Збірник праць Інституту математики НАН України 2018, т. 15, № 1, 33–46

УДК 517.983.27

Програмне керування рухом резервуару з рідиною на основі принципу найменшого примусу Гаусса

О. В. Константінов , В. В. Новицький

Інститут математики НАН України, Київ;
akonst.im@ukr.net, v.novytskyy@gmail.com

We analytically construct an optimal control (here, acting external force), which ensures a reservoir with a liquid to move according with a given law. For this purpose, Gauss' variational principle of the least constraint was employed that makes it possible to minimise the energy providing the programming motion of the mechanical system. The proposed approach was applied to solve the racing problem for the originally unmoving tank, which should reach the given translatory velocity at the end.

В аналітичному вигляді побудовано програмне керування (закон зміни активної зовнішньої сили) для забезпечення руху резервуару за заданим законом. Для цього використано варіаційний принцип найменшого примусу Гаусса, який дозволяє мінімізувати енергетичні витрати на забезпечення програмного руху механічної системи. Запропонований підхід застосовано для розв'язування задачі про розгін нерухомого резервуару до заданої швидкості та подальшого його рівномірного руху.

Вступ

Інженерні конструкції, які мають у своєму складі резервуари, частково заповнені рідиною, широко використовують у різних галузях техніки [3–8]. Баки з рідиною є невід'ємною частиною космічних апаратів з рідинним ракетним двигуном, літаків, гелікоптерів та інших транспортних засобів. Резервуари постійно використовують для перевезень і зберігання рідинних вантажів на відповідних етапах виробничих або технологічних процесів. У всіх наведених прикладах предметом теоретичного й експериментального дослідження є поведінка конструкцій із рідиною в умовах дії вібраційних, імпульсних, сейсмічних і керівних навантажень із урахуванням наявності збурення, яке постійно діє, – коливань вільної поверхні рідини. Однією з важливих задач при практичному використанні резервуарів є забезпечення руху за заданою програмою при найменших силових (енергетичних) витратах. Така задача може бути розв'язана, серед того, на основі диференціального варіаційного принципу Гаусса – принципу найменшого примусу [9]. В роботах [10–14] принцип найменшого примусу Гаусса використовується для керування рухом довільної конфігурації твердих тіл або роботами-маніпуляторами.

У даній роботі побудова керування з використанням принципу найменшого примусу Гаусса проводилася на основі спрощеної лінійної моделі із двома ступенями вільності. Це дозволило отримати функцію керування в аналітичному вигляді для різних програмних законів (серед них і нелінійних) руху резервуару й вільної поверхні рідини. А от дослідження динаміки системи "резервуар – рідина з вільною поверхнею" під дією обчисленого керування проводилося на основі нелінійної багатомодової (до 12 форм коливань) дискретної моделі, яка побудована на основі варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського [3]. Дослідження проводилося на основі методу модальної декомпозиції з урахуванням коливань на власних частотах усіх форм.

1 Математична модель механічної системи "резервуар – рідина з вільною поверхнею"

Розглянемо циліндричний резервуар, частково заповнений рідиною. Резервуар вважаємо абсолютно твердим тілом, яке може рухатися поступально під дією активних зовнішніх сил. Рідину вважаємо ідеальною, нестисливою, однорідною, а її початковий рух безвихровим. Відповідно до методики роботи О.С. Лимарченко [3], математична модель механічної системи "резервуар – рідина з вільною поверхнею" будується на основі варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського

$$\delta I = 0, \quad \text{где} \quad I = \int\limits_{t_1}^{t_2} L dt,$$

при цьому функція Лагранжа задається у класичному вигляді Гамільтона - Остроградського як різниця між кінетичною й потенціальною енергією системи

$$L = \frac{1}{2}\rho\int\limits_{\tau}(\vec{\nabla}\varphi + \dot{\vec{\varepsilon}})^2 d\tau + \frac{1}{2}M_T(\dot{\vec{\varepsilon}})^2 - (M_T + M_F)g\varepsilon_z -$$

$$-\frac{1}{2}\rho g\int\limits_{S}(\xi^2 - H^2)dS + \vec{F}\cdot\vec{\varepsilon},$$

де ρ – щільність рідини; τ – область, яку займає рідина; $d\tau = rdrd\theta dz$ – циліндричні координати, при цьому вісь Oz має напрямок, протилежний до напрямку вектора прискорення вільного падіння $\vec{g}$, а система координат пов'язана з нерухомим резервуаром; $\vec{\nabla} = \vec{i}_1\frac{\partial}{\partial r} + \vec{i}_2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \vec{i}_3\frac{\partial}{\partial z}$; φ – потенціал швидкостей рідини; ξ – збурення вільної поверхні рідини; S – поперечний переріз циліндричного резервуару; M_T і M_F – маса резервуару й рідини відповідно; $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$ – вектор переміщення резервуару в поступальному русі; $\vec{F}$ – головний вектор зовнішніх сил, які діють на резервуар щодо точки O.

Для ефективного застосування варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського поставлено задачу ввести в розгляд мінімальну кількість незалежних змінних, що описують рух резервуару з рідиною, тобто фактично будуються розклади шуканих змінних, які задовольняють наперед усі кінематичні граничні умови. Оскільки безвихровий рух ідеальної однорідної нестисливої рідини відповідно до теореми Лагранжа повністю визначається рухом її границь, то збурення вільної поверхні рідини ξ йрадіус-вектор $\vec{\varepsilon}(t)$ повністю характеризують рух самої рідини, тому потенціал швидкостей φ потрібно вважати залежною змінною.

Відповідно до методики роботи [3], розклади шуканих змінних передамо як

$$\xi(r,\theta,t) = \sum_i a_i(t)\psi_i(r,\theta), \varphi = \sum_i b_i(t)\varphi_i(r,\theta,z),$$

де $a_i(t)$ – амплітуди форм коливань збуреної вільної поверхні рідини ξ. Системи функцій ψ_i і $\varphi_i = \psi_i\frac{\cosh\kappa_i(z+H)}{\kappa_i\sinh\kappa_i H}$ є розв'язком лінійної спектральної задачі [3] й мають вигляд

$$\psi_n(r,\theta) = J_n\left(\frac{\kappa_n^{(m)}}{R}r\right)\begin{matrix}\sin(n\theta)\\ \cos(n\theta)\end{matrix}\ ,\ n = 0,1,2,...;\ m = 1,2,...$$

У роботі [3] розроблено метод виключення кінематичних граничних умов на вільній поверхні рідини, який дозволяє отримати дискретну модель механічної системи "резервуар – рідина з вільною поверхнею" мінімальної розмірності. На основі розробленого методу, варіаційних методів математичної фізики і асимптотичних методів нелінійної механіки у роботі [3] побудована математична модель, яка дозволяє дослідити поступальні й кутові рухи механічної системи "резервуар – рідина з вільною поверхнею" при різних видах кінематичного збурення і динамічного (силового й моментного) збудження. Ця модель є системою нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку щодо незалежних параметрів a_i – коефіцієнтів розкладу в ряд збурення вільної поверхні рідини ξ за формами коливань вільної поверхні ψ_i і ε_i – компонент вектора переміщень центру незбуреної вільної поверхні рідини щодо деякої нерухомої системи відліку:

$$\sum_i \ddot{a}_i \cdot \left\{ \beta^q_{ri} + \sum_j a_j \gamma^q_{ij} + \sum_{i,j} a_i a_j \delta^q_{rijk} \right\} + \tag{1}$$

$$+ \ddot{\vec{\varepsilon}} \cdot \left\{ \vec{B}^1_r + \sum_i a_i \vec{B}^2_{ri} + \sum_{i,j} a_i a_j \vec{B}^3_{rij} + \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k \vec{B}^4_{rijk} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j (\gamma^q_{ijr} - \gamma^q_{rij}) + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k (\delta^q_{ijkr} - 2\delta^q_{rijk}) -$$

$$- \frac{1}{2} g \alpha^s_r - \alpha^p_r \dot{a}_r - g N_r a_r + \dot{\vec{\varepsilon}} \cdot \left\{ \vec{B}^1_r + \sum_i a_i (\vec{B}^2_{ir} - \vec{B}^2_{ri}) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j 2 (\vec{B}^3_{ijr} - \vec{B}^3_{rij}) + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i a_j a_k 3 (\vec{B}^4_{ijkr} - \vec{B}^4_{rijk}) \right\},$$

$$\rho \left\{ \sum_i \ddot{a}_i [\vec{B}^1_i + \sum_{i,j} a_j \vec{B}^2_{i,j} + \sum_{i,j,k} a_j a_k \vec{B}^3_{ijk}] \right\} + (M_T + M_F) \ddot{\vec{\varepsilon}} = \tag{2}$$

$$= \vec{F} - (M_T + M_F) g \vec{k} - \rho \left\{ \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j \vec{B}^2_{ij} + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k \vec{B}^3_{ijk} \right\}.$$

Система (1) – (2) містить $N + 3$ рівнянь (N – кількість форм коливань рідини, що розглядаються) і описує динаміку сумісного руху резервуару й рідини при різних видах кінематичного збурення і динамічного (силового) збудження. Рівняння (1) описують динаміку амплітуд форм коливань вільної поверхні рідини, а рівняння (2) – динаміку резервуару, однак ці рівняння взаємопов'язані і містять сили взаємодії між компонентами механічної системи.

Сукупність коефіцієнтів, які входять до системи рівнянь (1) – (2), у рамках прийнятої моделі визначає властивості механічної системи, яка розглядається, й особливості прояву в ній внутрішніх лінійних та нелінійних механізмів взаємодії. Ці коефіцієнти визначаються через квадратури від розв'язку крайової задачі з визначення форм коливань вільної поверхні рідини. При цьому коефіцієнти $\beta_{ir}^q, \gamma_{ijr}^q, \delta_{ijkr}^q, \alpha_r^s, N_r$ відповідають випадкові коливань рідини у нерухомому резервуарі, а коефіцієнти $\vec{B}_r^1, \vec{B}_{ri}^2, \vec{B}_{rij}^3, \vec{B}_{rijk}^4$ відображають взаємозв'язок коливань рідини і поступального руху резервуару.

2 Побудова програмного керування на основі принципу найменшого примусу Гаусса

Якщо зовнішня сила $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$, яка діє на систему "резервуар – рідина з вільною поверхнею", мусить здійснити необхідний закон руху або мінімізувати заданий функціонал, то таку силу прийнято називати керуванням. У даній роботі поставлено задачу побудови керування F_y, мінімального на основі функціоналу якості $J = \int F_y^2(t)dt$, яке б забезпечувало програмний рух резервуару з рідиною в напрямку Oy за заданим законом $\dot{\varepsilon}_y = f(t), \varepsilon_y = \int f(t)dt$. Іншими словами, необхідно побудувати таке керування, яке б забезпечило рух системи за заданою програмою з найменшими силовими (енергетичними) витратами.

Доцільність такої постановки задачі можна пояснити так [1, 2]. Рух механічної системи, яка складається з N матеріальних точок, відповідно до другого закону Ньютона, описується системою диференціальних рівнянь

$$m_i \ddot{r}_i = \Phi_i - u_i,$$

де m_i, r_i – радіус-вектор і маса і-ої точки відповідно, Φ_i – рівнодійна активних сил, які впливають на цю точку, u_i – керівна сила. Керівні сили $u_1, \ldots, u_N$ повинні бути обчислені з умови здійснення руху системи за заданою програмою

$$\phi_i(r_1, ..., r_N, \dot{r}_1, ..., \dot{r}_N, t) = 0, i = 1, ..., N.$$

Поставимо за мету визначити керування u_i таким чином, щоб керований рух не входив у протиріччя з чинними принципами руху механічних систем. Одним із найзагальніших принципів механіки є принцип найменшого примусу Гаусса [1, 2]. Суть його полягає в тому, що справжній рух системи відрізняється від усіх можливих рухів тим, що для справжнього руху примусу (за Гауссом)

$$L = \sum_{i=1}^{N} \|\ddot{r}_i - \frac{1}{m_i}\Phi_i\|^2$$

має мінімальне значення. Але для шуканої керованої системи матеріальних точок

$$L^* = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{m_i}\|u_i\|^2.$$

Отже розв'язок поставленої задачі для $L = L^*$ дозволяє визначити керування таким чином, щоб рух шуканої системи задовольняв класичні принципи механічних систем. При цьому отримане керування має вигляд [1, 2]

$$u(x,t) = u_0(x,t) + R(\phi, x, t),$$

де $u_0(x,t)$ – розв'язок задачі оптимізації, а $R(\phi, x, t)$ – довільна функція від збурень, поточних координат і часу (фактично, зворотний зв'язок), на яку накладено тільки одну умову $R(0, x, t) = 0$.

Для побудови керування на основі принципу найменшого примусу Гаусса використовуватимемо систему рівнянь руху (1) – (2), в якій буде враховано коливання вільної поверхні рідини $\xi(t)$ за першою антисиметричною формою ψ_1 з можливістю горизонтального переміщення резервуару по горизонтальній координаті ε_y. Введемо позначення для фазових змінних $x_1 = a_1, x_2 = \dot{a}_1, x_3 = \varepsilon_y, x_4 = \dot{\varepsilon}_y$ й керування $u = F_y$ і запишемо систему (1) – (2) в нормальній формі Коші в узагальненому вигляді

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = f_1(x_1, x_2) + b_1(x_1, x_2)u, \tag{3}$$

$$\dot{x}_3 = x_4, \dot{x}_4 = f_2(x_1, x_2) + b_2(x_1, x_2)u, \tag{4}$$

де вигляд функцій f_1, f_2, b_1, b_2 залежить від вибору обраної для керування моделі (лінійна або нелінійна до величин відповідного порядку малості).

Розглянемо побудову керування для системи в узагальненому вигляді (3) – (4), яке забезпечить реалізацію програмного руху резервуару з заданим законом зміни швидкості $\phi(x_4, t) = 0$. Отримаємо похідну за часом від програмного закону $\phi(x_4, t)$, щоб можна було зв'язати цей програмний закон з рівняннями руху резервуару (3) – (4), тобто

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x_4}\dot{x}_4 = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x_4}(f_2 + b_2 u) \equiv R(\phi, x, t), \tag{5}$$

де $R(\phi, x, t)$ – довільна функція від збурення ϕ, поточних координат x_1, x_2, x_3, x_4 і часу, на яку накладено умову $R(0, x, t) = 0$. Задачу мінімізації функціоналу за наявності умови (5) зводимо до задачі безумовної мінімізації функціоналу

$$L = u^2 + \lambda\Big(\frac{d\phi}{dt} - R(\phi, x, t)\Big) = \lambda\Big(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x_4}(f_2 + b_2 u) - R(\phi, x, t)\Big),$$

де λ – множник Лагранжа. Використовуючи відому процедуру мінімізації, отримаємо два рівняння щодо шуканих змінних u й λ

$$\frac{\partial L}{\partial u} = 2u + \lambda\frac{\partial\phi}{\partial x_4}b_2 = 0,\ \frac{\partial\phi}{\partial x_4}b_2 u = R(\phi, x, t) - \frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{\partial\phi}{\partial x_4}f_2. \tag{6}$$

За допомогою позначень

$$p = \frac{\partial\phi}{\partial x_4}b_2,\ c = R(\phi, x, t) - \frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{\partial\phi}{\partial x_4}f_2,$$

запишемо систему (6) у матричному вигляді

$$\begin{bmatrix} 2 & p \\ p & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix}$$

й отримаємо її розв'язок для керування

$$u = \frac{c}{p} = \frac{R(\phi, x, t) - \frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{\partial\phi}{\partial x_4}f_2}{\frac{\partial\phi}{\partial x_4}b_2}.$$

Розглянемо тепер побудову керування, яке забезпечить реалізацію програмного руху резервуару, якщо швидкість повинна змінюватися за законом $\phi_2(x_4, t) = 0$, а амплітуда вільної поверхні рідини обмежена законом руху $\phi_1(x_1, x_2, t) = 0$. Отримаємо відповідні похідні за часом від програм руху, щоб можна було їх зв'язати з рівняннями руху резервуару

$$\frac{d\phi_1}{dt} = \frac{\partial\phi_1}{\partial t}+\frac{\partial\phi_1}{\partial x_1}\dot{x}_1+\frac{\partial\phi_1}{\partial x_2}\dot{x}_2 = \frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{\partial\phi}{\partial x_1}x_2+\frac{\partial\phi}{\partial x_2}(f_1+b_1u) \equiv R_1(\phi_1,x,t),$$

$$\frac{d\phi_2}{dt} = \frac{\partial\phi_2}{\partial t} + \frac{\partial\phi_2}{\partial x_4}\dot{x}_4 = \frac{\partial\phi_2}{\partial t} + \frac{\partial\phi_2}{\partial x_4}(f_2+b_2u) \equiv R_2(\phi_2,x,t).$$

Як і в попередньому випадку, отримаємо задачу безумовної мінімізації при наявності двох множників Лагранжа λ_1 і λ_2 для функціоналу якості

$$L = u^2 + \lambda_1\Big(\frac{d\phi_1}{dt} - R_1(\phi_1,x,t)\Big) + \lambda_2\Big(\frac{d\phi_2}{dt} - R_2(\phi_2,x,t)\Big).$$

Після виконання процедури мінімізації отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\frac{\partial L}{\partial u} = 2u + \lambda_1\frac{\partial\phi_1}{\partial x_2}b_1 + \lambda_2\frac{\partial\phi_2}{\partial x_4}b_2 = 0,$$

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial x_2}b_1u = R_1(\phi_1,x,t) - \frac{\partial\phi_1}{\partial t} - \frac{\partial\phi_1}{\partial x_1}x_2 - \frac{\partial\phi_1}{\partial x_2}f_1,$$

$$\frac{\partial\phi_2}{\partial x_4}b_2u = R_2(\phi_2,x,t) - \frac{\partial\phi_2}{\partial t} - \frac{\partial\phi_2}{\partial x_4}f_2,$$

яку за допомогою позначень

$$p_1 = \frac{\partial\phi_1}{\partial x_2}b_1,\ p_2 = \frac{\partial\phi_2}{\partial x_4}b_2,$$

$$c_1 = R_1(\phi_1,x,t) - \frac{\partial\phi_1}{\partial t} - \frac{\partial\phi_1}{\partial x_1}x_2 - \frac{\partial\phi_1}{\partial x_2}f_1, c_2 = R_2(\phi_2,x,t) - \frac{\partial\phi_2}{\partial t} - \frac{\partial\phi_2}{\partial x_4}f_2,$$

можна записати у матричній формі

$$\begin{bmatrix} 2 & p_1 & p_2 \\ p_1 & 0 & 0 \\ p_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Програмне керування як розв'язок цієї системи має вигляд

$$u = \frac{p_1c_1 + p_2c_2}{p_1^2 + p_2^2}.$$

Оберемо для побудови керування лінійну модель і конкретизуємо вигляд системи рівнянь (3) – (4). Лінеаризована система рівнянь (1) – (2) для першої антисиметричної форми ψ_1 і горизонтального переміщення резервуару ε_y має вигляд

$$\ddot{a}_1\beta_{11}^q + B_1^{1y}\ddot{\varepsilon}_y + gN_1a_1 = 0,\ \frac{\rho B_1^{1y}}{M_T + M_F}\ddot{a}_1 + \ddot{\varepsilon}_y = 0,$$

або, з урахуванням позначень, $\nu_1 = \frac{B_1^{1y}}{\beta_{11}^q}$, $\nu_2 = \rho B_1^{1y}$, $\omega_1^2 = \frac{gN_1}{\beta_{11}^q}$, представлена як

$$\ddot{a}_1 + \nu_1\ddot{\varepsilon}_y + \omega_1^2 a_1 = 0,\ \nu_2\ddot{a}_1 + M\ddot{\varepsilon}_y = F_y,$$

і, нарешті, приведена до нормальної форми Коші

$$\dot{x_1} = x_2, \dot{x_2} = \lambda_1 x_1 + \beta_1 u, \dot{x_3} = x_4, \dot{x_4} = \lambda_2 x_1 + \beta_2 u \tag{7}$$

з позначеннями

$$\lambda_1 = -\frac{M\omega_1^2}{M - \nu_1\nu_2},\ \lambda_2 = \frac{\nu_2\omega_1^2}{M - \nu_1\nu_2},\ \beta_1 = -\frac{\nu_1}{M - \nu_1\nu_2},\ \beta_2 = \frac{1}{M - \nu_1\nu_2}.$$

Для лінійної моделі (7) обчислимо керування для обраних програмних законів руху резервуару:

А) швидкість резервуару змінюється за заданим законом $\phi(x_4, t) \equiv x_4 - V(t) = 0$, тоді програмне керування має вигляд

$$u = \frac{1}{\beta_2}\Big(\dot{V}(t) - \lambda_2 x_1 + R_1(\phi, x, t)\Big);$$

Б) амплітуда коливань вільної поверхні рідини змінюється за заданим законом $\phi_1(x_1, t) \equiv x_1 - l(t) = 0$ (для "ідеального" випадку керування рідина взагалі нерухома, "затверділа", тобто $\phi_1(x_1, t) \equiv x_1 = 0$), швидкість резервуару змінюється за заданим законом $\phi_2(x_4, t) \equiv x_4 - V(t) = 0$, тоді програмне керування має вигляд

$$u = \frac{1}{\beta_1^2 + \beta_2^2}\Big(\beta_2\dot{V}(t) + \beta_1\ddot{l}(t) - (\beta_1\lambda_1 + \beta_2\lambda_2)x_1 +$$
$$+\beta_1 R_1(\phi_1, x, t) + \beta_2 R_2(\phi_2, x, t)\Big);$$

В) амплітуда коливань вільної поверхні рідини обмежена $|x_1| \leq A$, тобто існує залежність $\phi_1(x_1, x_2) \equiv x_1 + A\tanh(\mu x_2)$, швидкість резервуару змінюється за заданим законом $\phi_2(x_4,t) \equiv x_4 - V(t) = 0$, тоді програмне керування має вигляд

$$u = \frac{1}{A^2\mu^2\beta_1^2 + \beta_2^2\cosh^4(\mu x_2)}\Big(\beta_2\dot{V}(t)\cosh^4(\mu x_2) -$$

$$-(A^2\mu^2\beta_1\lambda_1 + \beta_2\lambda_2\cosh^4(\mu x_2))x_1 - A\mu\beta_1\cosh^2(\mu x_2)x_2 +$$

$$+A\mu\beta_1\cosh^2(\mu x_2)R_1(\phi_1,x,t) + \beta_2\cosh^4(\mu x_2)R_2(\phi_2,x,t)\Big).$$

На функції $R_1(\phi_1,x,t)$ і $R_2(\phi_2,x,t)$ накладається тільки одне обмеження, а саме, $R_i(0,x,t) = 0,\ i = 1,2$. Отже ці функції описують керування зі зворотним зв'язком, яке зникає, коли програмні закони руху виконуються точно, тобто коли $\phi_i(x,t) = 0$. Структура функцій R_1 і R_2 обирається окремо для кожної конкретної задачі для забезпечення заданих характеристик руху системи, зокрема, асимптотичної стійкості, якості перехідного процесу, величини відхилень програмного руху від заданих значень, часу перехідних процесів тощо.

3 Результати чисельного моделювання

Розглядається круговий циліндричний резервуар із вертикальною повздовжньою віссю Oz, який здійснює поступальні рухи у площині xOy. Резервуар радіусу $R = 1$ м частково заповнений водою до глибини $H = R$, співвідношення мас резервуару $_T$ й рідини $_F$ дорівнює $_T = 0,1_F$.

Система рівнянь (1) – (2) лінійна щодо других похідних, що дає можливість при практичній реалізації на кожному кроці чисельного інтегрування спочатку перетворити систему за допомогою ЕОМ до нормальної форми Коші, а потім чисельно інтегрувати за часом за допомогою стандартного методу Рунге-Кутта. При цьому на етапі перетворення до нормальної форми Коші порядок похідних знижувався шляхом введення узагальнених швидкостей $\dot{a}_i$ як рівноправних незалежних змінних (разом з a_i). При дослідженні динаміки системи “резервуар – рідина“ в розкладах утримувалося $n_1 = n_2 = 12$ координатних функцій за лінійною і квадратичною теорією та $n_3 = 6$ координатних функцій за кубічною теорією. Координатні функції ψ_i розміщено в порядку зростання відповідних їм власних частот за винятком ψ_3 – першої осесиметричної форми. Крок чисельного інтегрування обирався $\Delta t = 0,1\pi\omega_{12}$ с, де ω_{12} – найвища власна частота у системі. Розглянемо випадок, коли необхідно за допомогою керування

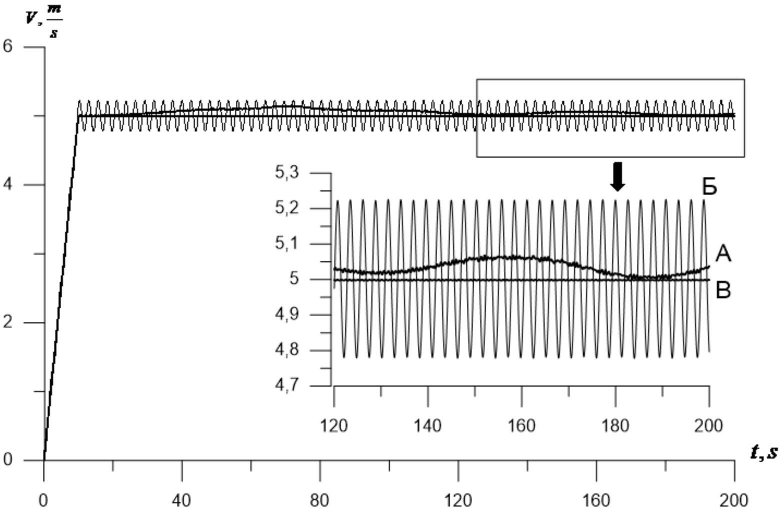

Рис 1. Графік швидкості резервуару для випадку "комфортного" руху.

$u = F_y$ забезпечити резервуару з рідиною спочатку набір швидкості від 0 до 5 м/с за 10 сек, а потім рівномірний рух з досягнутою швидкістю 5 м/с ("комфортний" рух). На рис. 1 показані результати моделювання, коли керування рухом забезпечується на основі заданих програм руху А, Б й В відповідно. Для моделі В в законі програмного руху вільної поверхні рідини $\phi_1(x_1, x_2) \equiv x_1 + A \tanh(\mu x_2) = 0$ обрані значення параметрів $A = 0,1R, \mu = 2$. Прямокутником на основному графіку відмічений інтервал часу від 120 до 200 секунд і окремо показаний у збільшеному масштабі. Як видно із графіків, "комфортний" рух резервуару може бути забезпечений при використанні будь-якого керування (програма А, Б та В), однак найменша похибка виконання програмного руху досягається у випадку нелінійного керування (програма В). Нелінійність керування обумовлена нелінійністю програми руху вільної поверхні рідини. При цьому нелінійний закон керування забезпечує як рівномірний рух резервуару з заданою швидкістю, так і обмеження на амплітуду коливань вільної поверхні рідини. Лінійні керування, побудовані на основі програм А і Б, дають більшу похибку, ніж у випадку В, при цьому величина цієї похибки тим вища, чим більшу кількість програм руху треба задовольнити.

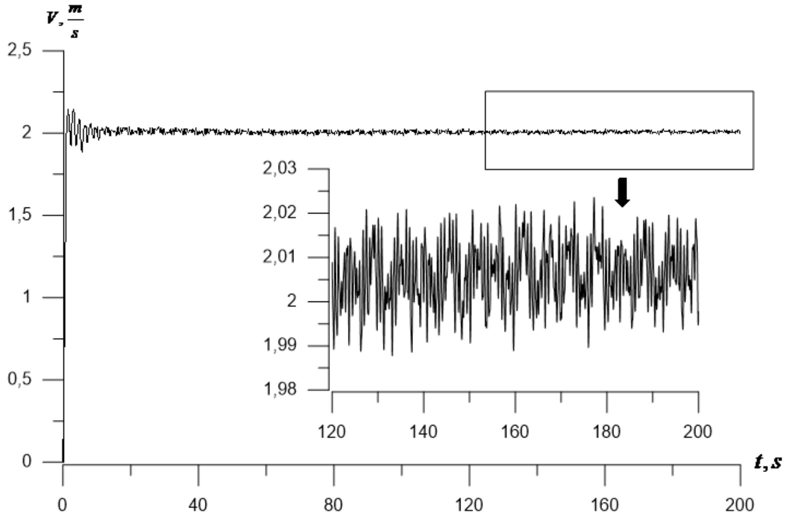

Рис 2. Графік швидкості резервуару для випадку високоінтенсивних навантажень.

Розглянемо тепер випадок руху резервуару за наявності високоінтенсивних навантажень, коли необхідно за допомогою керування забезпечити набір швидкості від 0 до 2 м/с за 1 сек, а потім рівномірний рух із досягнутою швидкістю 2 м/с. Як показують обчислювальні експерименти, лінійне керування, побудоване на основі програм руху А й Б, взагалі непридатне для реалізації програмного закону при високоінтенсивних навантаженнях на резервуар. Тому на рис. 2 показаний результат моделювання, коли керування рухом забезпечується на основі нелінійної моделі В. Для програмного руху вільної поверхні рідини $\phi_1(x_1, x_2) \equiv x_1 + A\tanh(\mu x_2) = 0$ обрані значення параметрів $A = 0,3R, \mu = 1$. Як видно зі графіків, отримане керування дозволяє забезпечити рух резервуару за заданим законом із похибкою, прийнятною для практичних застосувань (1%).

Висновки

Розглянуто задачу побудови керування для забезпечення руху за заданим законом механічної системи "резервуар – рідина з вільною поверхнею" за наявності постійних збурень – коливань вільної поверхні рідини. Для побудови керування використовувався принцип найменшого примусу Гаусса, який дозволяє мінімізувати керуюче навантаження і реалізувати задані закони програмного руху. Обчислення керування проводилося на основі спрощеної лінійної моделі зі двома ступенями вільності, що дозволило отримати функцію керування в аналітичному вигляді для різних програмних законів (серед того, й нелінійних) руху резервуару і вільної поверхні рідини. Дослідження динаміки системи "резервуар – рідина з вільною поверхнею" під дією обчисленого керування проводилося на основі нелінійної багатомодової (до 12 форм коливань) дискретної моделі, яка побудована на основі варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського. Керування, побудоване на основі лінійної моделі для реалізації лінійних програмних законів руху, може бути використане тільки для забезпечення "комфортних" рухів резервуару, тобто за відсутності великих збурень вільної поверхні рідини. Для забезпечення руху резервуару за наявності високоінтенсивних навантажень необхідне введення нелінійних програмних законів руху для отримання і використання нелінійного закону керування.

[1] *Галиуллин А.С.* Построение систем программного движения. — М.: Наука, 1971. — 352 с.

[2] *Крутько П.Д.* Обратные задачи динамики управляемых систем. Линейные модели. — М.: Наука, 1987. — 304 с.

[3] *Лимарченко О.С., Ясинский В.В.* Нелинейная динамика конструкций с жидкостью. — Киев: НТТУ КПИ, 1997. — 338 с.

[4] *Луковский И.А.* Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость. — К.: Наукова думка, 1990. — 295 с.

[5] *Луковский И.А.* Математические модели нелинейной динамики твёрдых тел с жидкостью. — К.: Наукова думка, 2010. — 408 с.

[6] *Lukovsky I.A.* Nonlinear Dynamics. Mathematical Models for Rigid Bodies with a Liquid. — De Gruyter, 2015. — 410 p.

[7] *Микишев Г.Н.* Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов. — М.: Машиностроение, 1978. — 247 с.

[8] *Нариманов Г.С., Докучаев Л.В., Луковский И.А.* Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью. — М.: Машиностроение, 1977. — 208 с.

[9] *Суслов Г.Л.* Теоретическая механика. — М.: ГИТТЛ, 1946. — 654 с.

[10] *Bruyninckx H., Khatib O.* Gauss' principle and the dynamics of redundant and constrained manipulators // Proceedings 2000 ICRA. Millennium Conference. IEEE International Conference on Robotics and Automation. Symposia Proceedings. . — 2010. — P. 2563–2568.

[11] *Lewis A.* The geometry of the Gibbs-Appell equations and Gauss' principle of least constraint // Reports on Mathematical Physics. . — 1996. — Vol. 38, no. 1. — P. 11–28.

[12] *Lilov L., Lorer M.* Dynamic Analysis of Multirigid-Body System Based on the Gauss Principle // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. . — 1982. — Vol. 62, no. 10. — P. 539–545.

[13] *Redon S., Kheddar A., Coquillart S.* Gauss' least constraints principle and rigid body simulations // Proceedings 2000 ICRA. Millennium Conference. IEEE International Conference on Robotics and Automation. Symposia Proceedings. . — 2002. — P. 517–522.

[14] *Udwadia F., Kalaba R.* A New Perspective on Constrained Motion // Proceedings: Mathematical and Physical Sciences. . — 1992. — Vol. 439, no. 1906. — P. 407–410.