Збірник праць Інституту математики НАН України 2019, т. 16, № 2, 167–176

УДК 539.3

Собственные колебания составной оболочки “усечённый конус – цилиндр”

Ю. В. Троценко [*]

Институт математики НАН Украины, Киев; trots@imath.kiev.ua

A variational method for constructing an approximate solution of the spectral problem on the eigen non-symmetric oscillations of a shell of revolution constituted by cylindrical and tapered conical components is developed. A generalized functional with respect to the shell displacements is constructed whose necessary extrema condition naturally provides all transmission conditions. To find the extrema of the functional, the Ritz method is used. The numerical results are compared with computations by other authors.

Розвинуто варіаційний метод побудови наближеного розв'язку спектральної задачі про власні неосесимтричні коливання оболоноки обертання, що складається з циліндричної та зрізаної конічної оболонок. Побудовано узагальнений функціонал відносно переміщень оболонки, для якого умови спряження розв'язків для складених оболонок є природними граничними умовами на спільній границі. Для знаходження стаціонарних значень функціоналу використовується метод Рітца. Наведено порівняння отриманих розрахунків із даними інших авторів.

Тонкостенные конструкции в виде составных оболочек вращения широко используются в различных областях машиностроения и строительства сооружений. Определение резонансных частот и форм колебаний составных оболочек вращения является первоочередной задачей в общем комплексе исследований их динамического поведения.

Развитие вычислительной техники обеспечило возможность широкого внедрения в расчётную практику численных методов решения рассматриваемых задач. Для определения свободных колебаний составных оболочек вращения может быть использован метод численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных

[*]Работа выполнена при частичной поддержке НИР № 0112U001015

© **Троценко Ю. В., 2019**

уравнений с ортогонализацией решений в некоторых внутренних точках интервала интегрирования [1, 2]. При определении собственных частот колебаний этим методом приходится многократно решать краевые задачи, задаваясь значениями частот в определённом диапазоне.

При использовании метода конечных элементов (МКЭ) ширина кольцевых конечных элементов, на которые делится оболочка вращения, для обеспечения необходимой точности аппроксимации решений должна быть выбрана достаточно малой [3]. В результате для удлиненных тонкостенных конструкций система уравнений МКЭ имеет достаточно высокий порядок, что усложняет построение решения. Применение МКЭ к расчёту колебаний составных оболочечных конструкций изложено в работах [4, 5].

Поскольку определение собственных колебаний конструкции является базовой задачей при исследовании ее динамического поведения под воздействием нестационарной нагрузки, то при выборе метода ее решения отдается преимущество методам, которые имеют аналитическую форму решения и обеспечивают гарантированную точность вычислений. Аналитическое решение задачи об определении резонансных частот системы «усеченный конус – цилиндр» в рамках уравнений теории оболочек Муштари – Доннелла – Власова и Флюге предложено в работе [6]. Метод степенных рядов для вычисления собственных частот сопряжённых оболочек вращения использован в работе [7]. Применение метода Ритца к изучению колебаний составных оболочек не является тривиальной задачей, поскольку подсистемы конструкции описываются разными уравнениями и выполнение кинематических и силовых условий сопряжения на смежной границе представляет собой сложную проблему.

Модифицированный вариационный метод для анализа колебаний составных оболочек предложен в работах [8–10]. Метод базируется на объединении вариационного принципа с методом наименьших квадратов с подходящим выбором весовых коэффициентов. Для повышения точности решения задачи каждая оболочка, входящая в состав конструкции, дополнительно разбивается на конечное число элементов.

Данная работа посвящена применению метода Ритца к определению собственных колебаний оболочечной системы “усечённый конус – цилиндр” в рамках теории оболочек Муштари – Доннелла – Власова.

Рассмотрим неосесимметричные свободные колебания двух соосно расположенных тонкостенных оболочек вращения разной геометрии, которые сопряжены между собой вдоль некоторой параллели. Считается также, что элементы оболочечной системы выполнены из изотропного материала с плотностью ρ и имеют постоянную толщину h. Упругие свойства оболочки характеризуются модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν. Будем предполагать, что составная оболочка ограничена двумя параллелями L_1 и L_2. В качестве криволинейных координат для произвольной точки срединной поверхности оболочки выберем длину дуги меридиана s, отсчитываемую от некоторой начальной параллели $s = s_1$ и угол β, определяющий положение точки на соответствующей параллели. Обозначим через R_1 — радиус кривизны меридиана, а через $r = r(s)$ — расстояние от точки меридиана до оси вращения. Второй радиус кривизны R_2 равен длине отрезка нормали к срединной поверхности от этой поверхности к оси вращения оболочки. Проекции перемещения точек срединной поверхности на положительные направления меридиана и параллели, а также внешнюю нормаль к поверхности оболочки обозначим соответственно через u, v и w.

В дальнейшем будем пользоваться основными положениями теории тонких оболочек Муштари – Доннелла – Власова [11], которая является наиболее простой и позволяет проводить расчеты для ряда оболочек с удовлетворительной точностью. При установившихся гармонических колебаниях оболочки с частотой ω для асимметричной формы деформации ее срединной поверхности перемещения u, v и w можно искать в следующем виде:

$$\begin{aligned} &u(s,\beta,t) = u(s)\cos(n\beta)\exp^{i\omega t}, \quad v(s,\beta,t) = v(s)\sin(n\beta)\exp^{i\omega t},\\ &w(s,\beta,t) = w(s)\cos(n\beta)\exp^{i\omega t}, \quad n = 1,2,\ldots \end{aligned} \tag{1}$$

где n — число волн упругой поверхности оболочки в окружном направлении.

Введём в рассмотрение безразмерные величины (обозначенные чёрточкой сверху), которые связаны с соответствующими размерными величинами следующим образом:

$$\begin{aligned} &\{T_1, S, \tilde{Q}_1 = \frac{Eh}{(1-\nu^2)}\{\bar{T}_1, \bar{S}, \bar{\tilde{Q}}_1\}; \quad \{M_1, H\} = \frac{EhR_0}{(1-\nu^2)}\{\bar{M}_1, \bar{H}\};\\ &\{u, v, w\} = R_0\{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\}; \quad \lambda^2 = \frac{(1-\nu^2)\rho R_0^2\omega^2}{E}, \end{aligned} \tag{2}$$

где T_1, S и $\tilde{Q}_1$ — меридиональная, сдвигающая и обобщённая поперечная сила; M_1 и H — изгибающий и крутящий момент; R_0 —

некоторый характерный размер оболочки. В дальнейшем черточку над безразмерными величинами будем опускать.

Безразмерные усилия и моменты, действующие в срединной поверхности оболочки, связаны с ее перемещениями по следующим формулам:

$$
\begin{aligned}
&T_1 = \frac{du}{ds} + \frac{w}{R_1} + \nu\left(\frac{n}{r}v + \frac{r'}{r}u + \frac{w}{R_2}\right);\\
&M_1 = -c^2\left[\frac{d^2w}{ds^2} + \nu\left(\frac{r'}{r}\frac{dw}{ds} - \frac{n^2}{r^2}w\right)\right];\\
&\tilde{Q}_1 = -c^2\left[\frac{d}{ds}\Delta w - \frac{(1-\nu)n^2}{r^2}\left(\frac{dw}{ds} - \frac{r'}{r}w\right)\right];\\
&\Delta w = \frac{1}{r}\frac{d}{ds}\left(r\frac{dw}{ds}\right) - \frac{n^2}{r^2}w; \quad c^2 = \frac{h^2}{12R_0^2};\\
&H = c^2(1-\nu)\left(\frac{n}{r}\frac{dw}{ds} - \frac{r'n}{r^2}w\right); \quad S = \frac{1-\nu}{2}\left(\frac{dv}{ds} - \frac{r'}{r}v - \frac{n}{r}u\right).
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Определение вектор-функций $\vec{u}^{(k)} = \{u^{(k)}, v^{(k)}, w^{(k)}\}^T$ и частот свободных колебаний составной оболочки сводится к интегрированию двух однородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений восьмого порядка с переменными коэффициентами:

$$
\mathfrak{T}^{(k)}(\vec{u}^{(k)}) = \mathcal{A}^{(k)}\vec{u}^{(k)} - \lambda^2\vec{u}^{(k)} = 0, \quad (k = 1, 2), \tag{4}
$$

где

$$
\mathcal{A}^{(k)} = \begin{pmatrix} L_{11}^{(k)} & L_{12}^{(k)} & L_{13}^{(k)} \\ L_{21}^{(k)} & L_{22}^{(k)} & L_{23}^{(k)} \\ L_{31}^{(k)} & L_{32}^{(k)} & L_{33}^{(k)} \end{pmatrix}.
$$

Явные выражения для дифференциальных операторов $L_{ij}^{(k)}$ $(k = 1, 2;\ i, j = 1, 2, 3)$ приведены в работе [11].

Здесь и в дальнейшем верхний индекс $k = 1, 2$ при функциях и операторах обозначает соответствующие величины, относящиеся к первой или второй оболочке. Системы уравнений (4) при $k = 1$ и $k = 2$ имеют одинаковую структуру и отличаются друг от друга только коэффициентами. Первой оболочке соответствует область изменения независимой переменной s $G^{(1)} = [s_1, s_0]$, а второй — $G^{(2)} = [s_0, s_2]$.

К уравнениям (4) следует добавить граничные условия, выражающие условия закрепления торцов составной оболочки. Помимо этих условий необходимо еще выполнить условия сопряжения решений на смежной границе первой и второй оболочки. При формулировании этих условий необходимо учитывать, что силы и перемещения для разных частей составной оболочки рассчитываются в локальных системах координат. Наиболее простые условия сопряжения можно получить на основе проектирования ортов первой оболочки на орты второй оболочки. При этом условия сопряжения при $s = s_0$ для перемещений оболочки примут вид:

$$\begin{aligned} &u^{(2)} = u^{(1)} \cos\psi - w^{(1)} \sin\psi; \quad w^{(2)} = u^{(1)} \sin\psi + w^{(1)} \cos\psi; \\ &v^{(2)} = v^{(1)}; \quad \frac{dw^{(2)}}{ds} = \frac{dw^{(1)}}{ds}. \end{aligned} \tag{5}$$

В свою очередь, силовые условия сопряжения при $s = s_0$ можно записать так:

$$\begin{aligned} &T_1^{(2)} = T_1^{(1)} \cos\psi - \tilde{Q}_1^{(1)} \sin\psi; \quad \tilde{Q}_1^{(2)} = T_1^{(1)} \sin\psi + \tilde{Q}_1^{(1)} \cos\psi; \\ &S^{(2)} = S^{(1)}; \quad M_1^{(2)} = M_1^{(1)}, \end{aligned} \tag{6}$$

где $\psi = \theta^{(2)}(s_0) - \theta^{(1)}(s_0)$; $\theta^{(1)}(s_0)$ и $\theta^{(2)}(s_0)$ — углы, образованные нормалью к срединной поверхности и осью вращения первой и второй оболочки в точке $s = s_0$ соответственно.

Таким образом, при решении задачи о собственных колебаниях составных оболочек помимо граничных условий на торцах необходимо выполнить еще восемь достаточно сложных условий сопряжения (5) и (6).

Далее предлагается приближенный метод решения рассматриваемой задачи, который базируется на ее эквивалентной вариационной формулировке. Этот метод ранее успешно был применён при решении одномерных и двумерных задач сопряжения [12], [13].

Для определённости будем считать, что при $s = s_1$ торец оболочки свободен и при $s = s_2$ — жёстко закреплён. Тогда граничные условия примут вид:

$$\left(u = v = w = \frac{dw}{ds} \right)_{s=s_2} = 0, \tag{7}$$

$$(T_1 = S = \tilde{Q}_1 = M_1)_{s=s_1} = 0. \tag{8}$$

Вариационную формулировку исходной спектральной задачи можно получить из принципа возможных перемещений Лагранжа в сочетании с принципом Д'Аламбера. В результате задача сводится к отысканию стационарных значений для функционала $I(\vec{u})$

$$I(\vec{u}) = \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{G^{(k)}} F^{(k)}(\vec{u}^{(k)}) dG^{(k)} \tag{9}$$

на классе функций, подчинённых граничным условиям (5) — (8).

Приравнивая вариацию функционала (9) к нулю, получим вариационное уравнение для определения функций $\vec{u}^{(k)}$ в областях $\vec{G}^{(k)}$. В силу произвольности варьирования функций $\vec{u}^{(k)}$ в областях $\vec{G}^{(k)}$ и на границе при $s = s_1$ из этого уравнения следует, что в пределах каждой из введённых подобластей должны выполняться уравнения (4) и граничные условия (8) при $s = s_1$.

Если предположить, что класс допустимых функций подчинён кинематическим условиям сопряжения (5) при $s = s_0$, то можно показать, что условия (6) являются естественными граничными условиями для функционала (9). Таким образом, при применении метода Ритца для решения вариационного уравнения $\delta I = 0$ аппроксимации для функций $u^{(k)}$, $v^{(k)}$ и $w^{(k)}$ должны выбираться таким образом, чтобы они обеспечивали выполнение условий (5), что представляет собой в общем случае достаточно сложную самостоятельную задачу.

Избежать этой трудности возможно, если сформулировать такой обобщенный функционал, для которого граничные условия (5) будут естественными граничными условиями. В соответствии с методикой, представленной в работе [12], этот обобщенный функционал $\Pi(\vec{u})$ можно представить в виде

$$\Pi(\vec{u}) = I(\vec{u}) + \Delta I, \tag{10}$$

где

$$\Delta I = -\frac{1}{2}\Big[\big(T_1^{(1)}\cos\psi - Q_1^{(1)}\sin\psi + T_1^{(2)}\big)\big(u^{(1)}\cos\psi - w^{(1)}\sin\psi - u^{(2)}\big) +$$
$$+ \big(S^{(1)} + S^{(2)}\big)\big(v^{(1)} - v^{(2)}\big) - \big(M_1^{(1)} + M_1^{(2)}\big)\left(\frac{dw^{(1)}}{ds} - \frac{dw^{(2)}}{ds}\right) +$$
$$+ \big(Q_1^{(1)}\cos\psi + T_1^{(1)}\sin\psi + Q_1^{(2)}\big)\big(u^{(1)}\sin\psi + w^{(1)}\cos\psi - w^{(2)}\big)\Big]_{s=s_0}.$$

Граничные условия (5), (6) и (8) являются естественными граничными условиями для функционала $\Pi(\vec{u})$, так как они автоматически выполняются для функций, доставляющих ему стационарные значения.

Сформулированный обобщенный функционал позволяет проводить независимое варьирование функций $u^{(k)}(s)$, $v^{(k)}(s)$ и $w^{(k)}(s)$ в подобластях $G^{(k)}$ $(k = 1, 2)$. В соответствии с методом Ритца представим искомые функции в виде следующих отрезков обобщённых рядов:

$$
\begin{aligned}
u^{(k)}(s) &= \sum_{j=1}^{N} a_j^{(k)} U_j^{(k)}(s);\\
v^{(k)}(s) &= \sum_{j=1}^{N} b_j^{(k)} V_j^{(k)}(s);\\
w^{(k)}(s) &= \sum_{j=1}^{N} c_j^{(k)} W_j^{(k)}(s).
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Здесь $a_j^{(k)}$, $b_j^{(k)}$ и $c_j^{(k)}$ $(k = 1, 2)$ — произвольные постоянные, подлежащие определению в дальнейшем, $\{U_j^{(k)}(s), V_j^{(k)}(s), W_j^{(k)}(s)\}$ — системы координатных функций, которые определены в подобластях $G^{(k)}$.

При принятых выше условиях закрепления торцов составной оболочки, системы координатных функций, удовлетворяющих главным граничным условиям задачи (7), примут вид:

$$
\begin{aligned}
&U_j^{(1)} = V_j^{(1)} = W_j^{(1)} = P_j(y); \quad y = \frac{2s}{s_0 - s_1} - \frac{s_1 + s_0}{s_0 - s_1},\\
&U_j^{(2)} = V_j^{(2)} = (s_2 - s) P_j(x);\\
&W_j^{(2)} = (s_2 - s)^2 P_j(x); \quad x = \frac{2(s - s_2)}{s_2 - s_0} + 1,
\end{aligned}
\tag{12}
$$

где $P_j(z)$ — смещённые на единицу по индексу j многочлены Лежандра.

Вычисление многочленов Лежандра и их производных можно проводить с помощью известных рекуррентных соотношений. Введённые системы базисных функций являются линейно независимыми и полными системами функций, и они обеспечивают устойчивость вычислительного процесса при большом числе членов N в разложениях (11).

Из условий стационарности обобщённого функционала получаем однородную систему алгебраических уравнений

$$(A - \lambda^2 B)\vec{X}^T = 0, \tag{13}$$

где

$$\vec{X} = \Big\{ a_1^{(1)}, \ldots, a_N^{(1)}, b_1^{(1)}, \ldots, b_N^{(1)}, c_1^{(1)}, \ldots, c_N^{(1)},$$
$$a_1^{(2)}, \ldots, a_N^{(2)}, b_1^{(2)}, \ldots, b_N^{(2)}, c_1^{(2)}, \ldots, c_N^{(2)} \Big\}.$$

Приведём результаты расчётов частот конкретной составной оболочки по предложенному выше алгоритму.

Рассмотрим конструкцию, состоящую из усечённой конической оболочки и соосно сопряжённой с ней цилиндрической оболочкой. Пусть l_2 и R_0 — длина и радиус цилиндрической оболочки, а r_0 и α — радиус срезанного торца и угол полураствора конической оболочки. В качестве характерного линейного размера выберем радиус цилиндрической оболочки R_0. Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$.

Выберем следующие безразмерные геометрические параметры конструкции: $l_2 = 1$; $r_0 = 0.4226$; $\alpha = 30^\circ$ и $R_0/h = 100$.

Расчетные данные для первых шести значений частотного параметра λ_i, $(i = \overline{1,6})$ при различных числах волн n оболочки в окружном направлении представлены в таблице 1, полученные на основании предложенного алгоритма (первая строка) и с использованием уточнённых теорий тонких оболочек (вторая строка [7], третья строка [6]). Напомним, что в работе [7] использована теория Рейсснера – Нагди, тогда как в работе [6] – теория оболочек Флюгге.

В целом наблюдается небольшая разница между результатами, полученными на основании уравнений Рейсснера – Нагди и Флюгге. Уравнения Муштари – Доннелла – Власова дают менее точные результаты в области низших частот. Различие в результатах может быть объяснено различными теориями оболочек и подходами к решению рассматриваемых задач. При расчётах в настоящей работе выбиралось такое количество членов в разложениях (11), которое гарантированно обеспечивает получение четырех значащих цифр в частотах.

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
$n=1$					
.2929	.6359	.8115	.9316	.9522	.9922
.2929	.6358	.8115	.9316	.9522	.9922
.2934	.6368	.8114	.9315	.9521	.9919
$n=2$					
.1023	.5030	.6915	.8592	.9161	.9608
.1000	.5027	.6913	.8591	.9159	.9604
.1000	.5028	.6914	.8590	.9159	.9604
$n=3$					
.0942	.3924	.5154	.7538	.7971	.9198
.0876	.3916	.5145	.7534	.7966	.9196
.0873	.3915	.5144	.7533	.7966	.9194
$n=4$					
.1508	.3322	.3980	.6480	.6936	.8721
.1446	.3304	.3956	.6467	.6928	.8718
.1445	.3304	.3955	.6465	.6927	.8715
$n=5$					
.2039	.2972	.3766	.5821	.6148	.8200
.1995	.2960	.3709	.5798	.6134	.8180
.1995	.2959	.3707	.5796	.6132	.8180

Таблица 1. Значения первых шести частот колебаний оболочки λ_i при различных числах волн n в окружном направлении, рассчитанных по предложенному алгоритму (первая строка) и по уточненным теориям оболочек (вторая строка [7], третья строка [6]).

Предлагаемый подход к решению спектральных задач для сопряжённых оболочек может быть использован с учётом уточнённых теорий тонких оболочек.

[1] *Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Китайгородский А.Б., Шинкарь А.И.* Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. — К.: Наук. думка, 1986. — 172 с.

[2] *Кармишин А.В., Лясковец В.А., Мяченков В.И., Фролов А.Н.* Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. — М.: Машиностроение. — 1975. — 375 с.

[3] *Вольмир А.С., Куранов Б.А., Турбаивский А.Т.* Статика и динамика сложных структур. Прикладные многоуровневые методы исследований — М.: Машиностроение. — 1989. — 247 с.

[4] *Benjeddon A.* Vibrations of complex shells of revolution using B-spline finite elements // Comput. Struct. — 2000. — **74**. — P. 429 – 440.

[5] *Sivadas K.R., Ganesan N.* Free vibration analysis of combined and stiffened shells // Comput. struct. — 1993. — **46**. — P. 537 – 546.

[6] *Caresta M., Kessissoglou N.J.* Free vibrational characteristics of isotropic coupled cylindrical - conical shells // J. Sound and Vibr. — 2010. — **329**. — P. 733 – 751.

[7] *Etraim E., Eisenberger M.* Exact vibration frequencies of segmented axisymmetric shells // Thin-Walled Struct. — 2006. — **44**. — P. 281 – 289.

[8] *Qu Y.G., Chen Y., Long X.H., Hua H.X., Meng G.* A modified variational approach for vibration analysis of ring-stiffened conical-cylindrical shell combinations // European Journal of Mechanics A/Solids. — 2013. — **37**. — P. 200 – 215.

[9] *Wu S., Qu Y., Hua H.* Vibration characteristics of a spherical-cylindrical-spherical shell a domain decomposition method // Mechanics Research Communications. — 2013. — **49**. — P. 17 – 26.

[10] *Qu Y.G., Chen Y., Long X.H., Hua H.X., Meng G.* A variational method for free vibration analysis of joined cylindrical-conical shells // Journal of Vibration and Control. — 2013. — **19(16)**. — P. 2319 – 2334.

[11] *Leissa A.* Vibrations of shells. — Acoustical Society of America. — 1993. — 428 p.

[12] *Trotsenko V.A., Trotsenko Yu.V.* Nonaxisymmetric vibrations of shell of revolution partially filled with liquid // Journal of Mathematical Sciences. — 2017. — **220(3)**. — P. 341 – 358.

[13] *Trotsenko Yu.V.* Determination of the frequencies and modes of natural oscillations of liquids in composed vessels // Journal of Mathematical Sciences. — 2016. — **215(3)**. — P. 395 – 407.