Збірник праць Інституту математики НАН України 2019, т. 16, № 2, 156–166

УДК 531.36;531.01

Про обмеженість руху в еліптичній обмеженій задачі трьох тіл*

С.П. Сосницький

Інститут математики НАН України, Київ; sosn@imath.kiev.ua

Within the framework of the spatial elliptic restricted three-body problem, we find sufficient conditions for the boundedness of motion of an infinitesimally small particle.

У рамках моделі просторової еліптичної обмеженої задачі трьох тіл ми знаходимо достатні умови обмеженості руху нескінченно малої частки.

Вступ

Відомо, що хоча обмежена задача трьох тіл (матеріальних точок) і є доволі спрощеною моделлю руху трьох тіл [1–3], однак і надалі вона зберігає свою актуальність. Особливо це стосується еліптичного випадку обмеженої задачі, що підтверджується важливими практичними застосуваннями [4–7].

Коли обмежена задача колова, то, як показав Якобі, існує перший інтеграл. У цьому випадку Хіллу [3] вдалося довести існування обмежених рухів малої частки за умови (умови Хілла), що стала рівня h інтеграла Якобі негативна і $|h|$ перевищує деяку критичну величину $h^* > 0$. Якщо виконується умова Хілла, то область можливих рухів нескінченно малої частки можна вважати об'єднанням області ω_H обмежених рухів за координатами (області Хілла) й області ω_{nc} обмежених рухів за швидкостями, тобто $\Omega = \omega_H \bigcup \omega_{nc}$, причому $\omega_H \bigcap \omega_{nc} = \emptyset$. Рухи, які належать області Хілла ω_H, зазвичай називають стійкими за Хіллом. Нещодавно автору [13] вдалося довести обмеженість руху і в області ω_{nc}, якщо тільки виконується умова Хілла.

Проте все значно ускладнюється при переході до моделі еліптичної обмеженої задачі трьох тіл, коли два масивні тіла рухаються

*Робота виконана за часткової підтримки НДР № 0117U004077.

по еліптичних орбітах. Інтеграл Якобі за цих умов перестає існувати і постає питання пошуку нових підходів для успішного розв'язання якісних проблем руху. Нижче ми зосередимо увагу на знаходженні умов обмеженості руху у цьому складнішому випадку обмеженої задачі.

1 Рівняння руху для обмеженої задачі трьох тіл

Розглянемо випадок обмеженої задачі трьох тіл, коли вектори $\mathbf{r}_1$ і $\mathbf{r}_2$, як розв'язки задачі двох тіл, можуть відповідати як коловим, так і еліптичним орбітам матеріальних точок з масами m_1 і m_2. Переходячи далі до відносних довжин векторів і розглядаючи рівняння обмеженої задачі як частинний випадок загальної задачі трьох тіл [10], отримуємо

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\rho}_1'' &= \mu\frac{\boldsymbol{\rho}_{12}}{|\boldsymbol{\rho}_{12}|^3},\\
\boldsymbol{\rho}_2'' &= -(1-\mu)\frac{\boldsymbol{\rho}_{12}}{|\boldsymbol{\rho}_{12}|^3},\\
\boldsymbol{\rho}_3'' &= -(1-\mu)\frac{\boldsymbol{\rho}_{13}}{|\boldsymbol{\rho}_{13}|^3} - \mu\frac{\boldsymbol{\rho}_{23}}{|\boldsymbol{\rho}_{23}|^3}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Тут $\boldsymbol{\rho}_{ij} = \boldsymbol{\rho}_j - \boldsymbol{\rho}_i$ $(i, j = 1, 2, 3)$, $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{r}_i / r_0$ (r_0 – сталий параметр, що має розмірність одиниці довжини), штрих означає диференціювання за безрозмірним часом

$$\tau = \frac{\sqrt{G(m_1+m_2)}}{|\mathbf{r}_{12}|_0{}^{3/2}}t,$$

де $G > 0$ – гравітаційна стала, а

$$\mu = \frac{m_2}{m_1+m_2}, \quad 0 < \mu \leq \frac{1}{2}.$$

Системі (1) також можна надати форми

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\rho}_{12}'' &= -\frac{\boldsymbol{\rho}_{12}}{|\boldsymbol{\rho}_{12}|^3},\\
\boldsymbol{\rho}_3'' &= -(1-\mu)\frac{\boldsymbol{\rho}_{13}}{|\boldsymbol{\rho}_{13}|^3} - \mu\frac{\boldsymbol{\rho}_{23}}{|\boldsymbol{\rho}_{23}|^3}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Характерною ознакою систем рівнянь (1) і (2) є те, що вони належать до інерційної системи відліку з початком у центрі мас двох масивних тіл. Зокрема, осі $O\xi$ і $O\eta$ цієї системи зручно помістити у площині руху двох масивних тіл, а вісь $O\zeta$ – перпендикулярно до цієї площини.

Відповідно до вибору системи відліку третє векторне рівняння системи (1) можемо записати у формі

$$\begin{aligned}
\xi'' &= -(1-\mu)\frac{\xi-\xi_1}{\rho_{13}^3} - \mu\frac{\xi-\xi_2}{\rho_{23}^3},\\
\eta'' &= -(1-\mu)\frac{\eta-\eta_1}{\rho_{13}^3} - \mu\frac{\eta-\eta_2}{\rho_{23}^3},\\
\zeta'' &= -(1-\mu)\frac{\zeta}{\rho_{13}^3} - \mu\frac{\zeta}{\rho_{23}^3},
\end{aligned} \tag{3}$$

де

$$\begin{aligned}
\rho_{13}^2 &= (\xi-\xi_1)^2 + (\eta-\eta_1)^2 + \zeta^2,\\
\rho_{23}^2 &= (\xi-\xi_2)^2 + (\eta-\eta_2)^2 + \zeta^2.
\end{aligned} \tag{4}$$

Тут $(\xi_1, \eta_1, 0)$ і $(\xi_2, \eta_2, 0)$ – відповідно координати тіл з масами $(1-\mu)$ і μ, а ξ, η, ζ – координати малої частки.

Надалі поряд із системами рівнянь (1) і (2) використовуватимемо також рівняння руху обмеженої задачі у формі рівнянь відстаней [8]:

$$\begin{aligned}
{\rho_{12}^2}'' &= 2\left(v_{12}^2 - \frac{1}{\rho_{12}}\right),\\
{\rho_{13}^2}'' &= 2v_{13}^2 - 2\frac{(1-\mu)}{\rho_{13}} + \frac{\mu}{\rho_{12}}\left(\frac{\rho_{23}^2-\rho_{13}^2}{\rho_{12}^2} - 1\right) + \frac{\mu}{\rho_{23}}\left(\frac{\rho_{12}^2-\rho_{13}^2}{\rho_{23}^2} - 1\right),\\
{\rho_{23}^2}'' &= 2v_{23}^2 - 2\frac{\mu}{\rho_{23}} + \frac{(1-\mu)}{\rho_{12}}\left(\frac{\rho_{13}^2-\rho_{23}^2}{\rho_{12}^2} - 1\right) + \frac{(1-\mu)}{\rho_{13}}\left(\frac{\rho_{12}^2-\rho_{23}^2}{\rho_{13}^2} - 1\right),\\
{v_{13}^2}' + \frac{{\rho_{13}^2}'}{\rho_{13}^3} &= -\mu\left[\left(\frac{2}{\rho_{13}} - \frac{2}{\rho_{23}}\right)' + 2y\left(\frac{1}{\rho_{12}^3} - \frac{1}{\rho_{23}^3}\right) + \frac{(\rho_{13}^2-\rho_{23}^2)'}{\rho_{12}^3}\right.\\
&\quad\left. -2(1-\mu)\left(\frac{1}{\rho_{12}}\right)' - (1-\mu)\frac{(\rho_{12}^2)'}{\rho_{23}^3}\right],
\end{aligned} \tag{5}$$

$$
{v_{23}^2}' + \frac{{\rho_{23}^2}'}{\rho_{13}^3} = (1-\mu)\left[\left(\frac{2}{\rho_{13}} - \frac{2}{\rho_{23}}\right)' + 2y\left(\frac{1}{\rho_{12}^3} - \frac{1}{\rho_{13}^3}\right) + \frac{(\rho_{13}^2 - \rho_{23}^2)'}{\rho_{12}^3}\right.
$$

$$
\left. +2\mu\left(\frac{1}{\rho_{12}}\right)' + \mu\frac{(\rho_{12}^2)'}{\rho_{13}^3}\right],
$$

$$
y' = -\frac{x}{\rho_{12}^3} + \frac{1}{2}\left[-(1-2\mu)v_{12}^2 + (v_{23}^2 - v_{13}^2)\right],
$$

де $\rho_{ij} = |\boldsymbol{\rho}_{ij}|, \quad v_{ij} = |\boldsymbol{\rho}'_{ij}|$.

Рівняння у формі (5) дещо відрізняються від тих, що наведені у роботі [8], оскільки ми скористалися раніше отриманими рівностями [8,9]:

$$
x = -\boldsymbol{\rho}_3\boldsymbol{\rho}_{12}, \quad y = -\boldsymbol{\rho}_3\boldsymbol{\rho}'_{12}, \tag{6}
$$

$$
\boldsymbol{\rho}_{23}\boldsymbol{\rho}'_{13} = -y + \frac{1}{2}{\boldsymbol{\rho}_{23}^2}' - \frac{1-\mu}{2}{\boldsymbol{\rho}_{12}^2}', \quad \boldsymbol{\rho}_{13}\boldsymbol{\rho}'_{23} = y + \frac{1}{2}{\boldsymbol{\rho}_{13}^2}' - \frac{\mu}{2}{\boldsymbol{\rho}_{12}^2}', \tag{7}
$$

$$
\boldsymbol{\rho}_{12}\boldsymbol{\rho}_3 = \frac{1}{2}\left[(1-2\mu)\boldsymbol{\rho}_{12}^2 + \boldsymbol{\rho}_{13}^2 - \boldsymbol{\rho}_{23}^2\right], \tag{8}
$$

що дало змогу останні три рівняння, наведені у [8], переписати у новій формі.

У системі (5), як і системах (1) і (2), штрих означає диференціювання за безрозмірним часом τ. Хоч система рівнянь (5), аналогічно до випадку колової обмеженої задачі [11], є системою з надлишковими координатами, це не створює однак проблем при дослідженні руху малої частки, оскільки нижче йтиметься про обмежені рухи. Система рівнянь (5), як і системи (1) і (2), належить до інерційної системи відліку з початком у центрі мас двох масивних тіл.

У подальшому залежно від обставин використовуватимемо будь-яку з систем (1),(2),(5).

Поряд із інерційною системою координат розглянемо допоміжну рухому систему координат з початком у центрі мас пари $(1-\mu, \mu)$, дві осі Ox, Oy якої зорієнтуємо вздовж напрямів векторів $-\boldsymbol{\rho}_{12}$ і $-\boldsymbol{\rho}'_{12}$, що належать площині обертання масивних тіл. Третю вісь Oz виберемо перпендикулярною до цієї площини, і, таким чином, осі $O\zeta$ і Oz збігаються.

Розглянемо рівності (6), у яких величини $\boldsymbol{\rho}_{12}$ і $\boldsymbol{\rho}_3$, що входять у їхні праві частини, є розв'язками системи (2). Як було показано в роботі [8], змінні x і y можемо розглядати як проекції у деякому узагальненому сенсі вектора $\boldsymbol{\rho}_3$ на пару осей Ox і Oy рухомої системи відліку, яку ми обрали.

Диференціюючи рівності (6), приходимо до пари рівнянь

$$\begin{aligned} x' &= y - \boldsymbol{\rho}_{12}\boldsymbol{\rho}'_3, \\ y' &= -\frac{x}{\rho_{12}^3} - \boldsymbol{\rho}'_{12}\boldsymbol{\rho}'_3. \end{aligned} \tag{9}$$

Диференціюючи перше рівняння цієї пари, отримуємо

$$x'' = y' - \boldsymbol{\rho}'_{12}\boldsymbol{\rho}'_3 - \boldsymbol{\rho}_{12}\boldsymbol{\rho}''_3 = 2y' + \frac{x}{\rho_{12}^3} - \boldsymbol{\rho}_{12}\boldsymbol{\rho}''_3. \tag{10}$$

Далі рівняння (10) зручно переписати у формі

$$x'' - y' = y' + \frac{x}{\rho_{12}^3} - \boldsymbol{\rho}_{12}\boldsymbol{\rho}''_3. \tag{11}$$

Пара рівнянь (9) і рівняння (11) нам знадобляться в подальшому.

2 Твердження про обмеженість руху

Надалі, скориставшись рівностями, отриманими в [9], маємо

$$v_3^2 = -\mu(1-\mu)v_{12}^2 + (1-\mu)v_{13}^2 + \mu v_{23}^2. \tag{12}$$

$$-2\boldsymbol{\rho}'_{12}\boldsymbol{\rho}'_3 = -(1-2\mu)v_{12}^2 + (v_{23}^2 - v_{13}^2). \tag{13}$$

Інтеграл енергії для задачі двох тіл, який нам знадобиться нижче, запишемо як

$$\mu(1-\mu)\left(\boldsymbol{\rho}'^2_{12} - \frac{2}{\rho_{12}}\right) = 2h = \text{const}. \tag{14}$$

Далі зобразимо його у формі

$$\left(\rho'^2_{12} + \frac{|\boldsymbol{\rho}_{12} \times \boldsymbol{\rho}'_{12}|^2}{\rho_{12}^2}\right) - \frac{2}{\rho_{12}} = \frac{2h}{\mu(1-\mu)}, \tag{15}$$

а оскільки

$$|\boldsymbol{\rho}_{12} \times \boldsymbol{\rho}'_{12}|^2 = c^2, \quad c = \text{const}, \tag{16}$$

то на підставі (15) маємо

$$\left(\rho_{12}'^2 + \frac{c^2}{\rho_{12}^2}\right) - \frac{2}{\rho_{12}} = \frac{2h}{\mu(1-\mu)}. \tag{17}$$

Лема 1. *Якщо в обмеженій еліптичній задачі трьох тіл рух системи, який визначається рівняннями (1), задовольняє умову дистальності:*

$$\rho_{i3}(\tau) \geq c \quad \forall \tau \in R =]-\infty, \infty[, \quad \forall i = 1, 2; \quad 0 < c = const, \tag{18}$$

то він обмежений стосовно координат x і y, що визначаються рівностями (6).

Доведення таке ж саме, як і у випадку теорем 1 і 2 в роботі [8], що випливає з самого визначення проекції вектора на напрям.

Наслідком леми 1 є обмеженість руху малої частки щодо координат ξ і η в інерційній системі відліку.

Лема 2. *Мають місце рівності*

$$v_{12}^2 = \frac{1}{1-2\mu}\left\{-\mu c^2\left(\frac{1}{\rho_{12}} - \frac{1-\mu}{\mu c^2}\right)^2 - \mu\rho_{12}'^2 + \frac{1}{\mu c^2}\left[(1-\mu)^2 + 2hc^2\right]\right\}, \tag{19}$$

$$v_{23}^2 - v_{13}^2 = -\mu c^2\left(\frac{1}{\rho_{12}} - \frac{1-\mu}{\mu c^2}\right)^2 - \mu\rho_{12}'^2 + \frac{1}{\mu c^2}\left[(1-\mu)^2 + 2hc^2\right] - 2\boldsymbol{\rho}_{12}'\boldsymbol{\rho}_3'. \tag{20}$$

Доведення. Відповідно до рівності (12) маємо

$$\mu(1-\mu)v_{12}^2 = -v_3^2 + v_{13}^2 + \mu(v_{23}^2 - v_{13}^2). \tag{21}$$

Підставляючи значення $\mu(1-\mu)v_{12}^2$, що визначається рівністю (21), у вираз інтеграла енергії (14) задачі двох тіл, отримуємо рівність

$$-v_3^2 + v_{13}^2 + \mu(v_{23}^2 - v_{13}^2) - \frac{2(1-\mu)\mu}{\rho_{12}} = 2h, \tag{22}$$

яку з урахуванням рівності (24) з роботи автора [9] переписуємо у вигляді

$$2\mu\boldsymbol{\rho}_{12}'\boldsymbol{\rho}_3' + \mu^2 v_{12}^2 + \mu(v_{23}^2 - v_{13}^2) - \frac{2(1-\mu)\mu}{\rho_{12}} = 2h. \tag{23}$$

Зауважуючи, що

$$v_{12}^2 = \rho_{12}'^2 + \frac{c^2}{\rho_{12}^2}, \tag{24}$$

рівність (23) представимо у формі

$$\frac{1}{\rho_{12}^2} - \frac{2(1-\mu)}{c^2\mu}\frac{1}{\rho_{12}} = \frac{1}{\mu^2 c^2}\left[2h - \mu^2\rho_{12}'^2 - 2\mu\boldsymbol{\rho}_{12}'\boldsymbol{\rho}_3' - \mu(v_{23}^2 - v_{13}^2)\right]. \tag{25}$$

Далі, переписуючи її як

$$\left(\frac{1}{\rho_{12}} - \frac{(1-\mu)}{c^2\mu}\right)^2 = \frac{(1-\mu)^2}{c^4\mu^2} +$$

$$+\frac{1}{c^2\mu^2}\left[2h - \mu^2\rho_{12}'^2 - 2\mu\boldsymbol{\rho}_{12}'\boldsymbol{\rho}_3' - \mu(v_{23}^2 - v_{13}^2)\right] \tag{26}$$

і визначаючи з неї різницю $v_{23}^2 - v_{13}^2$, приходимо до рівності (20). Підставляючи далі значення різниці $v_{23}^2 - v_{13}^2$, що визначається рівністю (26), у рівність (13), отримуємо (19). □

Якщо зауважити, що [2]:

$$\frac{1}{\rho_{12}} = \frac{1}{c^2}(1 + e\cos f), \tag{27}$$

$$\rho_{12}'^2 = \frac{e^2}{c^2}\sin^2 f, \tag{28}$$

де e – ексцентриситет еліптичної орбіти, що відповідає задачі двох тіл, у рамках якої рухаються масивні тіла, f – істинна аномалія, то для v_{12}^2 можна отримати уже відомий вираз

$$v_{12}^2 = \frac{1}{c^2}\left[1 + e^2 + 2e\cos f\right]. \tag{29}$$

Твердження 1. *Нехай у просторовій обмеженій еліптичній задачі трьох тіл рух $\boldsymbol{\rho}(\tau) = (\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}_3)^T$ малої частки, що визначається рівняннями (1), дистальний. Тоді, якщо виконується нерівність*

$$\rho_{23}^2 - \rho_{13}^2 \le 0, \tag{30}$$

то він обмежений.

Доведення. Переписавши друге рівняння системи (9) у формі

$$2y' = \frac{(1-2\mu)}{\rho_{12}} - \frac{(\rho_{23}^2 - \rho_{13}^2)}{\rho_{12}^3} - (1-2\mu)v_{12}^2 + (v_{23}^2 - v_{13}^2), \tag{31}$$

додамо до нього перше рівняння системи (5), помножене на $(1-2\mu)/2$. У результаті отримаємо

$$2y' + \frac{1}{2}(1-2\mu){\rho_{12}^2}'' = -\frac{(\rho_{23}^2 - \rho_{13}^2)}{\rho_{12}^3} + (v_{23}^2 - v_{13}^2). \tag{32}$$

Оскільки згідно з [9] справедливі рівності

$$v_{13}^2 = -2\mu\left(y' + \frac{x}{\rho_{12}^3}\right) + \mu^2 v_{12}^2 + v_3^2, \tag{33}$$

$$v_{23}^2 = 2(1-\mu)\left(y' + \frac{x}{\rho_{12}^3}\right) + (1-\mu)^2 v_{12}^2 + v_3^2, \tag{34}$$

то (32) можемо переписати у вигляді

$$2y' + \frac{1}{2}(1-2\mu){\rho_{12}^2}'' = -\frac{(\rho_{23}^2 - \rho_{13}^2)}{\rho_{12}^3} + \left[2\left(y' + \frac{x}{\rho_{12}^3}\right) + (1-2\mu)v_{12}^2\right]. \tag{35}$$

Беручи до уваги рівняння (11), на підставі (35) отримуємо

$$4y' + \frac{1}{2}(1-2\mu){\rho_{12}^2}'' - 2x'' = -\frac{(\rho_{23}^2 - \rho_{13}^2)}{\rho_{12}^3} + (1-2\mu)v_{12}^2 -$$
$$-2\boldsymbol{\rho}_{12}\left[(1-\mu)\frac{\boldsymbol{\rho}_{13}}{|\boldsymbol{\rho}_{13}|^3} + \mu\frac{\boldsymbol{\rho}_{23}}{|\boldsymbol{\rho}_{23}|^3}\right]. \tag{36}$$

Провівши всі необхідні перетворення, перейдемо тепер безпосередньо до доведення обмеженості руху за умов виконання нерівності (30). Отже, виходячи з того, що згідно з лемою 1 рух малої частки обмежений за координатами x і y, потрібно довести його обмеженість у просторовому випадку, тобто за координатою z. Припустимо супротивне, а саме, що координата z необмежена. Тоді, враховуючи рівності (4), доходимо висновку, що необмеженими є обидві відстані ρ_{13} і ρ_{23}, тобто існує така послідовність $\{\tau_k\}$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$, що

$$\lim_{k\to\infty} \tau_k = \infty, \quad \lim_{k\to\infty} \rho_{13}(\tau_k) = \infty, \quad \lim_{k\to\infty} \rho_{23}(\tau_k) = \infty. \tag{37}$$

На підставі неперервності правої частини рівняння (36), беручи до уваги дистальність руху й обмеженість відстані ρ_{12}, можемо стверджувати, що в послідовності $\{\tau_k\}$ існує такий достатньо великий номер s, що при $k \geq s$ справедлива нерівність

$$\left[4y' + \frac{1}{2}(1-2\mu){\rho_{12}^2}'' - 2x''\right]\Big|_{\tau\in\{\tau_k\}} \geq \delta, \quad \forall k \geq s, \quad 0 < \delta = \text{const}. \tag{38}$$

Відповідно до умов твердження 1 розглядуваний рух є дистальним, що зумовлює обмеженість швидкості малої частки. Це дає нам підстави прийти до висновку, що існує послідовність проміжків часу зростаючої довжини

$$\{T_j\} = [\tau_{s+j} - \tau_{n_j}], \quad \tau_{s+j} \in \{\tau_k\}, \quad j = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$\tau_{n_j} < \tau_{s+j}, \quad n_1 < n_2 < n_3 \ldots,$$

на яких виконується нерівність

$$\left[4y' + \frac{1}{2}(1-2\mu){\rho_{12}^2}'' - 2x''\right] \geq \delta, \quad \forall \tau \in \{T_j\}. \tag{39}$$

Далі істотно зауважити, що ліва частина нерівності (39) є похідною від обмеженої функції, а тому для завершення доведення твердження 1 достатньо скористатися схемою, якою ми вже користувалися у роботах [12], [8], [13]. З цього приводу лише зазначимо, що в основі існування послідовності проміжків часу $\{T_j\}$ лежить той факт, що в умовах твердження 1 розв'язок системи (1) є продовжуваним, тобто мала частка не може досягти нескінченності за скінченний проміжок часу. Таким чином, якщо припустити нескінченне зростання відстані, яку проходить мала частка, то їй неодмінно відповідатиме і нескінченно зростаючий час, необхідний для проходження цієї відстані, оскільки швидкість малої частки обмежена. Саме обмеженість швидкості малої частки дає нам можливість від нерівності (38), справедливої для послідовності точок, перейти до нерівності (39), яка виконується для послідовності відрізків часу, довжина яких зростає.

Твердження 2. *Нехай у просторовій обмеженій еліптичній задачі трьох тіл рух $\boldsymbol{\rho}(\tau) = (\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}_3)^T$ малої частки, що визначається рівняннями (1), дистальний. Тоді, якщо змінна x задовольняє нерівність*

$$|x| \geq c^* > 0, \quad c^* = const, \tag{40}$$

то розглядуваний рух обмежений.

Доведення. Розглянемо рівняння (10), яке перепишемо у формі

$$x'' - 2y' = \frac{x}{\rho_{12}^3} + \boldsymbol{\rho}_{12}\left[(1-\mu)\frac{\boldsymbol{\rho}_{13}}{|\boldsymbol{\rho}_{13}|^3} + \mu\frac{\boldsymbol{\rho}_{23}}{|\boldsymbol{\rho}_{23}|^3}\right]. \qquad (41)$$

Припустимо супротивне, що розглядуваний просторовий рух необмежений. Тоді виконуються рівності (37) і залежно від того, який знак має змінна x, отримаємо нерівності, які за своїм змістом аналогічні тим, які ми отримували при доведенні твердження 1. Зокрема,

$$(x'' - 2y') \leq -\delta_1, \quad \forall\tau \in \{T_j\}, \quad 0 < \delta_1 = \mathrm{const}, \qquad (42)$$

якщо x від'ємне, і

$$(x'' - 2y') \geq \delta_2, \quad \forall\tau \in \{T_j\}, \quad 0 < \delta_2 = \mathrm{const}, \qquad (43)$$

якщо x додатне. А далі, беручи до уваги той факт, що ліва частина нерівностей (42) і (43) є похідною від обмеженої функції, діємо відповідно до схеми доведення твердження 1. □

У межах Сонячної системи не становить труднощів привести приклади такого вибору системи трьох небесних тіл, що цю систему можна інтерпретувати як обмежену еліптичну задачу. Зокрема, якщо в ролі масивних тіл розглядати Сонце і Землю, то система Сонце, Земля і Місяць задовольняє твердження 1. Сонце і будь-яка планета Сонячної системи зі своїм супутником задовольняють твердження 2. У цьому сенсі отримані твердження 1 і 2 становлять принаймні певний інтерес, якщо небесні об'єкти є спостережуваними.

[1] *Себехей В.* Теория орбит. Ограниченная задача трех тел.— М.: Наука, 1982.— 656 с.

[2] *Рой А.Е.* Движение по орбитам.— М.: Наука, 1981.— 544 с.

[3] *Hill G.W.* Researches in the Lunar Theory // Am. J. Math. — 1878. — **1**. — P. 5–26.

[4] *Georgakarakos N.* Stability criteria for hierarchical triple systems // Celestial Mech. Dyn. Astron. — 2008. — **100**. — P. 151–168.

[5] *Makó Z. and Szenkovits F.* Capture in the circular and elliptic restricted three-body problem // Celestial Mech. Dyn. Astron. — 2014. — **90**. — P. 51–58.

[6] Qi Y., Xu S.J. Lunar capture in the planar restricted three-body problem // Celestial Mech. Dyn. Astron. — 2014. — **120**. — P. 401–422.

[7] *Gong S. and Li J.* Analytical criteria of Hill stability in the elliptic restricted three-body problem // Astrophys. Space Sci. — 2015. — **358**,(37). — P. 1–10.

[8] *Sosnitskii S.P.* On the Lagrange stability of motion in the planar restricted three-body problem // Adv. Space Res. — 2017. — **59**. — P. 2459–2465.

[9] *Сосницький С.П.* Про деякі якісні аспекти руху в еліптичній обмеженій задачі трьох тіл // Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики. — Зб. праць Ін-ту матем. НАН України, Київ.— 2017. — **14**, № 2. — С. 150–162.

[10] *Sosnitskii S.P.* On the orbital stability of triangular Lagrangian motions in the three-body problem // Astron. J. — 2008. — **136**. — P. 2533–2540.

[11] *Sosnitskii S.P.* On the stability of triangular Lagrangian points in the restricted three-body problem // Astron. J. — 2008. — **135**. — P. 187–195.

[12] *Сосницький С.П.* Про стійкість руху за Лагранжем в обмеженій задачі трьох тіл // Аналітична механіка та її застосування. — Зб. праць Ін-ту матем. НАН України, Київ.— 2014. — **11**, № 5. — С. 221–230.

[13] *Sosnitskii S.P.* On the boundedness of motion in the spatial circular restricted three-body problem // Intern. J. Non-Linear Mech. — 2018. — **104**. — P. 116–120.