

УДК 517.9:534.1

Приховані й рідкісні атрактори в неідеальних електропружних системах

О. Ю. Швець¹ С. В. Донецький²

*Національний технічний університет України “Київський
політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, Київ;*

¹ *aleksandrshvetski@gmail.com*

² *dsvshka@gmail.com*

An unideal, after Sommerfeld–Kononenko, dynamic system “piezo ceramic transducer – LC-generator” is considered. Hidden and rare attractors of the system are constructed. A untypical regularity of alternation of scenarios of transition to chaos in such systems is described.

Розглянута неідеальна (за Зоммерфельдом–Кононенком) динамічна система “п’єзокерамічний випромінювач – LC-генератор”. Побудовані приховані й рідкісні атрактори цієї системи. Описана нетипова закономірність чергування сценаріїв переходу до хаосу в таких системах.

Вступ

Одним із найважливіших елементів сучасного навігаційного обладнання є п’єзокерамічні випромінювачі. Різні види таких випромінювачів широко використовуються у глибиномірах, далекомірах, приладах для сканування підводного середовища, системах прийому й передачі інформації під водою. Останнім часом, в якості джерела енергії збудження коливань п’єзокерамічних випромінювачів стали використовуватися, створені за сучасними технологіями, електролампові LC – генератори. Це пов’язано з тим, що електролампові генератори є аналоговими пристроями і мають кращі метрологічні характеристики вихідних сигналів порівняно з цифровими збуджувальними пристроями.

В роботі досліджується детермінована динамічна система “електроламповий генератор – п’єзокерамічний випромінювач”. Причому

принципово припускається, що джерело збудження (електроламповий LG-генератор) має потужність, порівнянну з потужністю, яка споживається коливальним навантаженням (п'єзокерамічним випромінювачем). Така система неідеальна за класифікацією Зоммерфельда-Кононенка [1, 2]. Головна увага приділяється вивченню прихованих й рідкісних атракторів такої системи.

1 Приховані й рідкісні атрактори

Зазвичай дослідження динамічних систем починається з визначення положень рівноваги, які можуть бути знайдені завдяки аналітичним й комп'ютерним методам. Подальші дослідження поведінки динамічних систем спупроводжуються вивченням околу цих положень рівноваги, а тому природними є означення, запропоновані в [3, 4]:

Атрактор називається самозбуджуваним, якщо існує положення рівноваги таке, що будь-який його окіл перетинається з басейном притягання атрактора. Атрактор називається прихованим, якщо він не є самозбуджуваним.

Для більшості динамічних систем головну увагу приділяють вивченню самозбуджуваних атракторів. Це пов'язано з тим, що наразі встановлення існування прихованих атракторів є, взагалі кажучи, надзвичайно складною задачею. Проте атрактори динамічних систем не вичерпуються лише самозбуджуваними. Виникнення у конкретній динамічній системі (пристрою, приладу, елементу конструкції) прихованого атрактора може повністю змінити очікувану поведінку системи й унеможливити виконання нею передбачуваних експлуатаційних функцій. Понад те, розробники конкретної системи можуть і не здогадуватися, що функціонування системи відбувається в режимі прихованого атрактора.

Крім зазначеної класифікації атракторів, існує ще одна, а саме поділ атракторів на рідкісні й такі, що не є рідкісними. Це поняття доволі нове і було запропоноване в роботі [5]. Атрактор називається рідкісним, якщо він розташований у фазовому просторі поруч із іншим атрактором і фазовий об'єм (міра) його басейну притягання є значно менший порівняно з басейном притягання атрактора, біля якого він розташований. У загальному випадку під рідкісним атрактором розуміється атрактор, який має надзвичайно малий басейн притягання. Зрозуміло, що ймовірність траєкторії потрапити на цей атрактор мала.

2 Система “генератор – п’єзокерамічний випромінювач”

Розглянемо циліндричний стрижневий п’єзокерамічний випромінювач, до електродів якого подається електрична напруга, збуджувану електроламповим LC -генератором. Припустимо, що потужність джерела збудження (генератора) порівнянна з потужністю, яку споживає коливальне навантаження (випромінювач). Тоді, як встановлено у роботах [6, 8], математичну модель динамічної поведінки системи «генератор-п’єзокерамічний випромінювач» можна зобразити за допомогою такої системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}\ddot{\phi} + \omega_0^2 \phi &= a_1 \dot{\phi} + a_2 \dot{\phi}^2 - a_3 \dot{\phi}^3 - a_4 V(t), \\ \ddot{V}(t) + \omega_1^2 V(t) &= a_5 \phi + a_6 \dot{\phi} - a_7 \dot{V}(t),\end{aligned}\quad (1)$$

де через $\phi(t)$ позначена фазова змінна, яка пропорційна електричній напрузі на сітці лампи генератора, а фазова змінна $V(t)$ – електрична різниця потенціалів на електродах випромінювача. Параметри $a_1, \dots, a_7, \omega_0, \omega_1$, які визначаються через електромагнітні, геометричні й деформаційні властивості генератора та випромінювача. Ці параметри визначаються за достатньо громіздкими формулами у [6, 8]. Система (1) є типовою неідеальною системою (системою з обмеженим збудженням) за Зоммерфельдом–Кононенком [1]. У ній врахована нелінійна взаємодія між генератором і випромінювачем.

Використовуючи заміну змінної

$$\xi = \frac{\phi \omega_0}{E_g}, \quad \frac{d\xi}{d\tau} = \zeta, \quad \beta = \frac{V}{E_g}, \quad \frac{d\beta}{d\tau} = \gamma, \quad \tau = \omega_0 t, \quad (2)$$

де ω_0 – власна частота генератора, E_g – сіткова напруга, ми можемо звести систему рівнянь (1) до такої системи:

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{d\tau} &= \zeta, \\ \frac{d\zeta}{d\tau} &= -\xi + \alpha_1 \zeta + \alpha_2 \zeta^2 - \alpha_3 \zeta^3 + \alpha_4 \beta, \\ \frac{d\beta}{d\tau} &= \gamma, \\ \frac{d\gamma}{d\tau} &= -\alpha_0 \beta + \alpha_5 \xi + \alpha_6 \zeta - \alpha_7 \gamma,\end{aligned}\quad (3)$$

де

$$\alpha_0 = \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}, \quad \alpha_1 = \frac{a_0}{\omega_0}, \quad \alpha_2 = \frac{a_2 E_g}{\omega_0}, \quad \alpha_3 = \frac{a_3 E_g^2}{\omega_0},$$

$$\alpha_4 = -\frac{a_4}{\omega_0}, \quad \alpha_5 = \frac{a_5}{\omega_0^3}, \quad \alpha_6 = \frac{a_6}{\omega_0^2}, \quad \alpha_7 = \frac{a_7}{\omega_0}.$$

У роботах [6–8] знайдені положення рівноваги системи (3) й досліджена їхня стійкість за Ляпуновим. Показано, що система (3) при виконанні умови $\alpha_0 = -\alpha_4 \alpha_5$ має нескінчену кількість положень рівноваги. Якщо ж $\alpha_0 \neq -\alpha_4 \alpha_5$, то єдиним положенням рівноваги буде початок координат фазового простору. За певних співвідношень між параметрами системи таке єдине положення рівноваги стає нестійким. У цих випадках усі траєкторії системи, які стартують із околу початку координат фазового простору, зі плином часу залишають цей окіл і прямуватимуть до певних граничних множин, які можуть бути як регулярними, так і хаотичними.

Система (3) унікальна стосовно розмаїття динамічної поведінки, яке можливе в цій системі. Вона може послугувати прикладом малої "бібліотеки" нелінійної динаміки в цілому. Як встановлено у роботах [6–10], у системі (3) існують усі можливі регулярні атрактори динамічних систем, такі як положення рівноваги, граничні цикли й інваріантні тори. Крім того у цієї детермінованої системи існує розмаїття хаотичних і гіперхаотичних атракторів. Також реалізуються всі основні сценарії переходу від регулярних атракторів до хаотичних, такі як каскад біфуркацій подвоєння періоду (сценарій Фейгенбаума) [11–12], переміжність за Маннвіллем–Помо [13–14] й сценарії, пов'язані з руйнуванням інваріантного тора [15–17].

3 Приховані й рідкісні атрактори системи "генератор – п'єзокерамічний випромінювач"

Незважаючи на вищезазначене різноманіття "класичної" регулярної й хаотичної динаміки системи "генератор–випромінювач", зазначимо, що вивчення атракторів цієї системи щодо їхньої "рідкості" і "прихованості" раніше не проводилось. Це пов'язано з тим, що поняття прихованого й рідкісного атракторів з'явилися тільки кілька років тому.

Оскільки система (3) є нелінійною системою диференціальних рівнянь, то майже всі подальші результати отримані за допомогою комплексу чисельних комп'ютерних розрахунків. Детальна методика таких розрахунків викладена у роботах [6, 7, 9, 18–20]. Проведення таких розрахунків для цієї роботи забезпечувалось новим оригінальним програмним пакетом для знаходження основних характеристик атракторів динамічних систем.

Нехай $\alpha_0 = 0.995$, $\alpha_1 = 0.0535$, $\alpha_3 = 9.95$, $\alpha_4 = -0.103$, $\alpha_5 = -0.0604$, $\alpha_6 = -0.12$, $\alpha_7 = 0.01$, а параметр α_2 оберемо за біфуркаційний. При таких значеннях параметрів, система (3) має єдине положення рівноваги ($\xi = 0$; $\zeta = 0$; $\beta = 0$; $\gamma = 0$;) [6, 7].

Покладемо $\alpha_2 = 8.623$ й дослідимо еволюцію існуючих атракторів при збільшенні цього параметра. При таких значеннях параметрів у системі (3) існує єдиний атрактор (граничний цикл). Оскільки цей атрактор єдиний в околі нульового нестійкого положення рівноваги, то він є самозбуджуваним і не є рідкісним (згідно зі введеними означеннями). При $\alpha_2 = 8.624$, крім уже існуючого граничного циклу в системі виникає ще один граничний цикл. Проекції фазових портретів цих граничних циклів, побудовані при $\alpha_2 = 8.625$, зображені на рис. 1а.) (раніше існуючий граничний цикл) та рис. 1б.) (новий виниклий граничний цикл). Причому на рис. 1) раніше існуючий граничний цикл позначений чорним кольором, а щойно виниклий – червоним.

Зауважимо, що при вивченні подальших біфуркацій цих циклів ми умовно називаємо їх чорним атрактором (цикл із рис. 1а.) – і червоним атрактором (цикл із рис. 1б.)

Область локалізації новонародженого граничного циклу майже втричі більша ніж уже існуючого. Незважаючи на це, чисельні експерименти показують, що новоутворений атрактор має надзвичайно малий басейн притягання. Крім того, при будь-якій початковій умові з околу нульового положення рівноваги усталена траєкторія притягається саме до чорного граничного циклу, що свідчить про те, що червоний граничний цикл є ще й прихованим атрактором.

При $\alpha_2 > 8.625$ ситуація вже кардинально змінюється. Значно розширюється басейн притягання червоного атрактора. Тепер майже всі траєкторії, які стартують з околу початку координат притягуються до червоного атрактора. Цей атрактор перестає бути рідкісним і стає самозбуджуваним атрактором. Навпаки, чорний атрактор (граничний цикл) перестає (відповідно до означень, наведених у частині

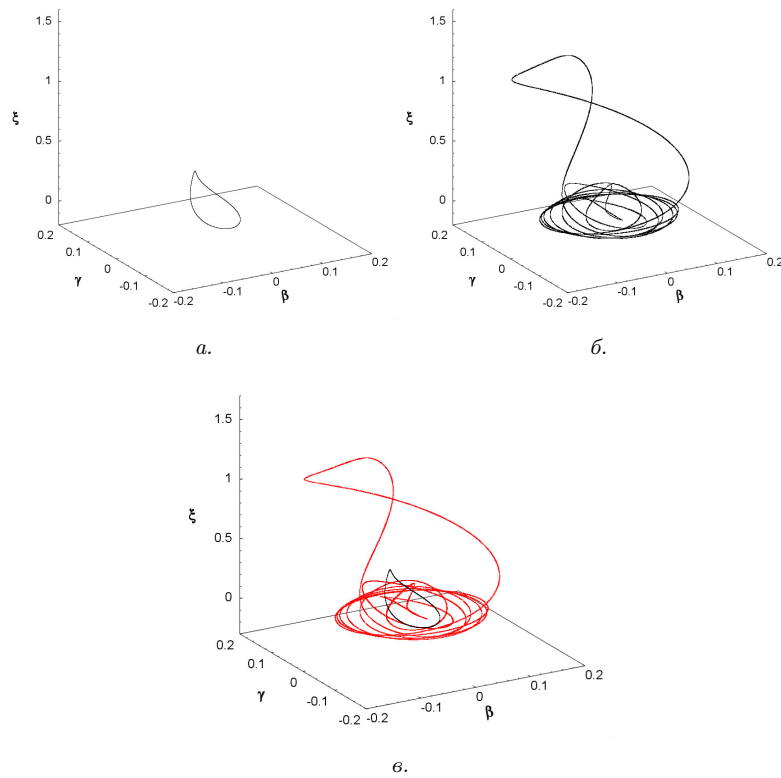


Рис 1. Проекції фазових портретів граничних циклів при $\alpha_2 = 8.625$: раніше існуючий граничний цикл (а); виниклий граничний цикл (б); обидва цикли одночасно (в).

2) бути самозбудним і перетворюється на рідкісний граничний цикл.

Описана ситуація має місце аж до значення $\alpha_2 = 8.659$, при якому червоний атрактор припиняє своє існування. І знову єдиним аттрактором у системі є чорний граничний цикл, який втрачає ознаки як рідкісності, так і прихованості й перетворюється на самозбуджуваний атрактор.

Ця пара атракторів цікава ще й тим, що при зміні параметра α_2

червоний атрактор за свій період існування неоднаразово переходить до хаосу, а тому розглянемо еволюцію цієї пари.

4 Еволюція атракторів, які співіснують у системі “генератор – п’єзокерамічний випромінювач”

Як відомо, основними сценаріями переходу до хаосу в детермінованих динамічних системах є сценарії Фейгенбаума [11, 12] і Помо-Манневілья [13, 14]. За першим сценарієм перехід до хаосу відбувається через нескінченний каскад біфуркацій подвоєння періоду граничного циклу, а за другим – через переміжність, яка відбувається за одну жорстку біфуркацію. Причому при переміжності рух по траєкторії, належної хаотичному атрактору, складається зі двох фаз, ламінарної й турбулентної з непередбачуваними переходами від однієї фази до другої. Найтипovішою для динамічних систем є ситуація, коли при збільшенні (зменшенні) деякого біфуркаційного параметра відбуваються послідовні переходи до хаосу за сценарієм Фейгенбаума, а у зворотному напрямі при зменшенні (збільшенні) значення параметра послідовні переходи до хаосу відбуваються за сценарієм Помо-Манневілья [17].

На рис. 2 побудовані фазо-параметричні характеристики співіснуючих атракторів системи [3], а на рис. 3 – збільшений фрагмент центральної частини цих характеристик. Ці характеристики (біфуркаційні дерева) побудовані стосовно фазової змінної β . Зазначимо, що біфуркаційні дерева побудовані відносно інших фазових змінних системи [3], якісно подібні до наведених на рис. 2

Фазо-параметрична характеристика, яка відповідає чорному атрактору, зображена окремою прямою чорного кольору в нижній частині рис. 2. Ніяких біфуркацій із цим атрактором не відбувається. Він постійно залишається прихованим граничним циклом.

Що стосується червоного самозбуджуваного атрактора, то в розглянутому інтервалі зміни параметра α_2 відбуваються численні переходи від граничних циклів до хаотичних атракторів, а також руйнування хаотичних атракторів і виникнення граничних циклів. Усі такі переходи добре видні на побудованому червоному біфуркаційному дереві. Окремі “гілки” цього дерева відповідають граничним циклам, а жирно затемнені ділянки – хаотичним атракторам. Добре помітні (особливо на рис. 3) точки розщеплення гілок біфуркаційного дерева, при проходженні яких відбуваються біфуркації подвоєння

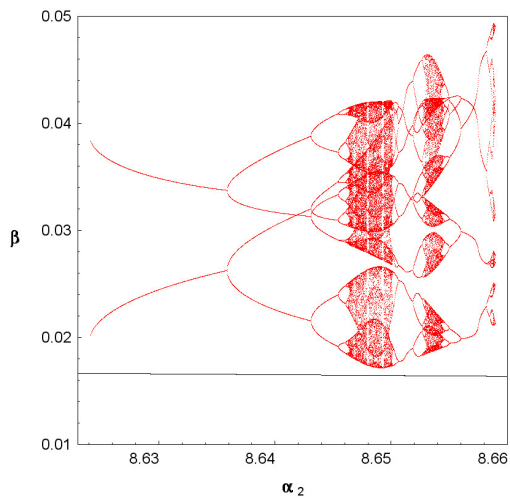


Рис 2. Фазо-параметрична характеристика системи.

періоду граничного циклу. Також добре видні порогові точки, при проходженні яких нескінченний каскад біфуркацій подвоєння періоду завершується виникненням хаотичного атрактора, тобто реалізується перехід до хаосу за сценарієм Фейгенбаума.

Також при уважному вивченні рис. 2 (особливо добре це видно на рис. 3) можна помітити чисельні “прорізи” в густо червоних ділянках біфуркаційного дерева. Це, так звані, вікна періодичності в хаосі. При виході з вікна періодичності в один бік зміни параметра відбувається перехід до хаосу за сценарієм Фейгенбаума, а у протилежний – хаос виникає за одну біфуркацію за сценарієм Помо–Маннєвілля. Проте з рис. 2 чітко видно порушення закономірності послідовних переходів до хаосу за одним сценарієм при збільшенні (зменшенні) значення параметра. Ми можемо спостерігати деяку симетрію сценаріїв переходу до хаосу, тобто перехід до хаосу відбувається за сценарієм Фейгенбаума в обидва боки як зі збільшенням значення параметру так і зі зменшенням. Аналогічне твердження виконується й для сценарію Помо–Маннєвілля. Така симетрія вкрай нетипова для динамічних систем. Зазначимо, що подібний ефект симетрії сценаріїв переходу до хаосу був встановлений для деякої неідеальної маятникової систе-

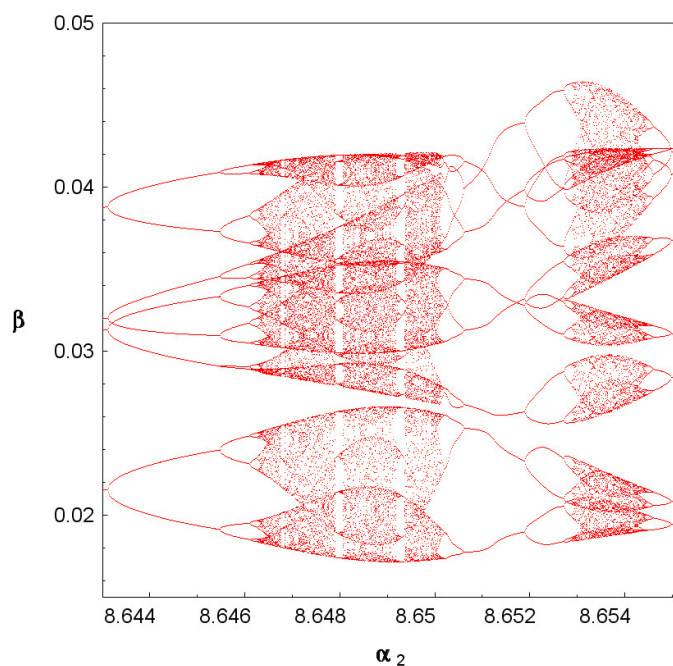


Рис 3. Збільшений фрагмент фазо-параметричної характеристики

ми [21].

Нарешті, на рис. 4 побудована ще одна пара атракторів, які існують водночас: прихованого й рідкого граничного циклу (чорний) і самозбуджуваного хаотичного атрактора (червоний) при $\alpha_2 = 8.647$.

5 Висновки

Таким чином у роботі для неідеальної динамічної системи вперше побудовані приховані й рідкісні атрактори, які можуть бути як регулярними, так і хаотичними. Також описана нетипова симетрія сценаріїв переходу від регулярних атракторів до хаотичних

- [1] *Kononenko V.O. Vibrating system with a limited power-supply // London: Iliffe, 1969. — 236 p.*

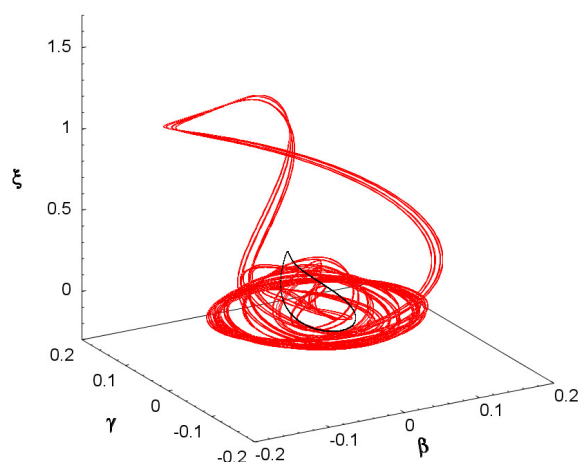


Рис 4. Проекція фазових портретів граничного циклу (чорним) і хаотичного аттрактора (червоним) разом при $\alpha_2 = 8.647$.

- [2] Краснопольская Т.С., Швец А.Ю. Регулярная и хаотическая динамика систем с ограниченным возбуждением // Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований; R&C Dynamics, 2008. — 288 с.
- [3] Leonov G., Kuznetsov N. et al. Localization of hidden Chua's attractors // Physics Letters A. — 2011. — **375**, 23. — P. 2230–2233.
- [4] Leonov G., Kuznetsov N. Hidden attractors in dynamical systems // International journal of bifurcation and chaos. — 2013. — **23**, 1. — 1330002.
- [5] Chudzik A., Perlikowski P. et al. Multistability and rare attractors in van der Pol–Duffing oscillator // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 2011. — **21**, 7. — P. 1907–1912.
- [6] Краснопольская Т.С., Швец А.Ю. Детерминированный хаос в системе генератор–пьезокерамический излучатель // Нелинейная динамика. — 2006. — **2**, 1 — С. 55–74.
- [7] Krasnopolskaya T.S., Shvets A. Yu. Deterministic chaos in a system generator — piezoceramic transducer // Nonlinear Dynamics and System Theory. — 2006. — **6**, 4 — P. 367–387.
- [8] Balthazar J.M., Palacios Felix J.L. et al. Nonlinear interactions in a piezoceramic bar transducer powered by a vacuum tube generated by a

- nonideal source // *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*. — 2009. — **4**, 1 — 011013.
- [9] Швець А.Ю., Печерный В.А. Разнообразие хаотической динамики одной неидеальной электроупругой системы // *Збірник праць Інституту математики НАН України*. — 2008. — **5**, 2. — С. 367–395.
- [10] Shvets A., Donetskyi S. Transition to Deterministic Chaos in Some Electroelastic Systems // 11th Chaotic Modeling and Simulation International Conference. CHAOS 2018. Springer Proceedings in Complexity. Springer, Cham. — 2019. — P. 257–264.
- [11] Feigenbaum M. J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations // *J. Stat. Phys.* — 1976. — **19**, 1. — P. 25–52.
- [12] Feigenbaum M. J. The universal metric properties of nonlinear transformations // *J. Stat. Phys.* — 1979. — **21**, 6. — P. 669–706.
- [13] Manneville P., Pomeau Y. Different ways to turbulence in dissipative dynamical systems // *Phys. D*. — 1980. — **1**, 2. — P. 219–226.
- [14] Pomeau Y., Manneville P. Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems // *Comm. Math. Phys.* — 1980. — **74**, 2. — P. 189–197.
- [15] Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах // М: Наука, 1990. — 312 с.
- [16] Magnitskii N.A., Sidorov S.V. New methods for chaotic dynamics // New Jersey – London: World Scientific, 2006. — 382 p.
- [17] Кузнецов С.П. Динамический хаос // М: Физматлит — 2006 — 356 с.
- [18] Shvets A. Yu., Sirenko V.O. Peculiarities of Transition to Chaos in Non-ideal Hydrodynamics Systems // *Chaotic Modeling and Simulation (CM-SIM) Journal* — 2012 — 2. — P. 303–310.
- [19] Shvets A. Yu. Sirenko V.O. New ways of transitions to deterministic chaos in non ideal oscillating systems // *Research Bulletin of National Technical University of Ukraine “Kyiv Polytechnic Institute”*. — 2015. — 1(99). — P. 45–51.
- [20] Shvets A. Yu. Deterministic chaos of a spherical pendulum under limited excitation // *Ukr Math J* — 2007 — **59**, 4. — P. 602–614.
- [21] Швець А.Ю., Макашеев А.М. Влияние запаздывания на регулярные и хаотические колебания плоского маятника // *Збірник праць Інституту математики НАН України* — 2012. — **9**, 1. — С. 365–377.
- [22] Krasnopol'skaya T.S., Shvets A. Yu. Chaos in dynamics of machines with a limited power-supply // 8-th World Congr. on the Theory of Machines and Mechanisms. Eds. M. Okrolnick, L. Pust. Prague: Czechoslovak Acad. Sci. — 1991. — **1**. — P. 181–184.