Збірник праць Інституту математики НАН України 2018, т. 15, № 1, 27–32

УДК 513.7

Корекція результату інтегрування кінематичних рівнянь обертового руху твердого тіла

О. П. Коломійчук, К. І. Науменко

Інститут математики НАН України, Київ;
kolomithyk@rambler.ru, naumenkoki@ukr.net

The problem of determining the orientation of a solid body in the determination of Some estimates of the values of the Rodriguez-Hamilton parameter vector in The given moment of time and measurements at this moment of projection on tiscooping the coordinate system of a vector whose orientation is known to be dual coordinate system. Obtain accurate solutions to the problem of estimation the orientation that provides the minimum of a given functionality of quality.

Розглядається задача визначення орієнтації твердого тіла при визначенні деякої оцінки значень вектора параметрів Родрига-Гамільтона в заданий момент часу й вимірів у цей момент проекції на зв'язану з тілом систему координат вектора, орієнтація якого відома в навігаційній системі координат. Отримані точні розв'язки задачі визначення оцінки орієнтації, що забезпечує мінімум заданого функціоналу якості.

Розглядається задача корекції в заданий момент часу результату інтегрування кінематичних рівнянь обертового руху твердого тіла. Корекція здійснюється з урахуванням інформації про координати вектора $\mathbf{k}$ (результат вимірювання) у зв'язаній із тілом системі координат B і цей вектор заданий у наваігаційній системі координат N вектором $\mathbf{m}$.

При відомій матриці перетворення координат $\mathbf{A}$, яка задає орієнтацію зв'язаної з тілом системи координат щодо навігаційної, і при точних вимірюваннях компонент вектора $\mathbf{k}$ справедлива рівність

$$\mathbf{k} = \mathbf{A}\mathbf{m}. \tag{1}$$

Взаємна орієнтація двох декартових систем координат N і B поряд із описом за допомогою матриці перетворення координат $\mathbf{A}$ може бути задана кватерніоном (чотиривимірним вектором параметрів Родріга-Гамільтона)

$$q = \begin{bmatrix} c \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\frac{\varphi}{2} \\ sin\frac{\varphi}{2}\mathbf{e} \end{bmatrix}, \tag{2}$$

який визначає плаский поворот системи координат N до суміщення з системою B на кут φ навколо заданої нормованим вектором $\mathbf{e}$ ейлерової вісі обертання. Перша компонента c кватерніона $\mathbf{q}$ називається його скалярною частиною, а три інші, які представлені тривимірним вектором $\mathbf{n}$ — векторною. Матриця перетворення координат $\mathbf{A}$ як функція кватерніона $\mathbf{q}$ має вигляд

$$\mathbf{A(q) = (c^2 - n^T n)I + 2[nn^T - V(n)]}, \tag{3}$$

де “T” — знак операції транспонування, $\mathbf{I}$ — одинична матриця третього порядку, оператор векторного добутку $\mathbf{V(n) = nx}$ — тривимірна квадратна матриця, яка як функція вектора $\mathbf{n} = [\mathbf{n_1} \;\; \mathbf{n_2} \;\; \mathbf{n_3}]^{\mathbf{T}}$ має вигляд

$$\mathbf{V}(\mathbf{n}) = \begin{bmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Зміна орієнтації твердого тіла описується відповідним кінематичним рівнянням для матриць перетворення координат $\mathbf{A}$, так само, як і для кватерніона $\mathbf{q}$.

Для кватерніона $\mathbf{q}$ це рівняння має вигляд

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{1}{2}\mathbf{\Phi}(\omega)\mathbf{q}, \tag{4}$$

де

$$\mathbf{\Phi}(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^{\mathbf{T}} \\ \omega & \mathbf{V}(\omega) \end{bmatrix},$$

$\omega = [\omega_{\mathbf{1}} \;\; \omega_{\mathbf{2}} \;\; \omega_{\mathbf{3}}]^{\mathbf{T}}$ — вектор кутової швидкості тіла у проекціях на вісі зв'язаної з тілом системи координат B.

Відзначимо, що результат інтегрування кінематичного рівняння (4)

$$\mathbf{q_0} = \begin{bmatrix} \mathbf{c_0} \\ \mathbf{n_0} \end{bmatrix} \tag{5}$$

не гарантує точності визначення орієнтації тіла цим кватерніоном, що може бути обумовлено як похибками вимірювання компонент вектора кутової швидкості ω, так і можливими похибками чисельного інтегрування цього рівняння. Водночас додаткова інформація про орієнтацію тіла, яку отримуємо при вимірові в системі координат B компонент заданного в системі N вектора m, також супроводжується похибками вимірювань.

Тому розв'язок задачі визначення орієнтації тіла треба проводити за допомогою метода найменших квадратів. Так, вважаючи, що похибки вимірювань компонентів вектора $\mathbf{k}$ як випадкові величини мають однакову дисперсію, для розв'язання задачі використовуватимемо процедуру мінімізації функціоналу

$$J(\mathbf{q}) = \alpha \mathbf{sin^2}\frac{\varphi}{\mathbf{2}} + \beta(\mathbf{k} - \mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{m})^{\mathbf{T}}(\mathbf{k} - \mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{m}), \tag{6}$$

де α і β — додатні вагові множники, φ — кут скінченного повороту із заданою апріорною оцінкою орієнтації тіла кватерніоном $\mathbf{q_0}$ в розташуванні, яке задане кватерніоном $\mathbf{q}$.

Розв'язком задачі мінімізації функціонала (6) згідно з [1] є кватерніон $\mathbf{q}_*$, який визначається як нормований власний вектор, що відповідає максимальному власному значенню симетричної матриці

$$\mathbf{S} = \mathbf{2}\alpha\mathbf{q_0}\mathbf{q_0}^{\mathbf{T}} + \beta(\mathbf{K}(\mathbf{m}, \mathbf{k}), \tag{7}$$

де

$$\mathbf{K}(\mathbf{m}, \mathbf{k}) = \begin{bmatrix} \mathbf{m}^{\mathbf{T}}\mathbf{k} & (\mathbf{m} \times \mathbf{k})^{\mathbf{T}} \\ \mathbf{m} \times \mathbf{k} & \mathbf{m}\mathbf{k}^{\mathbf{T}} + \mathbf{k}\mathbf{m}^{\mathbf{T}} - (\mathbf{m}^{\mathbf{T}}\mathbf{k})\mathbf{I} \end{bmatrix}. \tag{8}$$

У роботі [2] запропонований обчислювальний алгоритм для відшукування цього власного вектора за допомогою ітераційної процедури, яка базується на використанні градієнтних методів.

Розглянемо процедуру визначення кватерніона $\mathbf{q}_*$ як деяку корекцію кватерніона $\mathbf{q_0}$ шляхом введення додаткового повороту тіла зі стану, заданого цим кватерніоном, у стан, заданий кватерніоном $\mathbf{q}_*$ згідно з формулою додавання скінченних поворотів

$$\mathbf{q}_* = \mathbf{\Phi}(\hat{\mathbf{q}})\mathbf{q_0}, \tag{9}$$

де

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} c & -\mathbf{n}^{\mathbf{T}} \\ \mathbf{n} & c\mathbf{I} - \mathbf{V}(\mathbf{n}) \end{bmatrix}, \tag{10}$$

$\hat{\mathbf{q}}$ — кватерніон, що відповідає додатковому повороту, і для нього справедлива формула віднімання скінченних поворотів

$$\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{\Psi}(\mathbf{q_0})\mathbf{q}_*, \tag{11}$$

де

$$\mathbf{\Psi}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} c & \mathbf{n^T} \\ -\mathbf{n} & c\mathbf{I} - \mathbf{V}(\mathbf{n}) \end{bmatrix}, \tag{12}$$

і, як неважко впевнитися, матриці $\mathbf{\Phi}(\mathbf{q})$ і $\mathbf{\Psi}(\mathbf{q})$ є ортогональними.

Згідно з (9-12) наведемо деякі важливі властивості, які з них випливають

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{q}_*) = \mathbf{\Phi}(\hat{\mathbf{q}})\mathbf{\Phi}(\hat{\mathbf{q}}_\mathbf{0}), \tag{13}$$

$$\mathbf{\Psi}(\hat{\mathbf{q}}) = \mathbf{\Psi}(\mathbf{q_0})\mathbf{\Psi}(\hat{\mathbf{q}}_*), \tag{14}$$

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{q})\mathbf{\Psi}(\mathbf{q_0}) = \mathbf{\Psi}(\mathbf{q_0})\mathbf{\Phi}(\mathbf{q}), \tag{15}$$

$$\mathbf{\Phi^T}(\mathbf{q_0})\mathbf{\Phi}(\mathbf{q}) = \mathbf{\Phi}(\mathbf{q}_\varphi)\mathbf{\Phi^T}(\mathbf{q_0}), \tag{16}$$

$$\mathbf{\Psi}(\mathbf{q})\mathbf{\Psi^T}(\mathbf{q_0}) = \mathbf{\Psi^T}(\mathbf{q_0})\mathbf{\Psi}(\mathbf{q}_\psi), \tag{17}$$

де $\mathbf{q}_\varphi = [\mathbf{c} \ \ \mathbf{n^T A}(\mathbf{q_0})]^\mathbf{T}$, $\mathbf{q}_\psi = [\mathbf{c} \ \ \mathbf{n^T A^T}(\mathbf{q_0})]^\mathbf{T}$.

Відзначимо, що рівності (13) і (14) випливають із (9) й (11). Властивості комутативності (15) перевіряються безпосередньою підстановкою згідно з (10) і (12), а властивості (16) й (17) є матричним відображенням теореми про переставні скінченні повороти [3].

Оскільки шуканий кватерніон $\mathbf{q}_*$ має задовільнити рівність

$$\mathbf{S}\mathbf{q}_* = \lambda_*\mathbf{q}_*, \tag{18}$$

у якій λ_* — максимальне власне значення заданої виразом (7) симетричної матриці $\mathbf{S}$, то після підстановки в цю рівність отриманого з (11) кватерніона

$$\mathbf{q}_* = \mathbf{\Psi^T}(\mathbf{q_0})\hat{\mathbf{q}}$$

маємо

$$\mathbf{S_0}\hat{\mathbf{q}} = \lambda_*\hat{\mathbf{q}}, \tag{19}$$

де

$$\mathbf{S_0} = \mathbf{\Psi}(\mathbf{q_0})\mathbf{S}\mathbf{\Psi^T}(\mathbf{q_0}). \tag{20}$$

Розглянемо добуток матриць у правій частині цієї рівності. Неважко впевнитися, що матриця $\mathbf{K}(\mathbf{m}, \mathbf{k})$ у другому доданку рівності (7) може бути записана у вигляді

$$\mathbf{K}(\mathbf{m}, \mathbf{k}) = \mathbf{\Phi}(\mathbf{k})\mathbf{\Psi}(\mathbf{m}), \tag{21}$$

де $\mathbf{\Phi}(\mathbf{k})$ і $\mathbf{\Psi}(\mathbf{m})$ — це матриці, які визначають співвідношення (10) і (12), у яких скалярні частини кватерніона дорівнюють нулю ($c = 0$), а векторні дорівнюють $\mathbf{k}$ або $\mathbf{m}$ відповідно.

Тоді для добутку матриць справедливі представлення

$$\mathbf{\Psi}(\mathbf{q_0})\mathbf{K}(\mathbf{m},\mathbf{k})\mathbf{\Psi}^{\mathbf{T}}(\mathbf{q_0}) = \mathbf{\Phi}(\mathbf{k})\mathbf{\Psi}(\mathbf{q_0})\mathbf{\Psi}(\mathbf{m})\mathbf{\Psi}^{\mathbf{T}}(\mathbf{q_0}),$$

$$\mathbf{\Psi}(\mathbf{q_0})\mathbf{K}(\mathbf{m},\mathbf{k})\mathbf{\Psi}^{\mathbf{T}}(\mathbf{q_0}) = \mathbf{\Phi}(\mathbf{k})\mathbf{\Psi}(\mathbf{A}(\mathbf{q_0})\mathbf{m})), \tag{22}$$

де перша рівність випливає з урахування властивості (15), а друга з першої з урахуванням (17). Тобто, згідно з (21),

$$\mathbf{\Psi}(\mathbf{q_0})\mathbf{K}(\mathbf{m},\mathbf{k})\mathbf{\Psi}^{\mathbf{T}}(\mathbf{q_0}) = \mathbf{K}(\mathbf{m},\mathbf{k_0}), \tag{23}$$

де

$$\mathbf{k_0} = \mathbf{A}(\mathbf{q_0})\mathbf{m} \ \ - \tag{24}$$

апріорна оцінка вимірюваного вектора.

Тепер для заданої співвідношенням (20) матриці $\mathbf{S_0}$ із урахуванням (7), рівності

$$\mathbf{\Psi}(\mathbf{q_0})\mathbf{q_0} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathbf{T}}$$

і рівності (23) отримуємо

$$\mathbf{S_0} = \begin{bmatrix} 2\alpha + \beta\mathbf{k_0}^{\mathbf{T}}\mathbf{k} & \beta(\mathbf{k}\times\mathbf{k_0})^{\mathbf{T}} \\ \beta(\mathbf{k}\times\mathbf{k_0}) & \beta(\mathbf{k_0}\mathbf{k}^{\mathbf{T}} + \mathbf{k}\mathbf{k_0}^{\mathbf{T}} - (\mathbf{k_0}^{\mathbf{T}}\mathbf{k})\mathbf{I}) \end{bmatrix}.$$

При відображенні рівняння (19) у блоковій формі легко помітити, що власний вектор $\hat{\mathbf{q}}$ матриці $\mathbf{S_0}$ може бути заданий як

$$\hat{\mathbf{q}} = \frac{\mathbf{1}}{\rho}\begin{bmatrix}\gamma \\ \beta(\mathbf{k}\times\mathbf{k_0})\end{bmatrix}, \tag{25}$$

де γ — невизначена величина, а множник $\frac{1}{\rho}$ забезпечує нормування.

Запишемо рівняння (19) у блоковому вигляді

$$\begin{bmatrix} 2\alpha + \beta\mathbf{k_0}^{\mathbf{T}}\mathbf{k} & \beta(\mathbf{k}\times\mathbf{k_0})^{\mathbf{T}} \\ \beta(\mathbf{k}\times\mathbf{k_0}) & \beta(\mathbf{k_0}\mathbf{k}^{\mathbf{T}} + \mathbf{k}\mathbf{k_0}^{\mathbf{T}} - (\mathbf{k_0}^{\mathbf{T}}\mathbf{k})\mathbf{I}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma \\ \beta(\mathbf{k}\times\mathbf{k_0})\end{bmatrix} =$$

$$= \lambda_* \begin{bmatrix}\gamma \\ \beta(\mathbf{k}\times\mathbf{k_0})\end{bmatrix}.$$

Тоді зі другої стрічки цього рівняння маємо

$$\gamma = \lambda_* + \beta(\mathbf{k^T k_0}), \tag{26}$$

а з першої з урахуванням (26) отримуємо таке рівняння для визначення власного значення λ_*:

$$\lambda_*^2 - 2\alpha\lambda_* - 2\alpha\beta(\mathbf{k_0^T k}) - \boldsymbol{\beta^2} = \mathbf{0},$$

тобто

$$\lambda_* = \alpha + (\alpha^2 + 2\alpha\beta(\mathbf{k_0^T k}) + \boldsymbol{\beta^2})^{\frac{1}{2}}. \tag{27}$$

Так, розв'язок сформульованої задачі визначення оцінки орієнтації твердого тіла задається співвідношенням (9), у якому кватерніон корекції $\hat{q}$ задається згідно з рівностями (25)-(27).

Треба відзначити, що структура коректованого повороту відображає фізичну інтерпретацію корекції й вона полягає в повороті заданого кватерніоном $\mathbf{q_0}$ базису навколо вісі, ортогональної до векторів $\mathbf{k}$ і $\mathbf{k_0}$ на такий кут, щоб завдяки цьому повороту вектор оцінки вимірювань $\mathbf{k}^* = \mathbf{A}(\mathbf{q}_*)\mathbf{m}$ був між $\mathbf{k}$ і $\mathbf{k_0}$, а кут між векторами $\mathbf{k}_*$ і $\mathbf{k}$ та $\mathbf{k}_*$ і $\mathbf{k_0}$ були певним чином пропорційними до “достовірності” інформації кожного з вимірювальних каналів.

[1] *Науменко К. И.* Локальный метод определения ориентации твёрдого тела: Навигация и управление. Институт математики АН УССР. — Киев, 1982. — С. 121–128.

[2] *Науменко К. І.* Застосування градієнтного методу при визначенні локальної орієнтації твердого тіла // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2010. — **7**, 3.— С. 370–378.

[3] *Лурье А. И.* Аналитическая механика. — М.: Физматгиз, 1961. — 824 с.