаи относятся к семейству баков с углом полураствора  $\theta_0 = \arctan(\sqrt{m})$ . В книгах [15, 18] упомянутые решения широко используются для независимого контроля численных результатов при определении частот и присоединённых масс жидкости приближёнными методами для конических баков, разбитых глухими радиальными перегородками на независимые отсеки.

Следует отметить, что в некоторых случаях удаётся использовать метод разделения переменных для решения задач о колебаниях жидкости в конических баках, оставаясь при этом в рамках гипотез линейной теории. Ограничиваясь малыми значениями угла конусности, в сферической системе координат соответствующие краевые задачи гидродинамики можно сформулировать при отождествлении плоской невозмущённой поверхности жидкости с мало отличающейся от неё сферической поверхностью как в случае “перевернутого” кругового конуса, так и в случае прямого кругового конуса со сферическим дном. Методом разделения переменных точные решения задачи удаётся

ся представить через степенные функции и присоединённые функции Лежандра первого и второго рода. Впервые это было сделано Докучаевым [1], а позже Бауэром [20]. Об особенностях применения этих результатов в теории движения тел с жидкостью речь идёт в работах [1, 2, 15, 18, 20] и др. Соответствующие экспериментальные данные приведены в статьях Микишева и Дорожкина [14], Бауэра [20] и др.

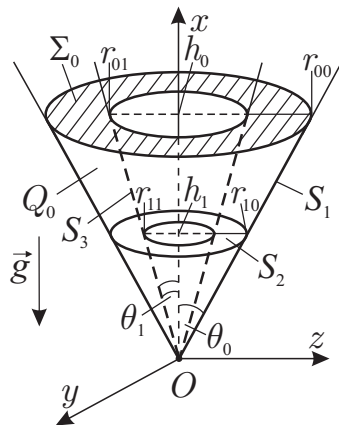
В конце двадцатого столетия снова активизировались исследования по теории колебаний жидкости в конических баках в связи с рассмотрением аналогичных задач в нелинейной постановке [3, 6, 8, 21, 24, 29] и др. Для развития модальных методов решения нелинейных задач требовались качественно новые приближённые решения краевых задач линейной теории. Одним из существенных требований, предъявляемым к этим решениям, является необходимость точного выполнения условия неперетекания ( $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0$ ) всюду на твёрдой стенке бака. Другим важным требованием является необходимость представления форм колебаний жидкости и производных от них в аналитическом виде. Решения с такими свойствами удаётся построить вариационными методами с использованием специальных неконформных отображений, переводящих конические области в цилиндрические в подходящей криволинейной системе координат [3, 4, 6, 12, 26, 29]. Опыт использования таких решений в задаче о колебаниях жидкости в усечённых конических баках подтверждает высокую эффективность упомянутых численно-аналитических методов [4, 24].

Целый ряд исследований, относящихся к линейной теории колебаний жидкости в конических баках, выполнен в последние годы в связи с проектированием новых типов водонапорных башен [22, 23, 30, 31] и др. Предложенные здесь приближённые алгоритмы определения собственных частот и форм колебаний опираются, главным образом, на методы конечных и граничных элементов. Они оказались эффективными в этом классе линеаризованных задач, однако их использование в таком виде для решения нелинейных проблем о резонансных взаимодействиях в системе “твёрдое тело-жидкость” нам представляется проблематичным.

В настоящей работе обсуждается численно-аналитический метод определения частот и форм собственных колебаний жидкости в усечённых соосных конических резервуарах, основанных на вариационных формулировках соответствующих краевых задач. В качестве координатных функций в вариационном методе Ритца-Трефтца используются специальные гармонические функции, найденные мето-

дом разделения переменных в специальной криволинейной системе координат. Метод численно реализован в широком диапазоне геометрических параметров конических полостей. Результаты вычислительных экспериментов поданы в виде таблиц и графических зависимостей. Они доставляют полное представление о практическойходимости предложенного метода и границах его применимости. Приближённые решения найдены в аналитическом виде, пригодном для их использования при построении малоразмерных нелинейных модальных систем методами работ [6, 11, 16, 17, 24, 26, 28, 29], включая и случай соосных конических баков, разбитых сплошными радиальными перегородками на независимые отсеки.

## 1 Постановка задачи



**Рис 1.** Гидростатическое положение жидкости в вертикальных круговых срезанных соосных конических баках.

Рассмотрим безвихревые волновые движения идеальной несжимаемой жидкости, частично заполняющей покоящийся абсолютно жёсткий бак, образованный двумя срезанными соосными коническими полостями с общей вершиной, как показано на рис. 1. Здесь через угол  $\theta_0$  обозначен угол полураствора внешнего конуса, а через  $\theta_1$  – внутреннего.  $r_{00}$  – радиус невозмущённой свободной поверхности внеш-

него, а  $r_{01}$  – внутреннего конуса,  $r_{10}$ ,  $r_{11}$  – радиус дна внешнего и внутреннего конуса соответственно. Вектор ускорения сил гравитации  $\vec{g}$  направлен вниз вдоль оси конуса.

Гидростатическое положение жидкости под действием сил тяжести совпадает с областью  $Q_0$ , изображённой на рисунке. Смачиваемые стенки сосуда  $S$  ( $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ ) обозначены: через  $S_1$  – боковые внешние и через  $S_3$  – внутренние, а дно – через  $S_2$ , при этом невозмущённая (гидростатическая) свободная поверхность жидкости обозначена через  $\Sigma_0$ . Начало декартовой системы координат  $Oxyz$  размещено в вершине конуса  $O$ , причём ось  $Ox$  направлена вертикально вверх.

В качестве характерного линейного размера выбран радиус внешнего конуса  $r_{00}$ . Пара соотношений  $\delta_r, \delta_h$  становится геометрической характеристикой бака. Соотношение  $\delta_r$  между радиусом внутреннего и внешнего конуса ( $\delta_r = r_{01}/r_{00} = r_{11}/r_{10} = \tan \theta_1 / \tan \theta_0$ ), а соотношение  $\delta_h$  между радиусом дна и невозмущённой свободной поверхностью конуса ( $\delta_h = r_{10}/r_{00} = r_{11}/r_{01} = h_1/h_0$ ). Исходя из введённой геометрии рассматриваемой конической полости вытекает очевидное соотношение для радиусов полости  $r_{11}r_{00} = r_{01}r_{10}$ .

В частности, синхронные (одновременные двухсторонние) пределы  $r_{01} \rightarrow r_{00}$  и  $r_{10} \rightarrow r_{00}$  влекут к нулевому объёму бака, а при  $r_{01} \rightarrow 0$  и  $r_{10} \rightarrow 0$  бак стремится к простой конической полости. При этом в случае асинхронных (односторонних) пределов при  $r_{01} \rightarrow 0$  и фиксированном  $r_{10}$  бак стремится к срезанной конической полости, а при  $r_{10} \rightarrow 0$  и фиксированном  $r_{01}$  бак стремится к соосной конической полости.

Как известно [5,7], линейризованная задача о малых свободных колебаниях жидкости в покоящемся сосуде имеет следующий вид:

$$\Delta \phi = 0 \text{ в } Q_0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \nu} = 0 \text{ на } S, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} + gf = 0 \text{ на } \Sigma_0, \quad (1)$$

при дополнительном условии  $\int_{\Sigma_0} \frac{\partial \phi}{\partial x} dS = 0$ , где  $\phi(x, y, z, t)$  – потенциал скоростей,  $x = f(y, z, t)$  – уравнение возмущённой свободной поверхности,  $\vec{\nu}$  – орг внешней нормали к границе  $S$ , и  $g$  – ускорение сил тяжести. Кроме этого, общая постановка эволюционной краевой задачи (1) предполагает подчинения её решений начальным условиям

$$f(y, z, t_0) = F_0(y, z), \quad \frac{\partial f}{\partial t}(y, z, t_0) = F_1(y, z), \quad (2)$$

где некоторые известные функции  $F_0$  и  $F_1$  задают начальное отклонение свободной поверхности жидкости и распределение скоростей на ней в начальный момент времени  $t = t_0$ .

Путём дифференцирования последнего условия по  $t$  два условия на  $\Sigma_0$  задачи (1) обычно заменяют одним и сводят задачу (1) к рассмотрению следующей краевой задачи:

$$\Delta\phi = 0 \text{ в } Q_0, \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\phi}{\partial x} = 0 \text{ на } \Sigma_0, \quad \frac{\partial\phi}{\partial\nu} = 0 \text{ на } S. \quad (3)$$

## 2 Задача о собственных колебаниях и соответствующая ей спектральная задача

Практический интерес представляет задача о собственных гармонических колебаниях жидкости.

Собственные колебания жидкости (стоячие волны) описываются в этом случае решениями задачи (1) вида

$$\phi(x, y, z, t) = \varphi(x, y, z) \exp(i\sigma t), \quad i^2 = -1, \quad (4)$$

причём частота собственных колебаний  $\sigma$  и соответствующая ей форма (мода)  $\varphi(x, y, z)$  определяется как решения следующей спектральной задачи:

$$\Delta\varphi = 0 \text{ в } Q_0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \varkappa\varphi \text{ на } \Sigma_0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0 \text{ на } S, \quad \int_{\Sigma_0} \frac{\partial\varphi}{\partial x} dS = 0, \quad (5)$$

где параметр  $\varkappa$ , именуемый в этом классе задач частотным параметром, определяется соотношением

$$\varkappa = \sigma^2/g. \quad (6)$$

Для задачи на собственные значения (5) существует бесконечная последовательность собственных значений  $\varkappa_n$

$$0 < \varkappa_1 \leq \varkappa_2 \leq \dots \leq \varkappa_n \leq \dots,$$

сходящаяся на бесконечности ( $\varkappa_n \rightarrow \infty$ ,  $n \rightarrow \infty$ ), и каждому собственному значению  $\varkappa_n$  соответствует конечное число собственных функций  $\varphi_n(x, y, z)$  [7][18].

Система собственных функций  $\varphi_n$  задачи (5) образует на невозмущённой свободной поверхности  $\Sigma_0$  вместе с константой полную систему функций. Это свойство играет в теории колебаний жидкости фундаментальную роль.

Задача на собственные значения с параметром в граничном условии (5) допускает соответствующую эквивалентную ей вариационную формулировку, связанную с функционалом

$$K(\varphi) = \frac{\int_{Q_0} (\nabla\varphi)^2 dQ}{\int_{\Sigma_0} \varphi^2 dS}, \quad (7)$$

определённом на классе функций  $\varphi \in W_2^1(Q_0)$  при дополнительном условии  $\int_{\Sigma_0} \varphi dS = 0$ .

В соответствии с общей схемой, изложенной в работах [7, 18], вариационная задача на минимум для функционала (7) позволяет последовательно определить все собственные числа и собственные функции задачи (5), обладающие свойствами обобщённых решений в смысле интегрального соотношения

$$\int_{Q_0} (\nabla\varphi_n, \nabla\eta) dQ - \varkappa_n \int_{\Sigma_0} \varphi_n \eta d\Sigma_0 = 0 \quad (8)$$

при любой функции  $\eta \in W_2^1(Q)$ .

В соответствии с общей схемой Ритца-Трефтца для первого собственного значения  $\varkappa_1$  и собственной функции  $\psi_1$

$$\varkappa_1 = \min F(\varphi), \quad \varphi \in W_2^1(Q),$$

при условии  $\int_{\Sigma_0} \varphi^2 d\Sigma_0 = 1$ ; для последующих собственных значений

$$\varkappa_n = \min F(\varphi), \quad \varphi \in W_2^1(Q),$$

при условии  $\int_{\Sigma_0} \varphi^2 d\Sigma_0 = 1$  и дополнительных условиях ортогональности  $\int_{\Sigma_0} \varphi \varphi_k d\Sigma_0 = 0$  ( $k = 1, \dots, n-1$ ).

К решению вариационной задачи применим метод Ритца. Систему координатных функций выбираем в пространстве  $W_2^1(Q)$  при условии полноты и линейной независимости её элементов. Приближённые

решения ищем в виде линейной комбинации

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^q a_k w_k, \quad w_k \in W_2^1(Q). \quad (9)$$

Для определения коэффициентов  $a_k$  из условия минимума функционала  $K(\varphi)$  (7) получаем систему Ритца

$$\sum_{k=1}^q a_k (\alpha_{ik} - \varkappa \beta_{ik}) = 0, \quad i, k = 1, \dots, q, \quad (10)$$

где

$$\alpha_{ik} = \int_{Q_0} (\nabla w_i, \nabla w_k) dQ, \quad \beta_{ik} = \int_{\Sigma_0} w_i w_k d\Sigma_0. \quad (11)$$

Приближённые значения собственных чисел  $\varkappa_n$  определяем из уравнения

$$\det|\alpha_{ik} - \varkappa \beta_{ik}| = 0, \quad (12)$$

которое представляет собой необходимое условие разрешимости системы линейных алгебраических уравнений (10).

Модальные методы нелинейной теории требуют от аналитического приближённого решения задачи (5) типа (9) точного удовлетворения уравнения Лапласа и условий Неймана на стенках сосуда. Кроме того, это решение должно удовлетворять этим свойствам и за пределами невозмущённой области  $Q_0$ .

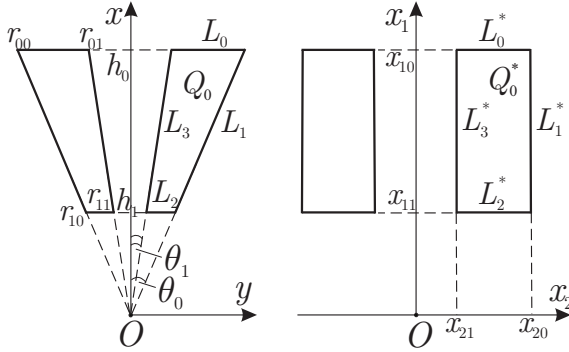
Эффективное построение такого типа решений предложено в работах [4, 7, 12, 18] и частично реализовано в [9, 10, 24, 25]. В другой работе [9] при помощи вариационного метода были определены основные собственные частоты и собственные функции  $\phi_i^{(1)}$  ( $\psi_{1n}$ ) колебания жидкости в срезанных конических баках, а в работе [10] — в соосных конических баках. Другие типы систем координатных функций и их применение при решении краевых задач (5) вариационным методом в случае полостей конической формы подробно представлены в работах [1, 4].

### 3 Гармонический базис в специальной криволинейной системе координат

Воспользуемся вариационным методом для решения спектральной задачи, связанной со свободными колебаниями жидкости в покоя-



щемся баке в форме срезанных осесимметрических соосных конусов. Метод базируется на специальной системе координатных функций, полученной в специальной криволинейной системе координат  $x_1, x_2, x_3$ . Вводя неконформное преобразование [3, 6, 9, 12, 24], связыва-



**Рис 2.** Исходная и трансформированная область меридионального сечения срезанной коаксиальной конической полости.

ющее декартовы переменные  $x, y, z$  с новыми переменными  $x_1, x_2, x_3$  формулами

$$x = x_1, \quad y = x_1 x_2 \cos x_3, \quad z = x_1 x_2 \sin x_3, \quad (13)$$

удастся исходную область  $Q_0$ , занятую жидкостью, преобразовать в системе  $(x_1, x_2, x_3)$  в область  $Q_0^*$  в форме прямого кругового цилиндра ( $x_{11} \leq x_1 \leq x_{10}$ ,  $x_{21} \leq x_2 \leq x_{20}$ ,  $0 \leq x_3 \leq 2\pi$ ), а область  $G^*$  в плоскости меридионального сечения  $Ox_1x_2$  (рис. 2) представляет собой при этом прямоугольник со сторонами  $h = x_{10} - x_{11}$ ,  $d = x_{20} - x_{21}$ , (здесь внешний радиус невозмущённой свободной поверхности равен единице, а  $x_{21} = \tan \theta_1$  и  $x_{20} = \tan \theta_0$ ).

Осевая симметрия полости позволяет сформулировать основные краевые задачи [5] в плоскости меридионального сечения. Предварительно представив искомые решения в разделённом виде  $\varphi(x_1, x_2, x_3)$

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \psi_m(x_1, x_2) \frac{\sin m x_3}{\cos m x_3}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (14)$$

перейдём, следуя работам [3, 6, 7, 13, 18], от трёхмерной задачи [5] к  $m$ -параметрическому семейству спектральных задач относительно

$\psi_m(x_1, x_2)$  в области  $G^*$

$$p \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x_1^2} + 2q \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x_1 \partial x_2} + s \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x_2^2} + d \frac{\partial \psi_m}{\partial x_2} - m^2 c \psi_m = 0 \quad \text{в } G^*, \quad (15a)$$

$$p \frac{\partial \psi_m}{\partial x_1} + q \frac{\partial \psi_m}{\partial x_2} = \varkappa_m p \psi_m \quad \text{на } L_0^*, \quad (15b)$$

$$s \frac{\partial \psi_m}{\partial x_2} + q \frac{\partial \psi_m}{\partial x_1} = 0 \quad \text{на } L_1^* + L_3^*, \quad (15c)$$

$$p \frac{\partial \psi_m}{\partial x_1} + q \frac{\partial \psi_m}{\partial x_2} = 0 \quad \text{на } L_2^*, \quad (15d)$$

$$|\psi_m(x_1, 0)| < \infty, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (15e)$$

$$\int_{x_{21}}^{x_{20}} \psi_0 x_2 dx_2 = 0, \quad (15f)$$

где  $G^* = \{(x_1, x_2) : x_{11} \leq x_1 \leq x_{10}, x_{21} \leq x_2 \leq x_{20}\}$ ,  $p = x_1^2 x_2$ ,  $q = -x_1 x_2^2$ ,  $s = x_2(x_2^2 + 1)$ ,  $d = 1 + 2x_2^2$ ,  $c = 1/x_2$ , а  $L_0^*, L_1^*, L_2^*, L_3^*$  – части границы области  $G^*$ .

Можно показать, что решения спектральной задачи (15a)–(15f) совпадают с экстремальными точками функционала

$$\mathcal{J}(\psi_m) = \int_{G^*} \left[ p \left( \frac{\partial \psi_m}{\partial x_1} \right)^2 + 2q \frac{\partial \psi_m}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_m}{\partial x_2} + s \left( \frac{\partial \psi_m}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{m^2}{x_2} \psi_m^2 \right] dx_1 dx_2 / \int_{L_0^*} p \psi_m^2 dx_2 \quad (16)$$

на пробных функциях, удовлетворяющих (15e).

Рассмотрим вопрос о выборе координатных функций, связанных с решением спектральных задач типа (15a)–(15f) вариационным методом в зависимости от геометрии рассматриваемой здесь области  $G^*$ . В отличие от областей конической формы, не подверженных разбиению на подобласти, для области  $G^*$ , изображённой на рис. 2 решение краевой задачи (15a)–(15f) может иметь особенность на всей оси симметрии за исключением точки  $O$ . Поэтому в координатную систему кроме  $w_n^m$  включаются также функции  $w_n^{*m}$ , которые имеют особенности, допускаемые областью.

Для рассматриваемого здесь типа конических областей установлены [6, 7, 13, 18] четыре типа частных решений уравнения (15а), представленных в пространстве параметров  $x_1, x_2$  в разделённом виде

$$\begin{aligned} w_m(x_1, x_2) &= V_\nu^{(m)}(x_1)T_\nu^{(m)}(x_2), & \hat{w}_m(x_1, x_2) &= V_\nu^{(m)}(x_1)\hat{T}_\nu^{(m)}(x_2), \\ \bar{\psi}_w(x_1, x_2) &= \bar{V}_\nu^{(m)}(x_1)\bar{T}_\nu^{(m)}(x_2), & \tilde{w}_m(x_1, x_2) &= \bar{V}_\nu^{(m)}(x_1)\tilde{T}_\nu^{(m)}(x_2), \end{aligned} \quad (17)$$

причем  $\nu_{mk} \geq m$ , а функции  $V_\nu^{(m)}, \bar{V}_\nu^{(m)}$  имеют вид

$$V_\nu^{(m)}(x_1) = x_1^\nu, \quad \bar{V}_\nu^{(m)}(x_1) = x_1^{-1-\nu}.$$

Первый тип решений (17), регулярный в вершине конуса, возникает в случае конических областей, включающих и вершину конуса. Как было показано в работе [4], функция  $T_\nu^{(m)}$  определяется как решение краевой задачи с параметром  $\nu$  в уравнении и в граничном условии

$$\begin{aligned} x_2^2(1+x_2^2)T_\nu^{(m)''} + x_2(1+2x_2^2-2\nu x_2^2)T_\nu^{(m)'} + \\ + [\nu(\nu-1)x_2^2 - m^2]T_\nu^{(m)} = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

$$T_\nu^{(m)}(x_{20}) = \nu \frac{x_{20}}{1+x_{20}^2} T_\nu^{(m)}(x_{20}) \quad (19)$$

при выполнении условия ограниченности решения  $|T_\nu^{(m)}(0)| < \infty$ . Эта задача имеет нетривиальное решение лишь для счётного числа  $\nu = \nu_{mn} > 0$  ( $m = 0, 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots$ ).

Второе, сингулярное при  $x_1 = 0$  семейство частных решений, связанное с  $\hat{T}_\nu^{(m)}$ , возникает лишь в случае  $x_{11} = 0$ , т.е. в случае коаксиальных конусов с общей вершиной. Оно приводит к той же краевой задаче с параметром  $\nu$  [18].

Третье, сингулярное при  $x_1 \rightarrow 0$  семейство частных решений, связанное с  $\bar{T}_\nu^{(m)}$ , возникает лишь в случае  $x_{11} \neq 0$ , т.е. в случае срезанного конического бака. Оно приводит к следующей краевой задаче с параметром  $\nu$ :

$$\begin{aligned} x_2^2(1+x_2^2)\bar{T}_\nu^{(m)''} + x_2(1+4x_2^2+2\nu x_2^2)\bar{T}_\nu^{(m)'} + \\ + [(\nu+1)(\nu+2)x_2^2 - m^2]\bar{T}_\nu^{(m)} = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\bar{T}^{(m)}(x_{20}) + (\nu + 1) \frac{x_{20}}{1 + x_{20}^2} \bar{T}^{(m)}(x_{20}) = 0, \quad (21)$$

которая также имеет нетривиальные решения лишь для счётного числа неотрицательных действительных чисел  $\nu$ .

Четвёртое семейство частных решений, связанное с  $\tilde{T}_\nu^{(m)}$ , возникает в случае тороидальных областей ( $x_{11} \neq 0$  и  $x_{21} \neq 0$ ), т.е. в случае усечённого конического бака. Оно также приводит к краевой задаче с параметром  $\nu$  (20).

Как следует из работ [4, 9, 10, 12, 25, 28, 29], решения уравнений (18) и (20) тесно связаны с функциями Лежандра первого и второго рода, а набор  $\nu = \nu_{mn}$  ( $m = 0, 1, \dots$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ) является общим для всех семейств решений (17). Действительно, произведя сначала замену переменных

$$\mu = (1 + x_2^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad (22)$$

а затем используя подстановки  $y(\mu) = \mu^\nu T(\mu)$  ( $y(\mu) = \mu^\nu \hat{T}(\mu)$ ) и  $y(\mu) = \mu^{-1-\nu} \bar{T}(\mu)$  ( $y(\mu) = \mu^{-1-\nu} \bar{\hat{T}}(\mu)$ ), вместо (18) и (20) получим известное дифференциальное уравнение:

$$(1 - \mu^2)y''(\mu) - 2\mu y'(\mu) + \left[ \nu(\nu + 1) - \frac{m^2}{1 - \mu^2} \right] y(\mu) = 0, \quad (23)$$

решениями которого действительно являются присоединённые функции Лежандра первого  $y(\mu) = P_\nu^{(m)}(\mu)$  и второго  $y(\mu) = Q_\nu^{(m)}(\mu)$  рода.

Произведя аналогичные операции в однородных краевых условиях (19) и (21), а также введя замену  $\mu = \cos \theta$ , приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_\nu^{(m)}(\cos \theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_1} - \frac{\partial Q_\nu^{(m)}(\cos \theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0} \\ - \frac{\partial Q_\nu^{(m)}(\cos \theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_1} - \frac{\partial P_\nu^{(m)}(\cos \theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0} = 0, \quad (24) \end{aligned}$$

являющемуся общим трансцендентным уравнением для определения параметров  $\nu_{mn}$  ( $m \geq 0$ ,  $n \geq 1$ ).

В табл. 1 приведены первых три значения  $\nu_{mn}$  ( $m = 0, 1, 2, 3$ ,  $n = 1, 2, 3$ ) для нескольких типичных углов  $\theta_0$  при шаге внутреннего угла конуса, равного одной шестой внешнего. Здесь первая колонка соответствует решениям трансцендентного уравнения (24) в

случае ( $\theta_1 = 0$ ), что полностью соответствует представленным ранее решениям трансцендентного уравнения  $(\partial P_\nu^{(m)}(\cos \theta)/\partial \theta)_{\theta=\theta_0} = 0$  работ [8, 9, 18, 24, 25].

Подытожив предыдущее, получаем с точностью до множителя следующие нетривиальные решения задачи (15a)–(15f):

$$T_{\nu_{mk}}^{(m)}(x_2) = \frac{2^m m! (\nu_{mk} - m)!}{(\nu_{mk} + m)!} \sqrt{1 + x_2^2}^{\nu_{mk}} P_{\nu_{mk}}^m \left( \frac{1}{\sqrt{1 + x_2^2}} \right), \quad (25a)$$

$$\hat{T}_{\nu_{mk}}^{(m)}(x_2) = \frac{2^m m! (\nu_{mk} - m)!}{(\nu_{mk} + m)!} \sqrt{1 + x_2^2}^{\nu_{mk}} Q_{\nu_{mk}}^{(m)} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + x_2^2}} \right), \quad (25b)$$

$$\bar{T}_{\nu_{mk}}^{(m)}(x_2) = \frac{2^m m! (\nu_{mk} - m)!}{(\nu_{mk} + m)!} \sqrt{1 + x_2^2}^{-1 - \nu_{mk}} P_{\nu_{mk}}^{(m)} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + x_2^2}} \right), \quad (25c)$$

$$\tilde{T}_{\nu_{mk}}^{(m)}(x_2) = \frac{2^m m! (\nu_{mk} - m)!}{(\nu_{mk} + m)!} \sqrt{1 + x_2^2}^{-1 - \nu_{mk}} Q_{\nu_{mk}}^{(m)} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + x_2^2}} \right), \quad (25d)$$

которые будут использованы ниже.

Для этих наборов функций установлены следующие рекуррентные соотношения [4, 10, 12, 29]:

$$\begin{aligned} (\nu + m + 1)T_{\nu+1}^{(m)} &= (2\nu + 1)T_\nu^{(m)} - (\nu - m)T_{\nu-1}^{(m)}(1 + x_2^2), \\ x_2 \frac{dT_\nu^{(m)}}{dx_2} &= \nu T_\nu^{(m)} - (\nu - m)T_{\nu-1}^{(m)}, \\ (\nu + m + 1)x_2 T_\nu^{(m+1)} &= 2(m + 1) \left[ (1 + x_2^2) T_{\nu-1}^{(m)} - T_\nu^{(m)} \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Для базиса  $\hat{T}_{\nu_{mk}}^{(m)}(x_2)$  можно использовать те же рекуррентные формулы [26], нужно только вместо  $T_{\nu_{mk}}^{(m)}(x_2)$  поставить функции  $\hat{T}_{\nu_{mk}}^{(m)}(x_2)$ .

Для другой пары наборов функций установлены следующие рекуррентные соотношения [4, 9, 25]:

$$\begin{aligned} (\nu + m + 1)(1 + x_2^2)\bar{T}_{\nu+1}^{(m)} &= (2\nu + 1)\bar{T}_\nu^{(m)} - (\nu - m)\bar{T}_{\nu-1}^{(m)}, \\ x_2(1 + x_2^2) \frac{d\bar{T}_\nu^{(m)}}{dx_2} &= (\nu - (\nu + 1)x_2^2)\bar{T}_\nu^{(m)} - (\nu - m)\bar{T}_{\nu-1}^{(m)}, \\ (\nu + m + 1)x_2 \bar{T}_\nu^{(m+1)} &= 2(m + 1) \left( \bar{T}_{\nu-1}^{(m)} - \bar{T}_\nu^{(m)} \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Для базиса  $\tilde{T}_{\nu_{mk}}^{(m)}(x_2)$  можно использовать те же рекуррентные формулы (27), нужно только вместо  $\bar{T}_{\nu_{mk}}^{(m)}(x_2)$  поставить функции  $\tilde{T}_{\nu_{mk}}^{(m)}(x_2)$ . Это очевидно вытекает из представления самих функций (25).

**Таблица 1.** Значения  $\nu_{mk}$  для нескольких значений полууглов  $\theta_0$ .

$\theta_0 = \pi/6$						
$m \setminus \theta_1$	0	$\pi/36$	$\pi/18$	$\pi/12$	$\pi/9$	$5\pi/36$
$\nu_{01}$	6.8356480	7.3821399	8.8850638	11.720592	17.618002	35.548970
$\nu_{02}$	12.909109	14.363996	17.720461	23.616752	35.560182	71.524583
$\nu_{11}$	3.1195157	2.9323569	2.5518628	2.2046122	1.9342746	1.7257674
$\nu_{12}$	9.7115789	9.0476500	9.5993685	12.061503	17.783792	35.614958
$\nu_{22}$	5.4928250	5.4744304	5.2614253	4.7872018	4.2850716	3.8662638
$\nu_{23}$	12.372043	12.138166	11.539455	13.046839	18.273510	35.812222
$\nu_{33}$	7.7524423	7.7510444	7.6819751	7.2917338	6.6413213	6.0249486
$\nu_{34}$	14.918042	14.880735	14.176650	14.581158	19.066045	36.138704
$\theta_0 = \pi/4$						
$m \setminus \theta_1$	0	$\pi/24$	$\pi/12$	$\pi/8$	$\pi/6$	$5\pi/24$
$\nu_{01}$	4.4054031	4.7688889	5.7687669	7.6565098	11.585192	23.536013
$\nu_{02}$	8.4473570	9.4168517	11.653207	15.582634	23.543403	47.518074
$\nu_{11}$	1.9999760	1.8758952	1.6255844	1.4006335	1.2288398	1.0993008
$\nu_{12}$	6.3337445	5.8906854	6.2576877	7.8952623	11.704151	23.584467
$\nu_{22}$	3.6332387	3.6209929	3.4795270	3.1679924	2.8438296	2.5789990
$\nu_{23}$	8.1372938	7.9812458	7.5823019	8.5831851	12.055007	23.729258
$\nu_{33}$	5.2014271	5.2004954	5.1545429	4.8971035	4.4754272	4.0842084
$\nu_{34}$	9.8746685	9.8497965	9.3809733	9.6494439	12.621249	23.968718
$\theta_0 = \pi/3$						
$m \setminus \theta_1$	0	$\pi/18$	$\pi/9$	$\pi/6$	$2\pi/9$	$5\pi/18$
$\nu_{01}$	3.1957222	3.4674443	4.2152511	5.6283104	8.5716126	17.531097
$\nu_{02}$	6.2196322	6.9460922	8.6220159	11.567548	17.536443	35.515604
$\nu_{11}$	1.4679773	1.3752776	1.1904450	1.0282683	0.90823933	0.82133212
$\nu_{12}$	4.6541273	4.3215634	4.5964068	5.8206993	8.6708326	17.572858
$\nu_{22}$	2.7525882	2.7433527	2.6372535	2.4083317	2.1776379	1.9966508
$\nu_{23}$	6.0404223	5.9230999	5.6246683	6.3723023	8.9627678	17.697575
$\nu_{33}$	4.0000000	3.9992921	3.9645575	3.7735679	3.4713838	3.2028114
$\nu_{34}$	7.3884014	7.3696801	7.0184339	7.2210712	9.4318842	17.903586

#### 4 Вариационный метод решения спектральной задачи (15)

Основной сложностью методов, построенных на схеме Ритца-Трефтца, является выбор эффективного функционального базиса. Полнота известных наборов гармонических функций существенно зависит от геометрии области  $Q_0$ . Универсальным полным семейством функций

для любой звёздной области  $Q_0$  являются, как известно, лишь частные решения полиномиального типа (Луковский и др. [7]).

Сформулируем теперь вариационный алгоритм Ритца-Грефтца решения спектральной задачи (15a)–(15d), исходя из вариационной формулировки задачи для квадратичного функционала (16). Тогда решение краевой задачи будем искать в виде

$$\begin{aligned} \psi_m(x_1, x_2) = & \sum_{k=1}^q a_k^{(m)} w_k^{(m)}(x_1, x_2) + \sum_{k=1}^q \hat{a}_k^{(m)} \hat{w}_k^{(m)}(x_1, x_2) + \\ & + \sum_{k=1}^q \bar{a}_k^{(m)} \bar{w}_k^{(m)}(x_1, x_2) + \sum_{k=1}^q \bar{\hat{a}}_k^{(m)} \bar{\hat{w}}_k^{(m)}(x_1, x_2), \quad (28) \end{aligned}$$

Мы можем таким образом подобрать коэффициенты  $a_k^{(m)}$ ,  $\hat{a}_k^{(m)}$ ,  $\bar{a}_k^{(m)}$ , и  $\bar{\hat{a}}_k^{(m)}$ , чтобы каждое из них удовлетворяло краевое условие на боковых стенках полости (15d). Для этого необходимо подчинить их двум условиям  $\text{Det}(dT_i) = 0$  ( $i = 1, 2$ ), где  $dT_i$  определяется выражением

$$dT_i = \begin{pmatrix} T_i'(x_{20}) + d_i(x_{20})T_i(x_{20}) & T_i'(x_{21}) + d_i(x_{21})T_i(x_{21}) \\ \mathcal{F}_i'(x_{20}) + d_i(x_{20})\mathcal{F}_i(x_{20}) & \mathcal{F}_i'(x_{21}) + d_i(x_{21})\mathcal{F}_i(x_{21}) \end{pmatrix},$$

а функции  $T_i$  и  $\mathcal{F}_i$  выбираются из условий

$$T_i(x_2) = \begin{cases} T_\nu^{(m)}(x_2), & i = 1, \\ \bar{T}_\nu^{(m)}(x_2), & i = 2, \end{cases} \quad \mathcal{F}_i(x_2) = \begin{cases} \hat{T}_\nu^{(m)}(x_2), & i = 1, \\ \bar{\hat{T}}_\nu^{(m)}(x_2), & i = 2 \end{cases}$$

при  $d_1(x_2) = -\frac{\nu x_2}{1+x_2^2}$ ,  $d_2(x_2) = \frac{(1+\nu)x_2}{1+x_2^2}$ ; здесь штрих в  $T_\nu'$  – обозначает производную по  $x_2$ . Тогда решение (28) краевой задачи можно представить в виде

$$\psi_m(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{q_1} a_k^{(m)} V_{\nu_{mk}}^{(m)}(x_1) U_{\nu_{mk}}^{(m)}(x_2) + \sum_{l=1}^{q_2} \bar{a}_l^{(m)} \bar{V}_{\nu_{ml}}^{(m)}(x_1) \bar{U}_{\nu_{ml}}^{(m)}(x_2), \quad (29)$$

где

$$U_{\nu_{mk}}^{(m)}(x_2) = T_{\nu_{mk}}^{(m)}(x_2) - \mu_{mk} \hat{T}_{\nu_{mk}}^{(m)}(x_2), \quad (30)$$

$$\bar{U}_{\nu_{mk}}^{(m)}(x_2) = \bar{T}_{\nu_{mk}}^{(m)}(x_2) - \bar{\mu}_{mk} \bar{\hat{T}}_{\nu_{mk}}^{(m)}(x_2). \quad (31)$$

Легко показать справедливость равенства  $\mu_{mk} = \bar{\mu}_{mk}$ , при этом

$$\mu_{mk} = \frac{(\nu_{mk} + 1)P_{\nu_{mk}}^{(m)}(\mu(x_{20})) - (\nu_{mk} - m + 1)\mu^{-1}(x_{20})P_{\nu_{mk}+1}^{(m)}(\mu(x_{20}))}{(\nu_{mk} + 1)Q_{\nu_{mk}}^{(m)}(\mu(x_{20})) - (\nu_{mk} - m + 1)\mu^{-1}(x_{20})Q_{\nu_{mk}+1}^{(m)}(\mu(x_{20}))}.$$

Представим искомые частные решения (29) краевой задачи в нормированном виде

$$W_k^{(m)}(x_1, x_2) = N_k^{(m)} V_{\nu_{mk}}^{(m)}(x_1) U_{\nu_{mk}}^{(m)}(x_2), \quad (32a)$$

$$\bar{W}_k^{(m)}(x_1, x_2) = \bar{N}_k^{(m)} \bar{V}_{\nu_{mk}}^{(m)}(x_1) \bar{U}_{\nu_{mk}}^{(m)}(x_2), \quad (32b)$$

вводя нормировку

$$\|W_k^{(m)}\|_{L_2^*+L_0^*}^2 = \|\bar{W}_k^{(m)}\|_{L_2^*+L_0^*}^2 = 1. \quad (33)$$

Явные формулы для подсчёта нормирующих множителей  $N_k^{(m)}$  приобретают тогда вид

$$N_k^{(m)} = \frac{1}{\sqrt{(x_{10}^{2\nu_{mk}+2} + x_{11}^{2\nu_{mk}+2}) \int_{x_{21}}^{x_{20}} x_2 [U_k^{(m)}(x_2)]^2 dx_2}}, \quad (34a)$$

$$\bar{N}_k^{(m)} = \frac{1}{\sqrt{(x_{10}^{-2\nu_{mk}} + x_{11}^{-2\nu_{mk}}) \int_{x_{21}}^{x_{20}} x_2 [\bar{U}_k^{(m)}(x_2)]^2 dx_2}}. \quad (34b)$$

Заметим, что в случае  $m = 0$  систему частных решений (32) необходимо, к тому же, переопределить по схеме

$$U_k^{(0)} = U_k^{(0)} - c_k^{(0)}, \quad \bar{U}_k^{(0)} = \bar{U}_k^{(0)} - \bar{c}_k^{(0)}, \quad (35)$$

где

$$c_k^{(0)} = \frac{2}{x_{20}^2 - x_{21}^2} \int_{x_{21}}^{x_{20}} x_2 U_k^{(0)}(x_1, x_2) dx_2, \quad (36a)$$

$$\bar{c}_k^{(0)} = \frac{2}{x_{20}^2 - x_{21}^2} \int_{x_{21}}^{x_{20}} x_2 \bar{U}_k^{(0)}(x_1, x_2) dx_2, \quad (36b)$$



чтобы условие сохранения объёма (15f) выполнялось автоматически.

Для определения неизвестных постоянных  $a_k^{(m)}, \bar{a}_l^{(m)}$ , входящих в приближённое решение вариационной задачи, воспользуемся необходимым условием экстремума функционала (16)

$$\frac{\partial \mathcal{J}_m}{\partial a_k^{(m)}} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{J}_m}{\partial \bar{a}_l^{(m)}} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, q_1, \quad l = 1, 2, \dots, q_2, \quad (37)$$

приводящим к системе линейных однородных уравнений. Для определения частотных параметров  $\varkappa_m$ , как и выше, получаем матричное уравнение

$$\det \left( \{\alpha_{ij}^{(m)}\} - \varkappa_m \{\beta_{ij}^{(m)}\} \right) = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, q_1 + q_2. \quad (38)$$

Поскольку представления (29) состоят из двух типов функций  $W_k^{(m)}$  и  $\bar{W}_k^{(m)}$ , то мы имеем четыре типа составляющих матриц  $\{\tilde{\alpha}_{ij}^{(m)}\}$  и  $\{\tilde{\beta}_{ij}^{(m)}\}$ , а именно:

$$\tilde{\alpha}_{ij}^{(m)} = \begin{pmatrix} \alpha_{ij1}^{(m)} & \alpha_{ij2}^{(m)} \\ \alpha_{ij3}^{(m)} & \alpha_{ij4}^{(m)} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\beta}_{ij}^{(m)} = \begin{pmatrix} \beta_{ij1}^{(m)} & \beta_{ij2}^{(m)} \\ \beta_{ij3}^{(m)} & \beta_{ij4}^{(m)} \end{pmatrix}, \quad (39)$$

где элементы матриц  $\{\alpha_{ijk}^{(m)}\}$  и  $\{\beta_{ijk}^{(m)}\}$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) имеют следующий вид:

$$\alpha_{ijk}^{(m)} = \int_{x_{21}}^{x_{20}} \left( x_1^2 x_2 \frac{\partial \mathcal{W}_{i+m-1}^{(m)}}{\partial x_1} - x_1 x_2^2 \frac{\partial \mathcal{W}_{i+m-1}^{(m)}}{\partial x_2} \right)_{x_1=x_{10}} \mathcal{V}_{j+m-1}^{(m)} dx_2 - \int_{x_{21}}^{x_{20}} \left( x_1^2 x_2 \frac{\partial \mathcal{W}_{i+m-1}^{(m)}}{\partial x_1} - x_1 x_2^2 \frac{\partial \mathcal{W}_{i+m-1}^{(m)}}{\partial x_2} \right)_{x_1=x_{11}} \mathcal{V}_{j+m-1}^{(m)} dx_2, \quad (40)$$

$$\beta_{ijk}^{(m)} = x_{10}^2 \int_{x_{21}}^{x_{20}} x_2 \left( \mathcal{W}_{i+m-1}^{(m)} \mathcal{V}_{j+m-1}^{(m)} \right)_{x_1=x_{10}} dx_2, \quad (41)$$

где для каждого индекса  $k$  в матрицах  $\alpha_{ijk}^{(m)}$  в качестве набора пары

функций  $(\mathcal{W}, \mathcal{V})$  фигурируют указанные ниже

$$\alpha_{ijk}^{(m)}(\mathcal{W}, \mathcal{V}) = \beta_{ijk}^{(m)}(\mathcal{W}, \mathcal{V}) = \begin{cases} (W, W), & \text{при } k = 1, \\ (W, \bar{W}), & \text{при } k = 2, \\ (\bar{W}, W), & \text{при } k = 3, \\ (\bar{W}, \bar{W}), & \text{при } k = 4. \end{cases}$$

Матричная спектральная задача (38) имеет  $q = q_1 + q_2$  собственных значений, что соответствует количеству членов в разложении (29). Как обычно, для каждого фиксированного  $m$  собственные значения упорядочены в порядке возрастания.

## 5 Сходимость

В табл. 2 показана типичная сходимость метода в случае  $\vee$ -образных срезанных соосных конических полостей с внешними углами полураствора  $5^\circ \leq \theta_0 \leq 85^\circ$  при шаге внутреннего угла полураствора, равного одной шестой от внешнего. В общем случае бралось 20 базисных функций (29) (т.е. попарно сгруппированных базисных функций (32)). Как видно из таблицы, пять-семь значащих цифр  $\varkappa_{11}$  стабилизируются уже при  $q = 8 \div 12$  базисных функций почти для всех собственных значений.

Следует обратить внимание, что в первой колонке таблицы приведены для контроля собственные значения  $\varkappa_{11}$  при стремлении внутреннего конуса к полевому объёму (усеянная коническая полость), что будет в точности соответствовать результатам работ [12, 24], а в первой строке те же значения при условии полевого отсечения (соосная коническая полость), и, наконец, в левой верхней ячейке приведены те же значения соответствующие полному неусечённому объёму (чистая коническая полость). Общей является тенденция ухудшения точности определения собственных значений  $\varkappa_{m1}$  при стремлении объёма жидкости к нулю ( $\theta_1$  стремится к  $\theta_0$  или  $h_1$  стремится к  $h_0$ ). Метод устойчиво сходится при всех конфигурациях соосных конических полостей единственным моментом является замедление сходимости при стремлении объёма полости к нулю, что является типичной ситуацией при использовании такого приближённого метода. При этом количество стабилизируемых значащих цифр соответствует приведённому в работе [24] для неусечённых конусов. Гаврилюк и

**Таблица 2.** Сходимость собственных значений  $\kappa_{11}$  для срезанных коаксиальных конических полостей с внешним углом полураствора  $\theta_0 = \pi/4$ .

$\delta_h \setminus \delta_r$	$q$	0.0	0.132	0.268	0.414	0.577	0.767
0.0	10	0.9999951	0.9740773	0.9069470	0.8163904	0.7148940	0.6083448
	12	0.9999951	0.9740703	0.9069324	0.8163749	0.7148763	0.6080899
	14	0.9999951	0.9740669	0.9069250	0.8163665	0.7148674	0.6080881
	16	0.9999951	0.9740650	0.9069208	0.8163615	0.7147820	0.6080741
	18	0.9999951	0.9740640	0.9069183	0.8154193	0.7147804	0.6080560
	20	0.9999951	0.9740633	0.9069167	0.8094915	0.7147148	0.6080284
0.1	10	0.9999813	0.9740538	0.9068777	0.8162070	0.7145262	0.6077662
	12	0.9999812	0.9740468	0.9068630	0.8161915	0.7145085	0.6075118
	14	0.9999812	0.9740434	0.9068556	0.8161831	0.7144996	0.6075103
	16	0.9999812	0.9740415	0.9068515	0.8161781	0.7144143	0.6074962
	18	0.9999812	0.9740405	0.9068489	0.8152364	0.7144128	0.6074783
	20	0.9999812	0.9740398	0.9068473	0.8093120	0.7143472	0.6074508
0.3	10	0.9966267	0.9697431	0.8995552	0.8044919	0.6985799	0.5890989
	12	0.9966209	0.9697304	0.8995369	0.8044754	0.6985630	0.5888701
	14	0.9966168	0.9697230	0.8995270	0.8044662	0.6985543	0.5888628
	16	0.9966139	0.9697184	0.8995211	0.8044605	0.6984759	0.5888527
	18	0.9966117	0.9697153	0.8995173	0.8035431	0.6984739	0.5888408
	20	0.9966099	0.9697131	0.8995147	0.7978369	0.6984141	0.5888151
0.5	10	0.9568788	0.9251526	0.8426956	0.7352145	0.6226320	0.5138391
	12	0.9568060	0.9250809	0.8426484	0.7351908	0.6226169	0.5137160
	14	0.9567554	0.9250324	0.8426184	0.7351761	0.6226086	0.5137087
	16	0.9567184	0.9249996	0.8425983	0.7351662	0.6225689	0.5136974
	18	0.9566904	0.9249751	0.8425838	0.7343810	0.6225505	0.5136838
	20	0.9566685	0.9249568	0.8425731	0.7298898	0.6225243	0.5136751
0.7	10	0.7761549	0.7397900	0.6496077	0.5433516	0.4437551	0.3564644
	12	0.7758394	0.7395186	0.6494709	0.5433030	0.4437321	0.3564627
	14	0.7756205	0.7393302	0.6493798	0.5432709	0.4437303	0.3564145
	16	0.7754610	0.7392015	0.6493171	0.5432486	0.4437206	0.3564095
	18	0.7753401	0.7391041	0.6492706	0.5426485	0.4437100	0.3563977
	20	0.7752458	0.7390312	0.6492357	0.5403350	0.4436805	0.3563657
0.9	10	0.3218547	0.3015588	0.2543646	0.2044685	0.1621533	0.1279678
	12	0.3214913	0.3012669	0.2542337	0.2044252	0.1621464	0.1278326
	14	0.3212421	0.3010630	0.2541465	0.2043967	0.1621096	0.1277778
	16	0.3210623	0.3009267	0.2540872	0.2043770	0.1620906	0.1276993
	18	0.3209273	0.3008229	0.2540430	0.2039257	0.1620792	0.1276783
	20	0.3208227	0.3007467	0.2540101	0.2029383	0.1615500	0.1274326

др. [24] связывали замедление сходимости для малых углов полураствора с несоответствием асимптотического поведения базиса вдоль вертикальной оси точному решению задачи, которое для цилиндрической полости (предельное положение) должно экспоненциально затухать.

## 6 Анализ

Величины собственных значений  $\varkappa_{mn}$  зависят от геометрических параметров бака – радиуса свободной поверхности  $r_{00}$ , радиуса внешнего дна  $r_{10}$  и внутреннего радиуса свободной поверхности  $r_{01}$  конической полости.

**Таблица 3.** Собственные значения  $\varkappa_{m1}$  для срезанных коаксиальных конических полостей с внешним углом полураствора  $\theta_0 = \pi/6$ .

$\delta_h \setminus \delta_r$	0.0	0.152	0.305	0.466	0.630	0.808
$\varkappa_{11}$						
0.0	1.304374	1.256009	1.142502	1.012990	0.890033	0.778102
0.1	1.304374	1.256009	1.142500	1.012984	0.890013	0.778057
0.3	1.304036	1.255501	1.141337	1.010568	0.885919	0.772171
0.5	1.290784	1.239135	1.116369	0.975095	0.841505	0.721904
0.7	1.154348	1.092334	0.948884	0.794592	0.660154	0.548873
0.9	0.542357	0.499647	0.409323	0.324527	0.258921	0.209264
$\varkappa_{21}$						
0.0	2.263150	2.260262	2.223329	2.111504	1.936729	1.735771
0.1	2.263150	2.260262	2.223329	2.111504	1.936729	1.735771
0.3	2.263148	2.260259	2.223326	2.111494	1.936696	1.735687
0.5	2.262230	2.259321	2.222105	2.109228	1.932354	1.728558
0.7	2.211617	2.208200	2.164492	2.032415	1.829477	1.603792
0.9	1.361473	1.357026	1.302027	1.153830	0.967179	0.797411
$\varkappa_{31}$						
0.0	3.180249	3.180110	3.172544	3.114501	2.949897	2.693323
0.1	3.180249	3.180110	3.172544	3.114501	2.949897	2.693323
0.3	3.180249	3.180109	3.172544	3.114500	2.949897	2.693322
0.5	3.180191	3.180052	3.172481	3.114397	2.949644	2.692747
0.7	3.165358	3.165203	3.157067	3.094855	2.919042	2.647193
0.9	2.328438	2.327992	2.313095	2.209143	1.963762	1.665436

Большинство численных экспериментов фокусировалось на расчёте наиболее важных с практической точки зрения наименьших собственных значений  $\varkappa_{m1}$ ,  $m \geq 0$ .

Расчёты по определению собственных значений  $\varkappa_{mn}$ , проиллюстрированные на рис. 3, показывают, что при стремлении  $r_{11}$  к  $r_{10}$  собственные значения стремятся к нулю. Причем к нулю они стремятся резко для очень больших  $r_{11}$ , почти равных  $r_{10}$  (подобно результатам работы [9]), т.е. объём жидкости почти нулевой, что является собой типичную физическую картину. При стремлении же  $r_{11}$  к  $r_{01}$ , как видно из рисунка, кривые собственных значений  $\varkappa_{mn}$  приближаются к оси абсцисс сохраняя свою тенденцию. На рисунке 3 отображено графически несколько зависимостей наименьших собственных

**Таблица 4.** Собственные значения  $\varkappa_{m1}$  для срезанных коаксиальных конических полостей с внешним углом полураствора  $\theta_0 = \pi/4$ .

$\delta_h \backslash \delta_r$	0.0	0.132	0.268	0.414	0.577	0.767
$\varkappa_{11}$						
0.0	0.999995	0.974063	0.906917	0.809492	0.714715	0.608028
0.1	0.999981	0.974040	0.906847	0.809312	0.714347	0.607451
0.3	0.996610	0.969713	0.899515	0.797837	0.698414	0.588815
0.5	0.956669	0.924957	0.842573	0.729890	0.622524	0.513675
0.7	0.775246	0.739031	0.649236	0.540335	0.443681	0.356366
0.9	0.320823	0.300747	0.254010	0.202938	0.161550	0.127433
$\varkappa_{21}$						
0.0	1.767377	1.766371	1.752355	1.697233	1.586595	1.411337
0.1	1.767377	1.766371	1.752355	1.697233	1.586594	1.411335
0.3	1.767254	1.766246	1.752188	1.696893	1.585829	1.409929
0.5	1.759020	1.757911	1.742590	1.682773	1.563350	1.378909
0.7	1.633001	1.631229	1.608580	1.525116	1.372365	1.168678
0.9	0.834799	0.832654	0.808901	0.731151	0.617839	0.497584
$\varkappa_{31}$						
0.0	2.504928	2.504896	2.502980	2.479973	2.405184	2.210200
0.1	2.504928	2.504896	2.502980	2.479973	2.405184	2.210200
0.3	2.504924	2.504892	2.502976	2.479966	2.405162	2.210140
0.5	2.503552	2.503516	2.501540	2.478249	2.401680	2.203772
0.7	2.441007	2.440841	2.437663	2.411032	2.304989	2.072664
0.9	1.487584	1.486575	1.478661	1.433121	1.289970	1.073612

значений  $\varkappa_{m1}$  относительно  $r_{01}$  и  $r_{10}$  для усечённых соосных полостей с несколькими типичными исследуемыми (см. табл. [3-5](#)) внешними углами полураствора  $\theta_0$ . Установлено, что с увеличением величины угла полураствора  $\theta_0$  собственные значения для  $\vee$ -конуса уменьшаются (рис. [3](#)). Величины собственных значений  $\varkappa_{m1}$  соотносятся как  $\varkappa_{31} > \varkappa_{21} > \varkappa_{11}$ .

Значения низших собственных частотных параметров  $\varkappa_{11}$  для  $\vee$ -образных соосных конусов являются актуальными для расчёта реальных водонапорных башен. Реальную размерную величину собственной частоты  $\sigma_{mn}$  можно получить, воспользовавшись формулой

$$\sigma_{mn}^2 = \frac{g \varkappa_{mn}(\delta_r, \delta_h)}{r_{00}} \quad (42)$$

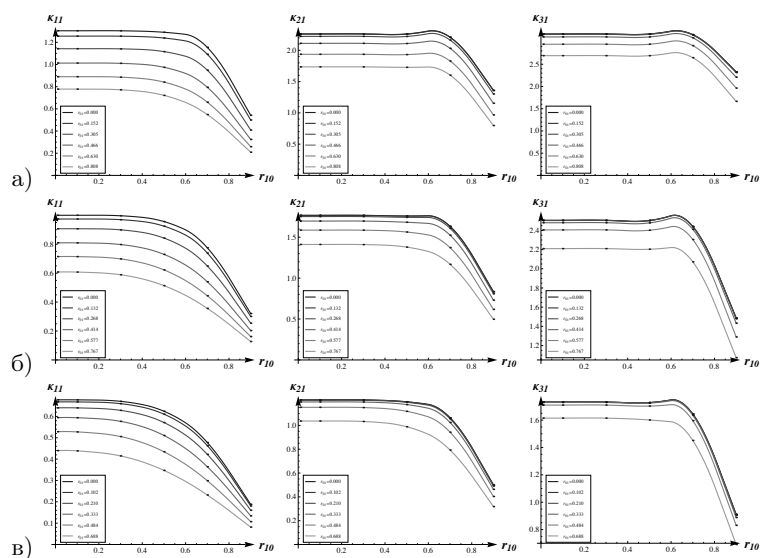
и данными из приведённых таблиц, где  $g$ ,  $r_{00}$ ,  $r_{01}$  и  $r_{10}$  размерные.

Также производилось сравнение величин собственных значений в некоторых предельных случаях. Сравнение производилось с результатами работ [6](#) по соосным цилиндрическим полостям при стремле-

**Таблица 5.** Собственные значения  $\kappa_{m1}$  для срезанных коаксиальных конических полостей с внешним углом полураствора  $\theta_0 = \pi/3$ .

$\delta_h \backslash \delta_r$	0.0	0.102	0.210	0.333	0.484	0.688
$\kappa_{11}$						
0.0	0.677679	0.667985	0.640242	0.594427	0.528507	0.440013
0.1	0.677586	0.667852	0.639953	0.593817	0.527463	0.438616
0.3	0.670635	0.659747	0.628288	0.576871	0.505609	0.414858
0.5	0.624299	0.610592	0.571360	0.510749	0.434419	0.347199
0.7	0.477781	0.463024	0.422173	0.364173	0.298780	0.231864
0.9	0.188155	0.180594	0.160512	0.134184	0.106982	0.081376
$\kappa_{21}$						
0.0	1.214432	1.214236	1.211245	1.197059	1.151897	1.036716
0.1	1.214431	1.214236	1.211244	1.197057	1.151891	1.036701
0.3	1.213856	1.213652	1.210562	1.195961	1.149779	1.032932
0.5	1.198223	1.197903	1.193760	1.174848	1.118312	0.988772
0.7	1.064072	1.063187	1.055618	1.024567	0.942942	0.793287
0.9	0.500004	0.498752	0.490870	0.463168	0.403263	0.318357
$\kappa_{31}$						
0.0	1.732051	1.732048	1.731828	1.729055	1.709961	1.614685
0.1	1.732051	1.732048	1.731828	1.729055	1.709961	1.614685
0.3	1.732010	1.732007	1.731786	1.728998	1.709838	1.614373
0.5	1.728012	1.727992	1.727674	1.724351	1.702731	1.601016
0.7	1.644733	1.644401	1.642769	1.635242	1.596180	1.451416
0.9	0.911444	0.909961	0.904118	0.888233	0.830982	0.690849

нии в нашем случае глубины жидкости конической полости к бесконечности. Геометрическая характеристика соосных цилиндров  $\delta$  выражается через соотношение радиусов цилиндров выражением  $\delta = \frac{R_0}{R_1}$ . Тут радиус внутреннего цилиндра обозначался через  $R_0$ , а внешнего – через  $R_1$ . В нашем случае такое соотношение  $\delta$  примет вид  $\delta_r = r_{01}/r_{00} = \tan \theta_1 / \tan \theta_0$ . Тогда взаимосвязь “цилиндрическая–коническая” полость можно представить в виде  $\delta \rightarrow \delta_r$ . К примеру, для геометрии соосных цилиндров  $\delta = 0.4$  и  $\delta = 0.6$  соответствующая приближённая геометрия соосных конусов для случая  $m = 1$  и  $\theta_0 = 45^\circ$  будет  $\theta_1 = 21^\circ 48' 5''$  и  $\theta_1 = 30^\circ 57' 50''$ . Сравнивая посчитанные наименьшие собственные значения для обеих полостей, получаем в первом случае  $\kappa_{11}^{cyl} = 0.70201$ , и  $\kappa_{11}^{con} = 0.70138$ , и соответственно во втором  $\kappa_{11}^{cyl} = 0.82648$ , и  $\kappa_{11}^{con} = 0.82539$ , что представляет достаточно хорошее совпадение и подтверждение достоверности настоящей методики.



**Рис 3.** Значения  $\kappa_{m1}$  для нескольких типичных коаксиальных конических полостей (а) –  $\theta_0 = 30^\circ$ , б) –  $\theta_0 = 45^\circ$ , в) –  $\theta_0 = 60^\circ$ ) относительно величины угла полураствора внутреннего конуса  $\theta_1$  и величины среза  $h$  в терминах радиусов.

## 7 ВЫВОДЫ

Рассмотрен численно-аналитический метод расчёта собственных частот и форм для усечённых соосных конических баков, основанный на вариационном алгоритме Ритца-Трефтца. Метод базируется на неконформном преобразовании области, приводящем к частичному разделению переменных задачи, что позволяет построить эффективную координатную систему функций, восходящую к функциям Лежандра первого и второго рода.

Численные данные этой работы сравниваются с результатами работ [1, 20], полученными для конических полостей с малым углом раствора. Удовлетворительное согласование результатов наблюдается для широкого диапазона полостей, за исключением лишь случая малого объёма жидкости  $Q_0$ .

Результаты работы предполагается использовать для развития не-

линейной модальной теории для усечённых соосных конических баков.

- [1] Докучаев Л. В. — К решению краевой задачи о колебаниях жидкости в конических полостях // Прикл. математика и механика. — 1964. — 28, вып. 1. — С. 151–154.
- [2] Докучаев Л. В., Луковский И. А. Методы определения гидродинамических характеристик подвижного сосуда с перегородками. Изв. АН СССР: МЖГ, — 1968. — № 6. — С. 205–213.
- [3] Луковский И. А. Нелинейные колебания жидкости в полостях сложной геометрии. Киев: Наукова думка, — 1975. — 232 с.
- [4] Луковский И. О. До розв'язування спектральних задач лінійної теорії коливань рідини в конічних баках // Доповіді НАН України. Механіка. — 2002. — № 5. — С. 53–58.
- [5] Луковский И. А. Об одной математической модели волновых движений жидкости в резервуарах с наклонными стенками // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2005. — 2, 1. — С. 227–253.
- [6] Луковский И. А. Математические модели нелинейной динамики твердых тел с жидкостью. Киев: Наук. думка. — 2010. — 408 с.
- [7] Луковский И. А., Барняк М. Я., Комаренко А. Н. Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объема жидкости. Киев: Наукова думка, — 1984. — 212 с.
- [8] Луковский И. А., Билык А. Н. Вынужденные нелинейные колебания жидкости в подвижных осесимметричных конических полостях. В кн.: “Численно-аналитические методы исследования динамики и устойчивости многомерных систем”. — Киев: Институт математики АН УССР, — 1985. — С. 12–26.
- [9] Луковский И. А., Солодун А. В., Тимоха А. Н. Собственные частоты колебаний жидкости в усечённых конических баках // Акустический вестник. Ин-т гидромеханики НАН Украины. — 2006. — 9, 3. — С. 18–34.
- [10] Луковский И. А., Солодун А. В. Вариационный метод исследования спектральной задачи о собственных колебаниях жидкости в соосных конических резервуарах // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2013. — 10, 3. — С. 88–112.
- [11] Луковский И. А., Тимоха А. Н. Вариационные методы в нелинейной динамике ограниченного объема жидкости. Киев: Институт математики НАНУ, — 1995. — 400 с.



- [12] *Луковский И. А., Тимоха А. Н.* Модальное моделирование нелинейных плесканий жидкости в баках с невертикальными стенками. Методика неконформных отображений // Прикладная гидромеханика. — 2000. — **2** (74), 4. — С. 32–47.
- [13] *Луковский И. А., Троценко В. А., Феценко С. Ф.* Расчет динамических характеристик жидкости в подвижных полостях. Киев: Академия наук Украинской ССР. — 1968. — 265 с.
- [14] *Микишев Г. Н., Дорожкин Н. Я.* Экспериментальные исследования свободных колебаний жидкости в контейнерах // Известия Академии Наук СССР. Отделение Технических наук, Механики и Машиностроения, — 1961. — № 4. — С. 48–53.
- [15] *Микишев Г. Н., Рабинович Б. И.* Динамика твердого тела с полостями, частично заполненного жидкостью. Москва: Машиностроение, — 1968. — 532 с.
- [16] *Солодун А. В.* Нелинейные модальные модели третьего порядка малости, описывающие колебание жидкости усечённых конических резервуарах // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2014. — **11**, 4. — С. 280–307.
- [17] *Солодун А. В.* Общая нелинейная математическая модальная модель третьего порядка малости колебаний жидкости в соосных конических резервуарах // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2017. — **14**, № 2. — С. 33–149.
- [18] *Феценко С. Ф., Луковский И. А., Рабинович Б. И., Докучаев Л. В.* Методы определения присоединенных масс жидкости в подвижных полостях. Киев: Наукова думка, — 1969. — 250 с.
- [19] *Abramson H. N.* NASA Space Vehicle Design Criteria (Structures). NASA SP-8009: Propellant slosh loads. August, — 1968. — 48 p.
- [20] *Bauer H. F.* Sloshing in conical tanks // Acta Mechanica, — 1982. — **43**, (3-4). — P. 185–200.
- [21] *Bauer H. F., Eidel W.* Non-linear liquid motion in conical container // Acta Mechanica, — 1988. — **73**, (1-4). — P. 11–31.
- [22] *El Damatty A., Korol R. M., Tang L. M.* Analytical and experimental investigation of the dynamic response of liquid-filled conical tanks. Proceedings of the World Conference of Earthquake Engineering, New Zealand, — 2000. — Paper No. 966, Topic No. 7, — 8.
- [23] *Dutta S., Laha M. K.* Analysis of the small amplitude sloshing of a liquid in a rigid container of arbitrary shape using a low-order boundary element method // International Journal for Numerical Methods in Engineering — 2000. — **47**, 9. — P. 1633–1648.

- [24] *Gavrilyuk I., Lukovsky I. A., Timokha A. N.* Linear and nonlinear sloshing in a circular conical tank // Fluid Dynamics Research. — 2005. — 37. — P. 399–429.
- [25] *Gavrilyuk I., Hermann M., Lukovsky I., Solodun O., Timokha A.* Natural Sloshing Frequencies in Truncated Conical Tanks // Engineering Computations EC 1224. — 2008. — **25**, 6. — P. 518–540.
- [26] *Gavrilyuk I., Hermann M., Lukovsky I., Solodun O., Timokha A.* Weakly nonlinear sloshing in a truncated circular conical tank // Fluid Dynamics Research. — 2013. — **45**, 055512. — P. 1–30.
- [27] *Levin O.* Oscillation of a Fluid in Rectilinear Conical Container // AIAA Journ. — **2**, 6. — 1963. — P. 1447–1448.
- [28] *Lukovsky I. A.* Variational methods of solving dynamic problems for fluid-containing bodies // International Applied Mechanics, — 2004. — **40**, 10. — P. 1092–1128.
- [29] *Lukovsky I. A., Timokha A. N.* Modal modeling of nonlinear fluid sloshing in tanks with non-vertical walls. Non-conformal mapping technique // International Journal of Fluid Mechanics Research. — 2002. — **29**, 2. — P. 216–242.
- [30] *Shrimali M.K., Jangid R.S.* Earthquake response of isolated elevated liquid storage steel tanks // Journal of Constructional Steel Research. — 2003. — 59. — P. 1267–1288.
- [31] *Tang L. M.* Dynamic behavior of liquid-filled circular and conical tanks. Master Thesis, McMaster University — Hamilton, Ontario, Canada, — 1999. — 180 p.