Збірник праць Інституту математики НАН України 2018, т. 15, № 1, 65–87

УДК 517.935;681.5

Стабілізація і гасіння обмежених збурень у дескрипторних системах керування*

О. Г. Мазко, Т. О. Котов

Інститут математики НАН України, Київ;
mazkoag@gmail.com, taras.kotov@gmail.com

The existence criteria of static and dynamic regulators that provide the desired estimation of the weighted damping level of external and initial disturbances and the asymptotic stability of linear descriptor systems are established. The algorithms of constructing such regulators in the robust stabilization and H_∞-optimization problems of the controlled descriptor systems are proposed. The main computational procedures of algorithms reduce to solving the linear matrix inequalities with additional rank restrictions. An illustrative example of a non-impulsive descriptor control system with bounded disturbances is given.

Встановлено критерії існування статичних і динамічних регуляторів, що забезпечують бажану оцінку зваженого рівня гасіння зовнішніх і початкових збурень та асимптотичну стійкість лінійних дескрипторних систем. Запропоновано алгоритми побудови таких регуляторів у задачах робастної стабілізації й H_∞-оптимізації керованих дескрипторних систем. Основні обчислювальні процедури алгоритмів зводяться до розв'язування лінійних матричних нерівностей при додаткових рангових обмеженнях. Наведено ілюстративний приклад неімпульсивної дескрипторної системи стабілізації при наявності обмежених збурень.

1 Вступ

Динаміка багатьох фізичних об'єктів описується у вигляді дескрипторних (диференціально-алгебраїчних) систем рівнянь, нерозв'язаних стосовно старших похідних. Такі системи часто виникають при

*Робота виконана за частковою підтримкою НДР № 0117U004077.

дослідженні динаміки складних керованих об'єктів механіки, електротехніки, економіки тощо (див., наприклад, [1–5]).

Сучасні напрямки досліджень лінійних і нелінійних (серед того дескрипторних) систем керування складають методи теорії H_∞-оптимізації, які забезпечують робастну стійкість станів рівноваги й мінімізують негативний вплив зовнішніх збурень на динаміку керованих об'єктів (див., наприклад, [6–11]). Типовим критерієм якості у задачах H_∞-оптимізації неперервних і дискретних систем керування з нульовим початковим станом є рівень гасіння зовнішніх збурень, якому відповідає максимальне значення відношення L_2-норм векторів керованого виходу об'єкта і збурень. У [12–16] застосовувалися загальніші критерії якості, які характеризують зважений рівень гасіння як зовнішніх, так і початкових збурень, що обумовлені невідомими ненульовими значеннями початкового вектора. Введення вагових коефіцієнтів в узагальнених критеріях якості дає можливість встановити пріоритети між компонентами виходу, зовнішніх і початкових збурень [16–18]. Відомі методи синтезу H_∞-керування базуються на використанні верхніх оцінок для відповідних критеріїв якості, встановлених у термінах матричних рівнянь і нерівностей (твердження на взірець "Bounded Real Lemmas" [10, 19, 20]). Для класу лінійних дескрипторних систем аналогічні умови встановлено у [21–24].

Варто зазначити, що практичне застосування багатьох методів синтезу неперервних та дискретних систем керування базується на розв'язуванні лінійних матричних нерівностей (ЛМН). Для цього створені достатньо ефективні засоби LMI Toolbox комп'ютерної системи Matlab [25].

Дана робота присвячена задачам синтезу стабілізуючих статичних і динамічних регуляторів для лінійних дескрипторних систем, які забезпечують бажаний рівень впливу зовнішніх і початкових збурень на якість перехідних процесів. Розглядаються зважені критерії якості таких систем щодо вектора виходу і проводиться їхня оцінка методом квадратичних функцій Ляпунова. Отримані умови виконання заданих верхніх оцінок для даних критеріїв якості подаються у вигляді ЛМН при додаткових рангових обмеженнях, які застосовуються в запропонованих алгоритмах обчислення матричних коефіцієнтів.

Використовуватимемо такі позначення: I_n — одинична матриця порядку n; $0_{n\times m}$ — нульова $n\times m$-матриця; $X = X^\top > 0\ (\geq 0)$ — симетрична додатно (невід'ємно) визначена матриця X; $\mathrm{i}(X) = \{\mathrm{i}_+, \mathrm{i}_-, \mathrm{i}_0\}$ — інерція симетричної матриці X, яку утворюють кількості її додатних, від'ємних і нульових власних значень, враховуючи кратності; $\sigma(\cdot)$ — спектр матриці (пучка матриць); W_A — матриця, стовпці якої утворюють базис ядра $\operatorname{Ker} A$ матриці A; $\|x\|$ — евклідова норма вектора x; $\|w\|_P = \Big(\int\limits_0^\infty w^\top P w \, dt \Big)^{\frac{1}{2}}$ — зважена L_2-норма векторної функції $w(t)$; $\mathbb{C}_-$ — відкрита напівплощина $\mathrm{Re}\lambda < 0$ $(\lambda \in \mathbb{C})$.

2 Зважений рівень гасіння зовнішніх і початкових збурень

Розглянемо дескрипторну систему зі збуреннями

$$E\dot{x} = Ax + Bw, \quad z = Cx + Dw, \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $w \in \mathbb{R}^s$ і $z \in \mathbb{R}^l$ — відповідно вектори стану, зовнішніх збурень і виходу, E, A, B, C і D — сталі матриці відповідних розмірів, а пучок матриць $F(\lambda) = A - \lambda E$ регулярний і стійкий, тобто $\det F(\lambda) \not\equiv 0$ $(\lambda \in \mathbb{C})$ і $\sigma(F) \subset \mathbb{C}^- = \{\lambda : \mathrm{Re}\,\lambda < 0\}$. У випадку $\rho = \operatorname{rank} E < n$ дану систему можна подати у вигляді

$$\dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 w, \quad N\dot{x}_2 = x_2 + B_2 w, \quad z = C_1 x_1 + C_2 x_2 + Dw, \tag{2}$$

де $x_1 \in \mathbb{R}^r$, $x_2 \in \mathbb{R}^{n-r}$,

$$x = R\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad x_0 = R\begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix}, \quad LB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad CR = [C_1, C_2],$$

L і R — невироджені матриці перетворення пучка $F(\lambda)$ до канонічної форми Веєрштрасса [26]

$$LF(\lambda)R = \left[\begin{array}{c|c} A_1 - \lambda I_r & 0 \\ \hline 0 & I_{n-r} - \lambda N \end{array}\right]. \tag{3}$$

Власні значення матриці A_1 в (2) утворюють спектр пучка $\sigma(F)$, а N — деяка нільпотентна матриця індексу ν $(N^\nu = 0)$. При цьому пучок $F(\lambda)$ (або відповідна система (1)) має r скінченних динамічних мод, $n - \rho$ нединамічних мод і $\rho - r$ імпульсивних мод [3].

Регулярний пучок матриць $F(\lambda)$ при відсутності імпульсивних мод $(\rho = r)$ називатимемо *неімпульсивним*. У цьому випадку у (2) $N = 0$ і $\nu = 1$. Пучок матриць $F(\lambda)$ називається *допустимим*, якщо він регулярний, стійкий і неімпульсивний.

Із (3) випливають такі вирази

$$E = L^{-1}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} R^{-1}, \quad A = L^{-1}\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} R^{-1}. \tag{4}$$

Враховуючи (4), позначимо матриці

$$Z = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\omega} F^{-1}(\lambda)\,d\lambda = R\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} L, \tag{5}$$

$$E_1 = \begin{cases} E, & \nu \le 1, \\ EZE, & \nu > 1, \end{cases} \quad E_2 = \begin{cases} E, & \nu \le 2, \\ EZE, & \nu > 2, \end{cases} \tag{6}$$

де ω — замкнутий контур, що охоплює спектр $\sigma(F)$, і $\nu = 0$, якщо $\rho = n$. Матриця Z є єдиним розв'язком максимального рангу r алгебраїчної системи [16]

$$AZE = EZA, \quad Z = ZEZ. \tag{7}$$

Із (4) і (5) випливає, що критерієм неімпульсивності пучка $F(\lambda)$ є рівність $EZE = E$.

Якщо пучок матриць $F(\lambda) = A - \lambda E$ неімпульсивний, то у (2) $x_2 = -B_2 w$ і для кожної кусково-неперервної вектор-функції $w(t)$ система (1) має єдиний неперервний розв'язок. Якщо

$$\operatorname{rank}\big[E_2, B\big] = \operatorname{rank} E_2, \tag{8}$$

тобто $NB_2 = 0$, і x є розв'язком системи (1), то в (2) $Nx_2 = 0$ і $x_2 = -B_2 w$.

Нехай невідомий вектор збурень $w(t)$ обмежений за зваженою L_2-нормою $\|w\|_P$. Введемо критерій якості системи (1) у вигляді

$$J = \sup_{(w,x_0)\in\mathcal{W}} \frac{\|z\|_Q}{\sqrt{\|w\|_P^2 + x_0^\top X_0 x_0}}, \tag{9}$$

де $\mathcal{W}$ — множина пар (w, x_0), для яких дана система має розв'язок і виконується нерівність $0 < \|w\|_P^2 + x_0^\top X_0 x_0 < \infty$, а $P = P^\top > 0$, $Q = Q^\top > 0$ і $X_0 = X_0^\top \ge 0$ — деякі вагові матриці. Значення J характеризує зважений рівень впливу зовнішніх і початкових збурень на вихід системи (1). Для даного критерію якості використовуємо позначення J_0 або J_1, якщо відповідно $x_0^\top X_0 x_0 = 0$ або $w \equiv 0$. Очевидно, що $J_0 \le J$ і $J_1 \le J$, причому J_1 є характеристикою першої підсистеми у (2), оскільки при відсутності зовнішніх збурень $x_2 \equiv 0$. Початковий і збурювальний вектори, при яких досягається супремум у (9), є *найгіршими* стосовно критерію якості J.

Якщо вагова матриця X_0 в (9) подана у вигляді

$$X_0 = E^\top H E, \quad H = L^\top \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \\ H_2^\top & H_3 \end{bmatrix} L \tag{10}$$

або

$$X_0 = E_1^\top H E_1 = R^{-1\top} \begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R^{-1}, \tag{11}$$

де $H = H^\top > 0$ — задана матриця, то $x_0^\top X_0 x_0 = x_{01}^\top H_1 x_{01}$ і значення J не залежить від x_{02}. У випадку $\nu \le 1$ матриці (10) і (11) збігаються.

Лема 2.1. *Якщо для деякої матриці $X = X^\top$ виконується система ЛМН*

$$A^\top X E + E^\top X A + C^\top Q C \le 0, \tag{12}$$

$$0 \le E^\top X E \le \gamma^2 X_0, \tag{13}$$

то $J_1 \le \gamma$. Навпаки, якщо $J_1 \le \gamma$ і виконуються умови (11) і

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} E_2 \\ C \end{bmatrix} = \operatorname{rank} E_2, \tag{14}$$

то лінійне матричне рівняння

$$A^\top X E + E^\top X A + C^\top Q C = 0 \tag{15}$$

має розв'язок $X = X^\top$, що задовольняє співвідношення (13).

Лема 2.2. *Нехай вагова матриця X_0 задана у вигляді (11). Тоді виконується строга оцінка $J_1 < \gamma$, якщо сумісна щодо $X = X^\top$ система співвідношень (12), (13) і*

$$\operatorname{rank} Y = r, \quad Y = E^\top X E - \gamma^2 X_0. \tag{16}$$

Навпаки, якщо $J_1 < \gamma$ і виконується умова (14), то матричне рівняння (15) має розв'язок $X = X^\top$, що задовольняє співвідношення (13) і (16).

Зауваження 2.1. Якщо в лемах 2.1 і 2.2 замість (14) використати умову

$$\operatorname{rank}\left[\begin{array}{c} E_1 \\ C \end{array}\right] = \operatorname{rank} E_1, \tag{17}$$

яка еквівалентна рівності $C_2 = 0$, то матрицю X у відповідних твердженнях можна побудувати у вигляді

$$X = Z^\top \widetilde{X} Z = L^\top \left[\begin{array}{cc} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right] L, \tag{18}$$

де $\widetilde{X}$ і X_1 — невідомі матриці. Зокрема, за умов (11) і (17) оцінка $J_1 < \gamma$ виконується тоді і лише тоді, коли існує матриця (18), що задовольняє співвідношення (13), (15) і (16).

Для виконання строгої оцінки $J_1 < \gamma$ критерію якості J_1 із ваговими матрицями (10) або (11) достатньо, щоб була сумісною система ЛМН (12) і

$$E^\top X E \geq 0, \quad X < \gamma^2 H.$$

Зауваження 2.2. Якщо система (1) *спостережувана*, тобто

$$\operatorname{rank}\left[\begin{array}{c} A - \lambda E \\ C \end{array}\right] \equiv n, \quad \lambda \in \sigma(F),$$

то в лемах 2.1 і 2.2 розв'язок матричного рівняння (15) задовольняє умови

$$E^\top X E \geq 0, \quad \operatorname{rank}(E^\top X E) = r, \quad \mathrm{i}_+(X) \geq r.$$

При цьому $\sigma(F) \subset \mathbb{C}_-$, тобто система (1) асимптотично стійка.

Лема 2.3. *Якщо для деякої матриці $X = X^\top$ виконується система ЛМН (13) і*

$$\Phi(X) = \left[\begin{array}{cc} A^\top X E + E^\top X A + C^\top Q C & E^\top X B + C^\top Q D \\ B^\top X E + D^\top Q C & D^\top Q D - \gamma^2 P \end{array}\right] \leq 0, \tag{19}$$

то $J \leq \gamma$. Навпаки, якщо $J \leq \gamma$ і виконуються умови (11), а також (17) або (8), (14) і

$$\operatorname{rank}\left[\begin{array}{c} E_1 \\ D^\top Q C \end{array}\right] = \operatorname{rank} E_1, \tag{20}$$

то система ЛМН (13) і (19) сумісна.

Лема 2.4. *Нехай вагова матриця X_0 задана у вигляді (11). Тоді, якщо пучок матриць $F(\lambda)$ неімпульсивний, то строга оцінка $J < \gamma$ є наслідком системи співвідношень (13), (19) і*

$$\operatorname{rank}\Phi(X) = r + s, \quad \operatorname{rank}(E^\top XE - \gamma^2 X_0) = r. \tag{21}$$

Навпаки, якщо $J < \gamma$ і виконуються умови (17) або (8), (14) і (20), то існує матриця $X = X^\top$, що задовольняє систему співвідношень (13), (19) і (21).

Зауваження 2.3. Якщо у лемах 2.3 і 2.4 використати умову (17), то матрицю X у відповідних твердженнях можна побудувати у вигляді (18). Зокрема, за умов (11) і (17) строга оцінка $J < \gamma$ виконується тоді і лише тоді, коли існує матриця (18), що задовольняє співвідношення (13), (19) і (21). Друге співвідношення у (21) завжди виконується, якщо $X < \gamma^2 H$. Якщо використати критерій якості (9) із довільною ваговою матрицею $X_0 = X_0^\top > 0$, то для виконання оцінки $J < \gamma$ у випадку неімпульсивного пучка матриць $F(\lambda)$ достатньо сумісності системи співвідношень (19) і

$$\operatorname{rank}\Phi(X) = \rho + s, \quad 0 \le E^\top XE < \gamma^2 X_0.$$

Наслідок 2.1. *Якщо пучок матриць $F(\lambda)$ неімпульсивний і*

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = \rho, \tag{22}$$

то $J_0 < \gamma$ тоді і лише тоді, коли сумісна система співвідношень

$$\Phi(X) \le 0, \quad \operatorname{rank}\Phi(X) = \rho + s, \quad E^\top XE \ge 0. \tag{23}$$

Зауваження 2.4. Якщо $S = \gamma^2 P - D^\top QD > 0$, то ЛМН (19) еквівалентна матричній нерівності типу Ріккаті

$$A_0^\top XE + E^\top XA_0 + E^\top XBS^{-1}B^\top XE + Q_0 \le 0, \tag{24}$$

де $A_0 = A + BS^{-1}D^\top QC$ і $Q_0 = C^\top(Q + QDS^{-1}D^\top Q)C$.

Зауваження 2.5. Числа r і ν для пучка матриць $F(\lambda)$ можна визначити як

$$r = \operatorname{rank}\Delta_\alpha^\nu, \quad \nu = \min\left\{k \in \mathbb{N} : \operatorname{rank}\Delta_\alpha^k = \operatorname{rank}\Delta_\alpha^{k+1}\right\},$$

де $\Delta_\alpha = F^{-1}(\alpha)E$, $\alpha \notin \sigma(F)$ і $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Неважко встановити, що всі твердження лем 2.1 – 2.4 не порушуються, якщо в умовах (8), (14), (17) і (20) замість E_1 і E_2 використати відповідні матриці

$$E_1 = \begin{cases} E, & \nu \leq 1, \\ E\Delta_\alpha^{\nu-1}, & \nu > 1, \end{cases} \qquad E_2 = \begin{cases} E, & \nu \leq 2, \\ E\Delta_\alpha^{\nu-2}, & \nu > 2. \end{cases}$$

Наведемо необхідні й достатні умови виконання верхніх оцінок для критеріїв якості J_0 і J класу систем (1) з допустимим матричним пучком $F(\lambda)$, використовуючи несиметричні розв'язки матричних нерівностей. Відомо, що пучок матриць $F(\lambda)$ допустимий тоді і лише тоді, коли для деякої матриці X виконується система ЛМН [23]

$$A^\top X + X^\top A < 0, \quad E^\top X = X^\top E \geq 0.$$

Останнє співвідношення можна подати у вигляді ЛМН для двох матриць X і $S = S^\top \geq 0$:

$$\begin{bmatrix} S & S - E^\top X \\ S - X^\top E & 0 \end{bmatrix} \geq 0. \tag{25}$$

Тут $S = E^\top X = X^\top E$, оскільки усі елементи стрічок і стовпців невід'ємно визначеної матриці, які відповідають нульовим діагональним елементам, також повинні бути нульовими.

Лема 2.5. *Якщо існують матриці X і $S = S^\top \geq 0$, що задовольняють систему ЛМН (25) і*

$$\Psi(X) = \begin{bmatrix} A^\top X + X^\top A + C^\top QC & X^\top B + C^\top QD \\ B^\top X + D^\top QC & D^\top QD - \gamma^2 P \end{bmatrix} < 0, \tag{26}$$

то пучок матриць $F(\lambda)$ допустимий і $J_0 < \gamma$. Зворотне твердження виконується за умови

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} E \\ D^\top QC \end{bmatrix} = \rho. \tag{27}$$

Лема 2.6. *Нехай вагова матриця X_0 задана у вигляді (10). Якщо сумісна система співвідношень (25), (26) і*

$$S \leq \gamma^2 X_0, \quad \operatorname{rank}(S - \gamma^2 X_0) = \rho, \tag{28}$$

то пучок матриць $F(\lambda)$ допустимий і $J < \gamma$. Зворотне твердження виконується за умови (27).

Лема 2.7. *Нехай вагова матриця* $X_0 = X_0^\top > 0$. *Якщо сумісна система співвідношень* (25), (26) *і*

$$S < \gamma^2 X_0, \tag{29}$$

то пучок матриць $F(\lambda)$ *допустимий і* $J < \gamma$. *Зворотне твердження виконується за умов* (27) *і*

$$X_0 = E^\top Z^\top HZE + (I_n - E^\top Z^\top)H(I_n - ZE) > 0, \tag{30}$$

де $H = H^\top > 0$ *— деяка матриця.*

Матриці H і X_0 в (30) мають таку структуру:

$$H = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \\ H_2^\top & H_3 \end{bmatrix}, \quad X_0 = R^{-1\top} \begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_3 \end{bmatrix} R^{-1}.$$

Доведення основних тверджень наведених лем і їхніх наслідків викладено у [24]. Із даних тверджень випливають також алгоритми обчислення критеріїв якості J_0 і J системи (1) на основі розв'язування відповідних оптимізаційних задач. Зокрема, при виконанні необхідних і достатніх умов лем 2.3 і 2.6 відповідно маємо:

$$\begin{aligned} J &= \inf\{\gamma : \Phi(X) \le 0,\ 0 \le E^\top XE \le \gamma^2 X_0\}, \\ J &= \inf\{\gamma : \Psi(X) < 0,\ 0 \le E^\top X = X^\top E \le \gamma^2 X_0\}. \end{aligned} \tag{31}$$

Зауваження 2.6. При виконанні умов, що забезпечують строгі оцінки $J_0 < \gamma$ і $J < \gamma$ у лемах 2.4–2.7, нульовий стан системи (22) зі структурованою невизначеністю вектора збурень

$$w = \frac{1}{\gamma}\Theta z, \quad \Theta^\top P \Theta \le Q \tag{32}$$

робастно стійкий. Це твердження доводиться за допомогою узагальненої леми про матричну невизначеність [27, лема 2]. Так, за умов леми 2.4 (2.5) квадратична форма $v(x) = x^\top E^\top XEx$ ($v(x) = x^\top Sx$) є спільною функцією Ляпунова сім'ї систем (22), (32).

3 Дескрипторна система з керованими і спостережуваними виходами

Розглянемо систему керування

$$\begin{aligned} E\dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u, \quad x(0) = x_0, \\ z &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u, \\ y &= C_2 x + D_{21} w + D_{22} u, \end{aligned} \tag{33}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $w \in \mathbb{R}^s$, $z \in \mathbb{R}^k$ і $y \in \mathbb{R}^l$ — вектори відповідно стану, керування, зовнішніх збурень, керованого і спостережуваного виходів, а всі матричні коефіцієнти відповідних розмірів сталі й $\operatorname{rank} E = \rho \leq n$. Керування системою шукаємо у вигляді статичного або динамічного зворотного зв'язку за спостережуваним виходом, а якість відповідної замкненої системи оцінюємо за допомогою зважених критеріїв J_0 і J типу (9) стосовно керованого виходу. Основні твердження сформулюємо для критерію якості J, вагова матриця X_0 якого подається у вигляді (10). Розглянемо також випадок довільної додатно визначеної матриці X_0.

Статичні й динамічні регулятори, які мінімізують критерій якості J, називатимемо *J-оптимальними*. J_0-оптимальне керування у випадку одиничних вагових матриць P і Q є H_∞-оптимальним.

3.1 Статичний регулятор

$$u = Ky, \quad \det(I_m - KD_{22}) \neq 0, \tag{34}$$

де K — шукана матриця коефіцієнтів підсилення. Замкнена система має вигляд

$$E\dot{x} = A_* x + B_* w, \quad z = C_* x + D_* w, \tag{35}$$

де $A_* = A + B_2 K_* C_2$, $B_* = B_1 + B_2 K_* D_{21}$, $C_* = C_1 + D_{12} K_* C_2$, $D_* = D_{11} + D_{12} K_* D_{21}$, $K_* = (I_m - KD_{22})^{-1} K$.

Теорема 3.1. *Нехай для деяких матриць X, Y і $S = S^T \geq 0$ виконується система співвідношень (25), (28) і*

$$W_R^T \begin{bmatrix} A^T X + X^T A + C_1^T Q C_1 & X^T B_1 + C_1^T Q D_{11} \\ B_1^T X + D_{11}^T Q C_1 & D_{11}^T Q D_{11} - \gamma^2 P \end{bmatrix} W_R < 0, \tag{36}$$

$$W_L^T \begin{bmatrix} AY + Y^T A^T + B_1 P^{-1} B_1^T & Y^T C_1^T + B_1 P^{-1} D_{11}^T \\ C_1 Y + D_{11} P^{-1} B_1^T & D_{11} P^{-1} D_{11}^T - \gamma^2 Q^{-1} \end{bmatrix} W_L < 0, \tag{37}$$

$$XY = \gamma^2 I_n, \tag{38}$$

де $R = \left[C_2,\, D_{21}\right]$, $L = \left[B_2^T,\, D_{12}^T\right]$ і $\gamma > 0$. Тоді існує статичний регулятор (34), при якому для критерію якості (9) замкненої системи (35) виконується оцінка $J < \gamma$, а пучок матриць $F_*(\lambda) = A_* - \lambda E$ є допустимим. Навпаки, якщо для деякої матриці K регулятора (34) *замкнена система* (35) *має критерій якості* $J < \gamma$, *пучок матриць* $F_*(\lambda)$ *допустимий і виконується рівність*

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} E \\ D_*^\top Q C_* \end{bmatrix} = \rho, \tag{39}$$

то система співвідношень (25), (28), (36)–(38) *сумісна.*

Доведення. Враховуючи лему Шура, перепишемо матричну нерівність (26) у лемі 2.6 для замкненої системи (35) у вигляді ЛМН стосовно K_*:

$$\begin{bmatrix} A_*^T X + X^\top A_* & X^\top B_* & C_*^\top \\ B_*^\top X & -\gamma^2 P & D_*^\top \\ C_* & D_* & -Q^{-1} \end{bmatrix} = \widehat{L}^\top K_* \widehat{R} + \widehat{R}^\top K_*^\top \widehat{L} + \Omega < 0, \tag{40}$$

де $\widehat{R} = [R, 0_{l\times k}]$, $R = [C_2, D_{21}]$, $\widehat{L} = [L, 0_{m\times s}]\,\widetilde{X}$, $L = [B_2^\top, D_{12}^\top]$,

$$\widetilde{X} = \begin{bmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_k \\ 0 & I_s & 0 \end{bmatrix}, \quad \Omega = \begin{bmatrix} A^\top X + X^\top A & X^\top B_1 & C_1^\top \\ B_1^\top X & -\gamma^2 P & D_{11}^\top \\ C_1 & D_{11} & -Q^{-1} \end{bmatrix}.$$

Далі застосуємо відомий критерій сумісності ЛМН (40) [10], поданий у вигляді співвідношень

$$W_{\widehat{R}}^\top \Omega W_{\widehat{R}} < 0, \quad W_{\widehat{L}}^\top \Omega W_{\widehat{L}} < 0. \tag{41}$$

Оскільки

$$W_{\widehat{R}} = \begin{bmatrix} W_R & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix}, \quad W_{\widehat{L}} = \widetilde{X}^{-1}\begin{bmatrix} W_L & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix},$$

то дані співвідношення набувають вигляду (36) і (37), де $Y = \gamma^2 X^{-1}$.

Якщо матрична нерівність (40) сумісна, то завжди можна обрати такий його розв'язок K_*, щоб $\det(I_m - KD_{22}) \neq 0$, де

$$K = K_*(I_l + D_{22}K_*)^{-1}. \tag{42}$$

Отже співвідношення (25), (28) і (36) – (38) на основі леми 2.6 забезпечують існування регулятора (34), при якому виконується задана оцінка $J < \gamma$ і пучок матриць $F_*(\lambda) = A_* - \lambda E$ є допустимим. Зворотне твердження виконується за додатковою умовою (39).

Теорему доведено. $\square$

Наведемо наслідки теореми 3.1 у таких двох випадках:

$$B_2 = I_n, \quad D_{12} = 0, \quad D_{11} P^{-1} D_{11}^\top < \gamma^2 Q^{-1}; \tag{43}$$

$$C_2 = I_n, \quad D_{21} = 0, \quad D_{11}^\top Q D_{11} < \gamma^2 P. \tag{44}$$

За умов (43) $W_L = \left[0_{k\times n}, I_k\right]^T$ і матрична нерівність (37) у теоремі 3.1 не залежить від Y, а за умов (44) $W_R = \left[0_{s\times n}, I_s\right]^T$ і матрична нерівність (36) не залежить від X. У цьому випадку, враховуючи рівність (38), співвідношення (25) і (28) можна переписати у вигляді

$$\begin{bmatrix} G & G - EY \\ G - Y^\top E^\top & 0 \end{bmatrix} \geq 0, \tag{45}$$

$$0 \leq G \leq Y^\top X_0 Y, \quad \operatorname{rank}(G - Y^\top X_0 Y) = \rho, \tag{46}$$

де G — деяка невідома матриця. Якщо у системі (33) виконуються умови (44), причому $D_{22} = 0$, то $y = x$ і шуканий регулятор (34) є статичним зворотним зв'язком за станом.

Наслідок 3.1. *Для системи (33) за умов (43) існує статичний регулятор (34), що забезпечує оцінку $J_0 < \gamma$ ($J < \gamma$), якщо для деяких матриць X і $S = S^\top \geq 0$ виконується система співвідношень (25) і (36) ((25), (28) і (36)). При цьому пучок матриць $F_*(\lambda) = A_* - \lambda E$ є допустимим.*

Наслідок 3.2. *Для системи (33) за умов (44) існує статичний регулятор (34), що забезпечує оцінку $J_0 < \gamma$ ($J < \gamma$), якщо для деяких матриць Y і $G = G^\top \geq 0$ виконується система співвідношень (37) і (45) ((37), (45) і (46)). При цьому пучок матриць $F_*(\lambda) = A_* - \lambda E$ є допустимим.*

Якщо у співвідношеннях (28) і (46) не враховувати рангових обмежень, то у відповідних твердженнях наслідків 3.1 і 3.1 повинні виконуватись нестрогі оцінки $J \leq \gamma$.

Наведемо алгоритми побудови матриць статичного регулятора (34), що забезпечує строгу оцінку критерію якості $J_0 < \gamma$ замкненої системи (35) за відповідних обмежень (43) і (44).

Алгоритм 3.1.

1) *Обчислення матриці W_R, де $R = \left[C_2,\, D_{21}\right]$.*
2) *Розв'язування системи ЛМН (25) і (36) щодо X і $S = S^\top \geq 0$.*
3) *Розв'язування ЛМН (40) щодо K_*.*
4) *Обчислення матриці регулятора K за формулою (42).*

Алгоритм 3.2.
1) *Обчислення матриці* W_L*, де* $L = [B_2^T, D_{12}^T]$.
2) *Розв'язування системи ЛМН* (37) *і* (45) *щодо* Y *і* $G = G^\top \geq 0$.
3) *Розв'язування ЛМН* (40) *щодо* K_**, де* $X = \gamma^2 Y^{-1}$.
4) *Обчислення матриці регулятора* K *за формулою* (42).

Основною обчислювальною процедурою в наведених алгоритмах є розв'язування системи ЛМН. Якщо систему ЛМН (25) і (36) у п. 2 алгоритму 3.1 доповнити умовою $S \leq \gamma^2 X_0$, то регулятор (34), побудований за даним алгоритмом, забезпечує замкненій системі критерій якості $J \leq \gamma$. Алгоритм 3.2 також забезпечить оцінку $J \leq \gamma$, якщо його п. 2 доповнити умовою $G \leq Y^\top X_0 Y$ (див. лему 2.7).

3.2 Динамічний регулятор

$$\dot{\xi} = Z\xi + Vy, \quad u = U\xi + Ky, \quad \xi(0) = 0, \tag{47}$$

де $\xi \in \mathbb{R}^p$, p — порядок регулятора, матриці Z, V, U і K підлягають визначенню. Якщо матриця K задовольняє обмеження у (34), то замкнена система має вигляд

$$\widehat{E}\dot{\widehat{x}} = \widehat{A}_*\widehat{x} + \widehat{B}_*w, \quad z = \widehat{C}_*\widehat{x} + \widehat{D}_*w, \quad \widehat{x}(0) = \widehat{x}_0, \tag{48}$$

де

$$\widehat{x} = \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}, \quad \widehat{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \widehat{E} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix},$$

$$\widehat{A}_* = \begin{bmatrix} A + B_2K_*C_2 & B_2U_* \\ V_*C_2 & Z_* \end{bmatrix} = \widehat{A} + \widehat{B}_2\widehat{K}_*\widehat{C}_2,$$

$$\widehat{B}_* = \begin{bmatrix} B_1 + B_2K_*D_{21} \\ V_*D_{21} \end{bmatrix} = \widehat{B}_1 + \widehat{B}_2\widehat{K}_*\widehat{D}_{21},$$

$$\widehat{C}_* = [C_1 + D_{12}K_*C_2, D_{12}U_*] = \widehat{C}_1 + \widehat{D}_{12}\widehat{K}_*\widehat{C}_2,$$

$$\widehat{D}_* = D_{11} + D_{12}K_*D_{21} = \widehat{D}_{11} + \widehat{D}_{12}\widehat{K}_*\widehat{D}_{21},$$

$$\widehat{K}_* = \begin{bmatrix} K_* & U_* \\ V_* & Z_* \end{bmatrix} = (I_{m+p} - \widehat{K}\widehat{D}_{22})^{-1}\widehat{K},$$

$$\widehat{K} = \begin{bmatrix} K & U \\ V & Z \end{bmatrix} = (I_{m+p} + \widehat{K}_*\widehat{D}_{22})^{-1}\widehat{K}_*,$$

$$\widehat{A}=\left[\begin{array}{cc} A & 0_{n\times p}\\ 0_{p\times n} & 0_{p\times p}\end{array}\right],\ \widehat{B}_1=\left[\begin{array}{c} B_1\\ 0_{p\times s}\end{array}\right],\ \widehat{B}_2=\left[\begin{array}{cc} B_2 & 0_{n\times p}\\ 0_{p\times m} & I_p\end{array}\right],$$

$$\widehat{C}_1=\left[C_1,0_{k\times p}\right],\quad \widehat{C}_2=\left[\begin{array}{cc} C_2 & 0_{l\times p}\\ 0_{p\times n} & I_p\end{array}\right],\quad \widehat{D}_{11}=D_{11},$$

$$\widehat{D}_{12}=\left[D_{12},0_{k\times p}\right],\ \widehat{D}_{21}=\left[\begin{array}{c} D_{21}\\ 0_{p\times s}\end{array}\right],\ \widehat{D}_{22}=\left[\begin{array}{cc} D_{22} & 0_{l\times p}\\ 0_{p\times m} & 0_{p\times p}\end{array}\right].$$

Тут невідомими є блоки матриці $\widehat{K}_*$

$$K_*=(I_m-KD_{22})^{-1}K,\quad U_*=(I_m-KD_{22})^{-1}U,$$

$$V_*=V(I_l-D_{22}K)^{-1},\quad Z_*=Z+VD_{22}(I_m-KD_{22})^{-1}U,$$

які однозначно визначають шукані матриці динамічного регулятора (47):

$$\begin{gathered} K=(I_m+K_*D_{22})^{-1}K_*,\quad U=(I_m+K_*D_{22})^{-1}U_*,\\ V=V_*(I_l+D_{22}K_*)^{-1},\quad Z=Z_*-V_*D_{22}(I_m+K_*D_{22})^{-1}U_*. \end{gathered} \tag{49}$$

Із наведених формул для матричних коефіцієнтів у (48) випливає, що система (33) з динамічним регулятором (47) еквівалентна аналогічній системі зі статичним регулятором $\widehat{u}=\widehat{K}_*\widehat{y}$:

$$\begin{array}{l} \widehat{E}\dot{\widehat{x}}=\widehat{A}\widehat{x}+\widehat{B}_1w+\widehat{B}_2\widehat{u},\quad \widehat{x}(0)=\widehat{x}_0,\\ z=\widehat{C}_1\widehat{x}+\widehat{D}_{11}w+\widehat{D}_{12}\widehat{u},\\ \widehat{y}=\widehat{C}_2\widehat{x}+\widehat{D}_{21}w, \end{array} \tag{50}$$

де

$$\widehat{x}=\left[\begin{array}{c} x\\ \xi\end{array}\right],\quad \widehat{y}=\left[\begin{array}{c} y-D_{22}u\\ \xi\end{array}\right],\quad \widehat{u}=\left[\begin{array}{c} u\\ \dot{\xi}\end{array}\right].$$

Нехай $\widehat{J}$ — критерій якості типу (9) для системи (50) із початковим вектором $\widehat{x}_0$ і ваговою матрицею

$$\widehat{X}_0=\widehat{E}^\top\widehat{H}\widehat{E},\quad \widehat{H}=\left[\begin{array}{cc} H & H_1^\top\\ H_1 & H_2\end{array}\right]>0.$$

Оскільки $\xi_0=0$, то його значення збігається з J, причому $X_0=E^\top HE$ є першим діагональним блоком матриці $\widehat{X}_0$.

Отже, до розширеної системи (50) можна застосувати теорему 3.1 і методику її доведення (див. також доведення теореми 3.2 [17]). Позначимо блочні матриці

$$\widehat{X} = \begin{bmatrix} X & X_3 \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix}, \quad \widehat{Y} = \begin{bmatrix} Y & Y_3 \\ Y_1 & Y_2 \end{bmatrix}, \tag{51}$$

і розглянемо умови теореми 3.1 для системи (50):

$$0 \le \widehat{E}^\top \widehat{X} = \widehat{X}^\top \widehat{E} = \widehat{S} \le \gamma^2 \widehat{X}_0, \quad \operatorname{rank}(\widehat{S} - \gamma^2 \widehat{X}_0) = \rho + p, \tag{52}$$

$$W_{\widehat{R}}^\top \begin{bmatrix} \widehat{A}^\top \widehat{X} + \widehat{X}^\top \widehat{A} + \widehat{C}_1^\top Q \widehat{C}_1 & \widehat{X}^\top \widehat{B}_1 + \widehat{C}_1^\top Q D_{11} \\ \widehat{B}_1^\top \widehat{X} + D_{11}^\top Q \widehat{C}_1 & D_{11}^\top Q D_{11} - \gamma^2 P \end{bmatrix} W_{\widehat{R}} < 0, \tag{53}$$

$$W_{\widehat{L}}^\top \begin{bmatrix} \widehat{A}\widehat{Y} + \widehat{Y}^\top \widehat{A}^\top + \widehat{B}_1 P^{-1} \widehat{B}_1^\top & \widehat{Y}^\top \widehat{C}_1^\top + \widehat{B}_1 P^{-1} D_{11}^\top \\ \widehat{C}_1 \widehat{Y} + D_{11} P^{-1} \widehat{B}_1^\top & D_{11} P^{-1} D_{11}^\top - \gamma^2 Q^{-1} \end{bmatrix} W_{\widehat{L}} < 0, \tag{54}$$

$$\widehat{X}\widehat{Y} = \gamma^2 I_{n+p}, \tag{55}$$

де $\widehat{R} = [\widehat{C}_2,\, \widehat{D}_{21}]$ і $\widehat{L} = [\widehat{B}_2^T,\, \widehat{D}_{12}^T]$. Використовуючи блокову структуру матричних коефіцієнтів системи (50) і вирази

$$W_{\widehat{R}} = \left[\begin{array}{cc|c} I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_p \\ 0 & I_s & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} W_R \\ 0_{p \times s_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix} W_R, \quad R = [C_2, D_{21}],$$

$$W_{\widehat{L}} = \left[\begin{array}{cc|c} I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_p \\ 0 & I_k & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} W_L \\ 0_{p \times k_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix} W_L, \quad L = [B_2^T, D_{12}^T],$$

де $s_1 = n + s - \operatorname{rank} R$ і $k_1 = n + k - \operatorname{rank} L$, співвідношення (53) і (54) зводяться до відповідних матричних нерівностей (36) і (37) стосовно перших діагональних блоків $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ матриць $\widehat{X}$ і $\widehat{Y}$. При цьому матриці X і Y можна шукати невиродженими, а доповнювальні блоки $X_1, Y_1 \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $X_2, Y_2 \in \mathbb{R}^{p\times p}$ і $X_3, Y_3 \in \mathbb{R}^{n\times p}$ повинні бути такими, щоб виконувалися співвідношення (52) і (55). Причому, рангове обмеження у (52) за умов (25) і (28) можна задовольнити шляхом вибору доповнювальних блоків H_1 і H_2 матриці $\widehat{H}$, які не впливають на значення критерію якості $\widehat{J}$. Для критерію якості $\widehat{J}_0 = J_0$ дане обмеження не використовується.

Якщо вдається задовольнити всі наведені умови (52) – (55), то матрицю $\widehat{K}_*$ знаходимо як розв'язок ЛМН

$$\begin{bmatrix} \widehat{A}_*^\top \widehat{X} + \widehat{X}^\top \widehat{A}_* & \widehat{X}^\top \widehat{B}_* & \widehat{C}_*^\top \\ \widehat{B}_*^\top \widehat{X} & -\gamma^2 P & \widehat{D}_*^\top \\ \widehat{C}_* & \widehat{D}_* & -Q^{-1} \end{bmatrix} = \widehat{L}_*^\top \widehat{K}_* \widehat{R}_* + \widehat{R}_*^\top \widehat{K}_*^\top \widehat{L}_* + \widehat{\Omega} < 0, \tag{56}$$

де $\widehat{R}_* = \left[\, \widehat{R}, 0_{(l+p)\times k} \,\right]$, $\widehat{L}_* = \left[\, \widehat{L}, 0_{(m+p)\times s} \,\right] \widetilde{X}$,

$$\widetilde{X} = \begin{bmatrix} \widehat{X} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_k \\ 0 & I_s & 0 \end{bmatrix}, \quad \widehat{\Omega} = \begin{bmatrix} \widehat{A}^\top \widehat{X} + \widehat{X}^\top \widehat{A} & \widehat{X}^\top \widehat{B}_1 & \widehat{C}_1^\top \\ \widehat{B}_1^\top \widehat{X} & -\gamma^2 P & \widehat{D}_{11}^\top \\ \widehat{C}_1 & \widehat{D}_{11} & -Q^{-1} \end{bmatrix}.$$

Лема 3.1. *Для заданих невироджених $n \times n$-матриць X, Y і числа $\gamma > 0$ існують матриці X_1, $X_2 = X_2^\top > 0$, X_3, Y_1, $Y_2 = Y_2^\top > 0$ і Y_3, при яких блочні матриці $\widehat{E}$, $\widehat{X}$ і $\widehat{Y}$, визначені в (48) і (51), задовольняють співвідношення*

$$\widehat{E}^\top \widehat{X} = \widehat{X}^\top \widehat{E} \geq 0, \quad \widehat{E}\widehat{Y} = \widehat{Y}^\top \widehat{E}^\top \geq 0, \quad \widehat{X}\widehat{Y} = \gamma^2 I_{n+p}, \tag{57}$$

тоді і лише тоді, коли

$$W = W^\top \geq 0, \quad \operatorname{rank} W = \rho + \delta, \quad \delta = \operatorname{rank} \Delta \leq p, \tag{58}$$

де

$$W = \begin{bmatrix} E^\top X & \gamma E^\top \\ \gamma E & EY \end{bmatrix}, \quad \Delta = \gamma^2 I_n - XY.$$

Доведення. Необхідність. Блочні матриці $\widehat{X}$ і $\widehat{Y}$ у співвідношеннях (57) повинні бути невиродженими. Перепишемо дані співвідношення у вигляді

$$\begin{bmatrix} E^\top X & E^\top X_3 \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X^\top E & X_1^\top \\ X_3^\top E & X_2^\top \end{bmatrix} \geq 0,$$

$$\begin{bmatrix} EY & EY_3 \\ Y_1 & Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y^\top E^\top & Y_1^\top \\ Y_3^\top E^\top & Y_2^\top \end{bmatrix} \geq 0,$$

$$XY + X_3 Y_1 = \gamma^2 I_n, \quad XY_3 + X_3 Y_2 = 0,$$

$$X_1 Y + X_2 Y_1 = 0, \quad X_1 Y_3 + X_2 Y_2 = \gamma^2 I_p.$$

Використовуючи розклад невід'ємно визначеної матриці $\widehat{E}^\top \widehat{X} = L^\top L \geq 0$, маємо

$$\left[X_1, X_2\right] = L_2^\top L, \quad \operatorname{rank}\left[X_1, X_2\right] = p \leq \operatorname{rank} L_2 = \operatorname{rank} X_2,$$

де $L = \left[L_1, L_2\right]$ і $X_2 = L_2^\top L_2$. Як наслідок, $X_2 = X_2^\top > 0$ і $\operatorname{rank} Y = n$, оскільки $(X - X_3 X_2^{-1} X_1)\, Y = \gamma^2 I_n$. Аналогічно, $Y_2 = Y_2^\top > 0$ і $\operatorname{rank} X = n$.

Отже, всі діагональні блоки матриць $\widehat{X}$ і $\widehat{Y}$ в (57) є невиродженими. За формулою Фробеніуса для оберненої матриці $\widehat{Y}^{-1}$ маємо

$$\begin{bmatrix} X & X_3 \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix} = \gamma^2 \begin{bmatrix} H^{-1} & -H^{-1} Y_3 Y_2^{-1} \\ -Y_2^{-1} Y_1 H^{-1} & Y_2^{-1} + Y_2^{-1} Y_1 H^{-1} Y_3 Y_2^{-1} \end{bmatrix},$$

де $H = Y - Y_3 Y_2^{-1} Y_1$. Далі застосуємо конгруентне перетворення блочної матриці (58):

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -\gamma X^{-1\top} & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E^\top X & \gamma E^\top \\ \gamma E & EY \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & -\gamma X^{-1} \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E^\top X & 0 \\ 0 & \Xi \end{bmatrix},$$

де $E^\top X = X^\top E \geq 0$ і $\Xi = E(Y - \gamma^2 X^{-1}) = Y_1^\top Y_2^{-1} Y_1 \geq 0$. Звідси $W = W^\top \geq 0$. Крім того, виконуються рангові обмеження у (58), оскільки $\Xi = -EX^{-1}\Delta$, $\Delta = -XY_3Y_2^{-1}Y_1$ і

$$\operatorname{rank} E^\top X = \rho, \ \operatorname{rank} Y_1 \leq p, \ \ \operatorname{rank} \Delta \leq \operatorname{rank} Y_1 = \operatorname{rank} \Xi \leq \operatorname{rank} \Delta.$$

Достатність. Нехай виконуються співвідношення (58). Якщо $\delta = 0$, то у (57) можна, наприклад, взяти $X_1 = 0$, $X_2 = \gamma^2 I_p$, $X_3 = 0$, $Y_1 = 0$, $Y_2 = I_p$ і $Y_3 = 0$.

Нехай $\delta \neq 0$. Візьмемо $Y_2 = I_p$ і $Y_1^\top = \left[V^\top, 0_{n\times(p-\delta)}\right] \in \mathbb{R}^{n\times p}$, де $V \in \mathbb{R}^{\delta\times n}$ — множник повного рангу $\delta \leq p$ у розкладі невід'ємно визначеної матриці $\Xi = V^\top V$. Тоді існує така матриця $U \in \mathbb{R}^{n\times\delta}$, що $\Delta = UV$, оскільки

$$\operatorname{rank} V \leq \operatorname{rank} \begin{bmatrix} V \\ \Delta \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\,(V^\top V + \Delta^\top \Delta) = \operatorname{rank}\left[(-EX^{-1} + \Delta^\top)\Delta\right]$$

$$\leq \operatorname{rank} \Delta = \operatorname{rank} \Xi = \operatorname{rank} V = \delta, \quad \operatorname{rank} \begin{bmatrix} V \\ \Delta \end{bmatrix} = \operatorname{rank} V.$$

При цьому $-EX^{-1}UV = \Xi = V^\top V$ і $V^T = -EX^{-1}U$.

Нехай тепер $Y_3 = -\big[X^{-1}U, 0_{n\times(p-\delta)}\big]$, тоді $Y_3Y_1 = Y - \gamma^2 X^{-1}$, $EY - EY_3Y_1 = \gamma^2 EX^{-1} \geq 0$ і за лемою Шура виконується друга матрична нерівність у (57). Причому, перша матрична нерівність у (57) є наслідком другої.

Для того, щоб виконувалась матрична рівність у (57), блоки матриці $\widehat{X}$ можна взяти такими:

$$X_1 = -Y_1X, \quad X_2 = \gamma^2 I_p + Y_1XY_3, \quad X_3 = -XY_3. \tag{59}$$

При цьому $H = \gamma^2 X^{-1}$.

Лему доведено. □

Зауваження 3.1. За умов (58) повинно бути $\delta \leq \rho$, оскільки

$$W = \begin{bmatrix} E^\top & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & \gamma I_n \\ \gamma I_n & Y \end{bmatrix}, \quad \operatorname{rank} W \leq 2\rho.$$

Тому нерівність $\delta \leq p$ у (58) завжди виконується, якщо $p \geq \rho$. У випадку $\delta = 0$ умови (58) зводяться до співвідношень (25) і (38) у теоремі 3.1.

Перепишемо матричну нерівність (58) у вигляді

$$W = \begin{bmatrix} S & \gamma E^\top \\ \gamma E & G \end{bmatrix} \geq 0, \tag{60}$$

де $S = E^\top X$ і $G = EY$ — розв'язки відповідних ЛМН (25) і (45). Із леми 3.1 і наведених вище співвідношень випливає такий результат.

Теорема 3.2. *Нехай для деяких матриць X, Y, S і G виконується система ЛМН (25), (28), (36), (37), (45), (60) і умови*

$$\operatorname{rank} W = \rho + \delta, \quad \delta = \operatorname{rank} \Delta \leq p, \tag{61}$$

де $\Delta = \gamma^2 I_n - XY$. Тоді існує динамічний регулятор (47), при якому критерій якості (9) замкненої системи (48) $J < \gamma$, а пучок матриць $\widehat{F}_*(\lambda) = \widehat{A}_* - \lambda\widehat{E}$ є допустимим. Навпаки, якщо для деякого регулятора (47) замкнена система має критерій якості $J < \gamma$, пучок матриць $\widehat{F}_*(\lambda)$ допустимий і виконується рівність

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} \widehat{E} \\ \widehat{D}_*^\top Q \widehat{C}_* \end{bmatrix} = \rho + p, \tag{62}$$

то система ЛМН (25), (28), (36), (37), (45) і (60) за умов (61) сумісна.

Зауважимо, що рангові обмеження (61) у теоремі 3.2 еквівалентні умовам

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} X-\Theta E & \gamma I_n \\ \gamma I_n & Y \end{bmatrix} = n, \quad \operatorname{rank}\Theta \le p. \tag{63}$$

Дійсно, рівність в (63) означає, що $\Delta = -\Theta EY$, при цьому

$$T^\top WT = \begin{bmatrix} EY & 0 \\ 0 & \Gamma \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_n & -\gamma Y^{-1} \end{bmatrix}, \quad \det T \ne 0.$$

де $\Gamma = E^\top(X - \gamma^2 Y^{-1}) = E^\top \Theta E \ge 0$, і $\operatorname{rank}\Gamma = \delta \le \operatorname{rank}\Theta \le p$. За умов (61) невідому матрицю Θ в (63) можна знайти у вигляді $\Theta = X_3 X_2^{-1} X_3^\top$, причому $X_1 = X_3^\top E$, $X_2 = X_2^\top > 0$ і X_3 є доповнювальними блоками матриці $\widehat{X}$ у співвідношеннях (57).

На основі теореми 3.2 наведемо алгоритм синтезу динамічного регулятора (47) для системи (33).

Алгоритм 3.3.
1) *Обчислення матриць* W_L *і* W_R, *де* $L = [B_2^T, D_{12}^T]$, $R = [C_2, D_{21}]$.
2) *Знаходження матриць* X, Y, $S = S^\top \ge 0$ *і* $G = G^\top \ge 0$, *що задовольняють систему ЛМН* (25), (28), (36), (37), (45) *і* (60) *за умов* (61).
3) *Формування доповнювальних блоків* X_1, $X_2 = X_2^\top > 0$ *і* X_3 *матриці* $\widehat{X}$ *у вигляді* (59) *(див. доведення леми* 3.1*).*
4) *Розв'язування ЛМН* (56) *стосовно* $\widehat{K}_*$.
5) *Обчислення матриць регулятора* (47) *за формулами* (49).

Реалізація даного алгоритму забезпечує оцінку критерію якості $J < \gamma$, а також регулярність, неімпульсивність і асимптотичну стійкість замкненої системи (48). Якщо в п. 2 алгоритму замість рангових обмежень (61) використати співвідношення (63), то при формуванні матриць X_1, X_2 і X_3 в п. 3 можна покласти $X_1 = X_3^\top E$ і $\Theta = X_3 X_2^{-1} X_3^\top$. Тоді стовпцями матриці X_3 можуть бути ортонормовані власні вектори матриці Θ, що відповідають її $q = \operatorname{rank}\Theta$ ненульовим власним значенням $\theta_i > 0$, при цьому $X_2 = \operatorname{diag}\{\theta_1, \dots, \theta_q\}^{-1}$.

У випадку $X_0 > 0$ замість рангової умови (28) доцільно використати ЛМН (29) (див. лему 2.7). Якщо у п. 2 $\delta = 0$ (або $\Theta = 0$) і замість (56) використати ЛМН (40) стосовно K_*, то алгоритм 3.3 дає можливість побудувати статичний регулятор (34), що задовольняє твердження теореми 3.1. Для досягнення оцінки $J_0 < \gamma$ можна використати спрощений варіант алгоритму 3.3, у якому не використовуються співвідношення з ваговою матрицею X_0.

4 Приклад

Розглянемо дескрипторну систему керування (33) з такими коефіцієнтами (див. [28, Приклад 4.17]):

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_2 = I_4,$$

$$D_{11} = 0_{2\times 2}, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_{21} = 0_{4\times 2}, \quad D_{22} = 0_{4\times 1}.$$

У даному випадку $\rho = 2$ і виконуються умови (44) наслідку 3.2. Пучок матриць $F(\lambda) = A - \lambda E$ має спектр $\sigma(F) = \{-0,5 \pm 0,86603i\}$ і є допустимим, оскільки

$$EZE = E, \quad Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

де Z — отриманий єдиний розв'язок максимального рангу алгебраїчної системи (7), знайдений за допомогою системи Mathcad.

Нехай критерії якості J_0 і J для даної системи визначають матриці

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad X_0 = E^{\top} H E, \quad H = I_4.$$

Для системи без керування на основі леми 2.6 отримано такі значення $J_0 = 2,78413$ і $J = 2,82383$.

Застосовуючи алгоритм 3.2 при $\gamma = 2$, отримано матриці

$$Y = \begin{bmatrix} 15,64226 & -10,58153 & 0 & 0 \\ -21,15212 & -2,78667 & 19,12753 & 0,79646 \\ -10,58153 & 9,02720 & 0 & 0 \\ 19,60824 & 2,68715 & -21,45475 & -4,75586 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 15,64226 & -10,58153 & 0 & 0 \\ -10,58153 & 9,02720 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

які задовольняють систему ЛМН (37) і (45), а також співвідношення (46). При цьому статичний регулятор (34) з матрицею

$$K = \begin{bmatrix} -0,40598 & 0,22073 & -0,11817 & 0,02629 \end{bmatrix}$$

забезпечує замкненій системі (35) критерії якості $J_0 = 1,26684$ і $J = 1,67739$. Відповідний пучок матриць $F_*(\lambda)$ має спектр $\sigma(F_*) = \{ -0,88525 \pm 0,80699i \}$ і є допустимим.

Отримано також матрицю J_0-оптимального регулятора

$$K = \begin{bmatrix} -0,91414 & 0,25619 & -0,35685 & 0,19649 \end{bmatrix},$$

при якому замкнена система є допустимою, має спектр $\sigma(F_*) = \{ -1,15462 \pm 0,70073i \}$ та критерії якості $J_0 = 1,10245$ і $J = 1,61076$.

5 Висновок

Розроблено методи побудови статичних і динамічних регуляторів, що забезпечують бажану оцінку зваженого рівня гасіння зовнішніх і початкових збурень і асимптотичну стійкість лінійних дескрипторних систем з керованими і спостережуваними виходами. Основні твердження сформульовано у вигляді узагальнення багатьох відомих результатів із теорії H_∞-керування. Запропоновані алгоритми синтезу вказаного класу систем базуються на розв'язуванні лінійних матричних нерівностей за додаткових рангових обмежень. Вони можуть бути застосовані в задачах робастної стабілізації і H_∞-оптимізації керованих дескрипторних систем з невизначеними коефіцієнтами.

[1] *Dai L.* Singular Control Systems. Lecture Notes in Control and Information Sciences. — New York: Springer-Verlag, 1989. — 340 p.

[2] *Riaza R.* Differential-Algebraic Systems. Analytical Aspects and Circuit Applications. — Singapore: World Scientific, 2008. — 330 p.

[3] *Bender D. J., Laub A. J.* The Linear-Quadratic Optimal Regulator for Descriptor Systems // IEEE Trans. Autom. Control. — 1987. —AC-**32**, 8. — P. 672–688.

[4] *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. — Київ: Вища школа, 2000. — 294 с.

[5] *Boichuk A. A., Pokutnyi A. A., Chistyakov V. F.* Application of perturbation theory to the solvability analysis of differential algebraic equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2013. — **53**, 6. — P. 777–788.

[6] *Поляк Б. Т., Щербаков П. С.* Робастная устойчивость и управление. — М.: Наука, 2002. — 303 с.

[7] Поляк Б. Т., Хлебников М. В., Щербаков П. С. Управление линейными системами при внешних возмущениях. Техника линейных матричных неравенств. — М.: Ленанд, 2014. — 560 с.

[8] *Баландин Д. В., Коган М. М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. — М.: Физматлит, 2007. — 280 с.

[9] *Dullerud G. E., Paganini F. G.* A Course in Robust Control Theory. A Convex Approach. — Berlin: Springer-Verlag, 2000. — 419 p.

[10] *Gahinet P., Apkarian P.* A Linear Matrix Inequality Approach to H_∞ Control // Intern. J. of Robust and Nonlinear Control. — 1994. — **4**. — P. 421 – 448.

[11] *Inoue IM., Wada T., Ikeda M., Uezato E.* State-space H_∞ controller design for descriptor systems // Automatica. — 2015. — **59**. — P. 164 – 170.

[12] Khargonekar P.P., Nagpal K.M., Poolla K.R. H_∞ control with transients // SIAM J. Control and Optimization. — 1991. — **29**, 6. — P. 1373–1393.

[13] *Баландин Д. В., Коган М. М.* Обобщенное H_∞-оптимальное управление как компромисс между H_∞-оптимальным и γ-оптимальным управлениями // Автоматика и телемеханика. — 2010. — № 6. — С. 20–38.

[14] *Баландин Д. В., Коган М. М, Кривдина Л. Н., Федюков А. А.* Синтез обобщенного H_∞-оптимального управления в дискретном времени на конечном и бесконечном интервалах // Автоматика и телемеханика. — 2014. — № 1. — С. 3–22.

[15] *Бирюков Р. С.* Обобщенный H_∞-оптимальный фильтр для непрерывного объекта по дискретным по времени наблюдениям // Информатика и системы управления. — 2014. — № 4 (42). — С. 89–101.

[16] *Мазко А. Г.* Робастная устойчивость и стабилизация динамических систем. Методы матричных и конусных неравенств // Праці Інституту математики НАН України, 2016. — **102**. — 332 с.

[17] *Мазко О. Г., Кусій С. М.* Робастна стабілізація та гасіння зовнішніх збурень у системах з керованими і спостережуваними виходами // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2016. — **13**, 3. — С. 129–145.

[18] *Мазко А.Г., Кусий С.Н.* Стабилизация по выходу и взвешенное подавление возмущений в дискретных системах управления // Проблемы управления и информатики. — 2017. — № 6. — С. 78–93.

[19] *Boyd S., Ghaoui L. El, Feron E., Balakrishman V.* Linear matrix inequalities in system and control theory. SIAM Studies in Applied Mathematics, 15. — Philadelphia: PA, 1994. — 193 p.

[20] *Xu S., Lam J., Zou Y.* New Versions of Bounded Real Lemmas for Continuous and Discrete Uncertain Systems // Circuits, Systems and Signal Process. — 2007. — **26**. — P. 829–838.

[21] *Chadli M., Shi P., Feng Z., Lam J.* New bounded real lemma formulation and H_∞ control for continuous-time descriptor systems // Asian Journal of Control. — 2018. — **20**, 1. — P. 1–7.

[22] *Gao F., Liu W. Q., Sreeram V., Teo K. L.* Bounded real lemma for descriptor systems and its application. *IFAC 14th Triennial World Congress*, Beijing, P. R., China, 1999. — P. 1631–1636.

[23] *Masubushi I., Kamitane Y., Ohara A., Suda N.* H_∞ Control for Descriptor Systems: A Matrix Inequalities Approach // Automatica. — 1997. — **33**, 4. — P. 669 – 673.

[24] *Мазко О.Г.* Оцінка зваженого рівня гасіння обмежених збурень у дескрипторних системах // Укр. мат. журн. — 2018. — № 11. — С. 1541 – 1552.

[25] *Gahinet P., Nemirovski A., Laub A. J., Chilali M.* The LMI Control Toolbox. For Use with Matlab. User's Guide. — Natick, MA: The MathWorks, Inc., 1995. — 138 p.

[26] *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 552 с.

[27] *Мазко А. Г.* Робастная устойчивость и оценка функционала качества нелинейных систем управления // Автоматика и телемеханика. — 2015. — № 2. — С. 73–88.

[28] *Losse P.* The H_∞ Optimal Control Problem for Descriptor Systems // Dissertation Dr. Rer. Nat. Technische Universität Chemnitz (Germany). — 2011, 104 p.