

УДК 51.091

М. В. Працьовитий

*НПУ імені М. П. Драгоманова, Інститут математики НАН
України, Київ; prats444@gmail.com*

Всесвітньо відомий математик Г. Ф. Вороной — видатний наш співвітчизник

The biography, professional activity, scientific and pedagogical heritage of the world-renowned mathematician of Ukrainian origin Georgy Voronoi and influence of his ideas on the development of several areas in modern science (analytic number theory, geometry of numbers, study of divergent series, spatial tessellations) are covered in the article. The chronology and content of international scientific conferences devoted to the scientist which were held in Kyiv are briefly displayed. The list of conferences proceedings is given.

Key words: Georgy Voronoi, Voronoi diagrams, geometry of numbers, Voronoi method of summation of divergent series, international conferences devoted to G. Voronoi, Voronoi's scientific and pedagogical heritage.

Висвітлюються біографічні дані, професійна діяльність, науковий і педагогічний доробок всесвітньо відомого математика українського походження Георгія Феодосійовича Вороного. Вплив його ідей на розвиток кількох напрямів у сучасній науці (аналітичній теорії чисел, геометрії чисел, дослідженні розбіжних рядів, просторових мозаїках). Коротко відображено хронологію і зміст міжнародних наукових конференцій, присвячених вченому, які відбувалися в Києві. Наведено список праць конференцій.

Ключові слова: Г. Ф. Вороной, діаграми Вороного, геометрія чисел, метод Вороного підсумовування розбіжних рядів, міжнародні конференції, присвячені Вороному, наукова й педагогічна спадщина Вороного.

1. Вступ

Щедра українська земля подарувала світові чимало природних талантів, видатних науковців, геніальних дослідників. Серед них окреме місце посідає всесвітньо відомий математик українського походження, один із найяскравіших представників Петербурзької математичної школи й носій найкращих її традицій, учень знаменитого А. А. Маркова, член-кореспондент Петербурзької АН (із 1907 р.), член Петербурзького та Московського математичних товариств Георгій Феодосійович Вороной — геніальний дослідник у області геометрії чисел, аналітичної теорії чисел і арифметичної теорії квадратичних форм. Остання вивчає квадратичні форми за умови, що незалежні змінні набувають тільки цілочисельних значень. 28 квітня 2018 року виповнюється 150 років від дня народження цього вченого, який прожив лише 40 років, устиг опублікувати 12 робіт, за своє коротке життя не встиг створити наукової школи, мав одного «справжнього» наукового учня, а в серці завжди носив Україну. Уже після смерті він здобув світове визнання, багато послідовників і продовжувачів, а ним отримані наукові результати знайшли численні застосування і подальший розвиток в різних галузях математики. Останні 15 років свого життя вчений плідно працював в двох галузях: у арифметичній теорії квадратичних форм і в аналітичній теорії чисел.

«Безперечно, після Лобачевського й Чебишова одним із найвизначніших наших математиків був Вороной.» [10, С. 39]

«Георгій Феодосєвич Вороной — один из самых ярких индивидуальностей в истории отечественной математики... Его имя навсегда вошло в нашу отечественную математику, как имя выдающегося творца и создателя новых направлений в теории чисел» [20, С. 550].

Особистість Вороного, його життя і творчість, успіхи і трагізм долі варто сприймати крізь призму часу, ті складні соціально-політичні умови життя суспільства, що склали буденність гро-

мадянина, сім'янина, педагога, вченого.

Життя і творчість Г. Ф. Вороного достатньо повно висвітлені в роботах [2, 7, 8, 18, 19], його щоденниках і рукописах й суттєво доповнені новими коментарями і популярним викладом частини його ідей, методів, результатів у роботі [21]. Ми в основному спирались на ці джерела.

2. Біографічні дані та професійна діяльність

Георгій Вороний народився 28 квітня (16 квітня за старим стилем) 1868 р. в с. Журавка Полтавської губернії (нині Варвинський р-н Чернігівської обл.) в родині Феодосія Яковича Вороного, випускника Київського університету Святого Володимира. Феодосій Вороний відомий своєю просвітницькою діяльністю: він ініціатор створення в Києві безоплатних недільних шкіл для робітничої молоді й активний організатор їхньої роботи, професор філології Ніжинського ліцею князя Безбородька, директор Кишинівської (з 1872 р.), Бердянської (серпень 1875 р. – липень 1881 р.), Прилуцької (1882 – 1887 р.) гімназій. Мати Георгія, Клеопатра Михайлівна Личкова — спадкова почесна громадянка Києва, викладала у Київській жіночій гімназії на Подолі й у Подольській жіночій недільній школі.

Середню освіту юний Георгій здобував у Бердянській (до 5-го класу) і Прилуцькій гімназіях. Останню він закінчив 1885 року. Ще у шкільні роки виявив значний інтерес і здібності до математики. Про це свідчить характеристика:

«... Уроки відвідував справно. Завдання завжди виконував акуратно та ретельно. Письмові роботи виконував старанно та серйозно, але через притаману йому квапливість вони часто мали недоліки, особливо у відношенні зовнішнього вигляду. До того, що викладалося в класі, ставився з активною участю, але іноді бував неуважним... При відмінних здібностях має, незва-

жаючи на свій молодий вік, доволі розвинений розум і серйозну любов до навчання. З усіх предметів гімназичного курсу отримав знання дуже хороші, а з математики, до якої має особливу схильність і покликання, отримав знання, що далеко виходять з ряду учнівських успіхів з математики.»

Інтерес до математики і вмотивованість до занять нею напевно мали такі складові: природні здібності, інтерес до наукової творчості, пошук сфери самопрояву особистості і позитивний вплив улюбленого вчителя, викладача математики Прилуцької гімназії Івана Володимировича Богословського, якого Георгій з вдячністю згадує у своєму щоденнику студентських років.

Ще будучи гімназистом, Г. Вороний підготував роботу «Розкладання многочленів на множники на основі властивостей коренів квадратного рівняння». Цю тему для самостійного твору методичного характеру запропоновано у першому томі «Журналу елементарної математики», який з ініціативи професора Київського університету В. П. Єрмакова (1845–1922) розпочав видаватись 1884 року для зацікавлених математикою читачів: школярів, студентів, вчителів. У 1885 році стаття Вороного в дещо відредагованому вигляді і доповнена прикладами, як сказано в редакційній передмові, була опублікована у другому томі журналу (з цією статтею можна ознайомитись у роботі [7]). Проведене дослідження і публікація роботи в науково-популярному журналі, безсумнівно, вплинули на вибір життєвого шляху гімназиста.

Закінчивши Прилуцьку гімназію, Вороний з 1885 по 1889 р. навчався у Петербурзькому університеті.

Петербурзький університет на той час — один із найстаріших і найбільших навчальних закладів Російської імперії, який від середини XIX сторіччя стає найпотужнішим науковим центром країни. В університеті велика увага приділяється підготовці молодих науковців, на початку 80-тих років XIX сторіччя на фізико-математичному факультеті організовується студентський математичний гурток, роботою якого керує Андрій Андрійович Марков (1856–1922). Гурток упродовж 1884–1885 рр. випустив

два томи «Записок Физико-математического общества студентов Петербургского университета», в яких було опубліковано 11 наукових робіт студентів. Серед них і перші роботи Д. О. Граве (1863–1939) «Об идеальной форме оптического стекла без сферической аберрации», «Об интегрировании одного класса совокупных дифференциальных уравнений» і «О поверхностях мініма». Дмитро Олександрович упродовж 1897–1899 років працював у Харківському університеті, з 1899 року по 1939 р. — у Київському університеті, був засновником першої в Україні алгебраїчної школи, з 1919 року — Академік АН УРСР, із 1929 — почесний член АН СРСР.

2.1. Студентські роки

У серпні 1885 року сімнадцятирічний Георгій Вороний прибув до Петербурга з рекомендаційним листом і зверненням до ректора з проханням прийняти його на навчання за казенний кошт від Григорія Павловича Галагана (Г.П. Галаган — відомий український меценат і політичний діяч, засновник і утримувач приватного закладу — Колегії Павла Галана у Києві, знайомий Георгієвого батька).

З цього часу Георгій веде свій щоденник (сьогодні він зберігається в Інституті рукопису Національної бібліотеки України імені В.І. Вернадського, його фрагменти опубліковані в роботі [7]). У ньому описано й першу зустріч із ректором, і розмову з ним. Цитуючи ректора, він пише:

«— Ви, звичайно, поступаєте на свій кошт?

Я відповів, що не проти того, щоб і на казенний поступити. Тоді він мені сказав:

— Ви, звичайно, будете відмінно вчитись, обживетесь в Колегії, тоді ми Вас і зробимо стипендіатом.»

Реальність виявилася суворішою, стипендію Вороний отримав лише на останньому четвертому курсі. Непросте матеріальне становище (коштів, що надсилав батько, не вистачало, в 1887 ро-

ці батька відправили у відставку) змушувало шукати заробітки. В основному це були приватні уроки. Читаємо запис у щоденнику: «Вчера я получил урок через одного из товарищей. Урок крайне невыгодный: 15 р. в месяц, каждый день заниматься по часу. Так как это от меня очень далеко, то мне приходится затрачивать более двух часов. Я уже решил, что, если только подвернется какая-либо другая мало-мальски сносная работа, немедленно откажусь от урока.»

Мрія жити в окремій кімнаті в колегії (це гуртожиток для студентів університету) також виявилася нездійсненною, тому довелося жити удвох.

На третьому курсі Вороний починає серйозно захоплюватись математикою. «Лекції з чистої математики мене все більше і більше захоплюють. Лекціям проф. С. зі спеціального курсу вищої алгебри я тепер віддаю перевагу перед іншими. Тепер у мене є справжнє бажання працювати...», — пише він.

Спроби розв'язати проблему психологічного змісту: «Главное что меня занимает: есть ли у меня достаточно способностей... Она (математика) поглощает всё моё внимание и гнетущий вопрос, быть ли мне профессором или не быть», — змушують студента перевіряти свої здібності в самостійних дослідженнях. З власної ініціативи він пробує обчислювати залежність між коефіцієнтами рівняння

$$x^m + p_1x^{m-1} + p_2x^{m-2} + \dots + p_m = 0$$

і симетричною функцією його коренів:

$$\sum x_1^2 x_2^2 \dots x_\mu x_{\mu+1} \dots x_{\mu+\nu}; \quad \sum x_1^3 x_2^3 \dots x_\mu^3 x_{\mu+1}^2 \dots x_{\mu+\nu} x_{\mu+\nu+1} \dots x_{\mu+\nu+\omega}.$$

Успіх на цьому шляху додав сил та впевненості в собі. І вони значно зміцніли після того, як Вороному вдалось самостійно, без застосування комплексних чисел, обчислити інтеграли

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos \nu x^2 dx, \quad \int_0^\infty e^{-x^2} \sin \nu x^2 dx$$

при довільному дійсному ν і проінтегрувати диференціальне рівняння:

$$\left[\frac{p(x^2 + y^2)}{2} - rx + qy + s \right] y'' + [py + q - (px - r)y'](1 + y'^2) = 0,$$

де p , q , r і s — сталі величини, які запропонував професор А. А. Марков студентам.

Ці здобутки переконали Георгія в тому, що математичні здібності у нього не відсутні, і він сміливо починає цікавитись різними математичними об'єктами, але основною областю інтересів обирає теорію чисел.

На той час у Петербурзькому університеті плідно вели наукову діяльність П. Л. Чебишов, А. А. Марков, Є. І. Золотарьов та інші. Сформувалася потужна Петербурзька школа теорії чисел [9]. Науковим наставником Вороного стає Марков, у гуртку якого він дебютував у грудні 1888 року з власним повідомленням «Нове доведення властивостей чисел Бернуллі». Вороному вдалося довести дві гіпотези Адамса (одну з них він сформулював без доведення, а доведення другої знайти не зміг):

1) якщо $B_k = \frac{P_k}{Q_k}$ — число Бернуллі (дріб нескоротний), причому k — просте, то чисельник P_k ділиться на k ;

2) якщо p — такий простий дільник n , який не є множником знаменника n -го числа Бернуллі $B_n = \frac{P_n}{Q_n}$, то чисельник P_n цього числа ділиться на p .

Вороний довів узагальнену теорему Адамса: «Якщо $B_m = \frac{P_m}{Q_m}$ — число Бернуллі, причому m ділиться на $k = p_1^\alpha p_2^\beta \dots p_l^\lambda$, де p_1, p_2, \dots, p_l — прості числа, то чисельник P_m ділиться на число k » [8].

У щоденнику Вороного за 26 грудня 1888 року ми знаходимо запис: «вчера я закончил предпринятое мною доказательство Адамса, который о последней теореме сказал, что он не может её доказать, но что он не сомневается в её истинности. Я доказал её вполне строго, так что раньше намеченное является частным случаем, но мне пришлось прибавить одну лемму...». Під час доведення останньої теореми Вороний паралельно отримує

доведення теореми Штаудта. І в нього з'являється нова гіпотеза: «Ночью обдумал еще раз написаное выше и убедился, что ... вообще можно высказать такую теорему

$$(-1)^{k-1} p P_k = Q_k S_{2k}(p) \pmod{p^2},$$

P_k и Q_k — числители и знаменатели чисел Бернуллі,

$$S_{2k}(p) = 1^{2k} + 2^{2k} + \dots + p^{2k} \gg$$

(ця теорема доведена в роботі [22]).

Отримавши позитивні відгуки, Георгій визначився зі своїми науковими вподобаннями. Восени 1889 року він блискуче склав випускні екзамени і захистив кандидатську роботу, що стосувалася чисел Бернуллі. У листопаді 1889 року його залишили при університеті для підготовки до магістерських екзаменів за рекомендацією, яку підписали всі провідні професори-математики: А. А. Марков, М. А. Коркін, Ю. В. Сохоцький, К. А. Поссе. Водночас було задоволено прохання факультету про призначення Вороному стипендії, й в цей самий час він був зарахований позаштатним вчителем у Петергофській прогімназії.

З цього часу Вороний цікавиться теорією алгебраїчних чисел, точніше — теорією ірраціональностей третього степеня. В цій галузі до цього успішно працювали Ейлер і Гаусс, Кумер і Діріхле, Дедекінд і Є. І. Золотарьов. Саме останній, кого вважають творцем теорії подільності цілих алгебраїчних чисел, збудив інтерес Петербурзької математичної школи до цього напряму досліджень, в тому і у Вороного. Кубічним полям була присвячена магістерська дисертація Вороного. Після захисту магістерської дисертації «Про цілі алгебраїчні числа, що залежать від кореня рівняння 3-го степеня», який відбувся 26 квітня 1894 року (по якій опонентами були А. А. Марков і Ю. В. Сохоцький), Вороний першого травня цього ж року був призначений викладачем (виконувачем обов'язків доцента), а потім (у червні) професором Варшавського університету по кафедрі чистої математики, де він працював майже все своє життя.

У магістерській дисертації Вороний знайшов загальний вигляд цілих алгебраїчних чисел кубічної області, на основі якого отримав розклад на прості ідеальні множники всіх простих раціональних чисел і запропонував метод для розкладу на прості ідеальні множники всіх цілих чисел області. Більше того, він навів таблицю ідеалів, що відповідають однорідним ідеальним числам, і довів теорему, яка дозволяє з допомогою цієї таблиці знаходити всі ідеали, які відповідають ідеальному числу.

У 1895–1896 роках Вороний займався підготовкою докторської дисертації, отримавши фундаментальні результати в роботі алгоритмів відшукання основних одиниць поля, числа класів ідеалів, способів розкладу одиниць. Улітку 1896 року монографія «Про одне узагальнення алгоритму неперервних дробів» об'ємом 200 сторінок за рішенням Варшавського університету була опублікована. Вороний представив цю монографію в Петербурзькому університеті. 20 травня 1897 року докторська дисертація була блискуче захищена і Вороному Петербурзьким університетом присвоєно ступінь доктора чистої математики.

Його офіційними опонентами були призначені А. А. Марков і Ю. В. Сохоцький. Відгук, написаний рукою Маркова з припискою: «С вышеизложенным отзывом профессора А. А. Маркова вполне согласен. Ю. Сохоцкий.» Із цілісним фрагментом відгуку можна ознайомитись у роботі [19, С. 535–536]

«По сложности разрешенной проблемы и глубине примененных методов она явилась одним из самых блестящих достижений отечественной математики: увенчала успехом изыскания примерно столетней продолжительности» [19, С. 535].

У теорії алгебраїчних чисел, точніше — в теорії ірраціональностей третього степеня, Вороному вдалось отримати фундаментальні результати, які склали основу двох його дисертацій — магістерської й докторської, захищеної 1896 року. Обидві дисертаційні роботи Вороного 1896 року Петербурзька академія наук відзначила премією імені В. Я. Буняковського.

Першою опублікованою після захисту докторської дисертації

була робота «Sur un problème du calcul des fonctions asymptotiques», у якій автор за допомогою перетворення сум

$$\sum_{n>0}^{n \leq x} \left[\frac{x}{n} \right],$$

виводить таку рівність:

$$\sum_{n>0}^{n \leq x} \left[\frac{x}{n} \right] = x(\lg x + 2C - 1) + \frac{1}{4} + v \left(\frac{65}{36} \sqrt[3]{x} \lg x + \frac{79}{13} \sqrt[3]{x} + \frac{3}{2} \right),$$

де C — стала Ейлера, $x \geq 1$, $|v| < 1$.

Цей результат був суттєвим поглибленням результату Діріхле, якому вдалось отримати розклад

$$\sum_{n>0}^{n \leq x} \left[\frac{x}{n} \right] = x(\lg x + 2C - 1) + \frac{1}{4} + R(x), \text{ де } |R(x)| < A\sqrt{x},$$

причому $x > 0$, а A — деяка константа.

3. Професійна діяльність

З осені 1898 року Вороний паралельно починає працювати професором Варшавського політехнічного інституту, стає деканом механічного факультету. Того самого року Московське математичне товариство обирає його своїм членом.

У серпні 1898 року Вороний узяв участь у з'їзді російських природознавців і лікарів, у 1901 році він був учасником наступного, XI з'їзду російських природознавців і лікарів, виступаючи на них з різними доповідями. Одна з них стосувалася нового методу підсумовування розбіжних рядів. Пізніше цей метод перевідкрив данський математик Ньорлунд (N. E. Nörlund) і тривалий час у науці називався «методом Ньорлунда». У 1904 році Вороний брав участь у роботі Міжнародного математичного з'їзду в Гайдельберзі, де виступив з двома доповідями.

Упродовж 1903–1904 роках публікує дві великі роботи з аналітичної теорії чисел, що мали значний резонанс у математичних колах. 1907 року Вороного обрали членом-кореспондентом Петербурзької академії наук.

У зв'язку з революційними подіями 1905–1907 років університет і Політехнічний інститут у Варшаві було закрито. Групу професорів цих навчальних закладів (серед них Вороного) направили до Новочеркаська для створення там Донського політехнічного інституту. Вороний перебував у Новочеркаську приблизно рік, виконуючи обов'язки декана механічного факультету. Восени 1908 року навчання у Варшавському університеті поновилося, й Вороний повернувся до Варшави.

Виявлена раніше хвороба жовчного міхура загострилася ще в Новочеркаську. Лікарі радили провести тривале лікування, забороняли напружено працювати, оскільки розумова напруга викликає реакцію недуги. Та для цього у Вороного не знайшлося часу і можливостей, й наприкінці жовтня 1908 року хвороба різко загострилася, а 7 (20) листопада Георгія Вороного не стало.

Передчасна смерть вразила друзів і знайомих вченого, всіх, хто його знав. «7 листопада помер член-кореспондент Академії наук, професор Варшавського університету і Варшавського політехнічного інституту Георгій Феодосійович Вороний, у особі якого математична наука зазнала великої втрати...» — так розпочинався некролог, зачитаний на засіданні Фізико-математичного відділення 12 листопада 1908 року і надрукований в журналі «Известия Императорской Академии наук», 6 серія, т. 2, № 17, 1908 р. (див. [8, С. 42–43]).

«Глубокая скорбь поразила не только его жену, его помощницу даже в научных трудах и шестерых детей, но и всех его товарищей-профессоров и преподавателей Варшавского университета и политехнического института. Никому не хотелось верить, что угас Георгий Феодосиевич, которого все так глубоко уважали и любили. Чувствовалось, что случилось нечто необыкновенное. Все сознавали, что понесена преждевременная по-

теря выдающегося учёного, славного профессора, который был гордостью и украшением двух высших школ Варшавы. Политехнический же институт в лице почившего оплакивал, кроме того, своего первого выборного декана механического отделения, заслужившего на этом поприще общее уважение и благодарность» [2].

4. Талант і успіх

Факторами життєвого, наукового і професійного успіху Вороного були:

- у гімназійні роки — це риси характеру: самостійність, допитливість, наполегливість, цілеспрямованість; нетривіальний інтерес до математики, а також авторитет вчителя математики;
- у студентські роки — організованість, самодисциплінованість, конкурентність середовища, почуття самотності й туга за батьківщиною (Україною), сприятливі умови для творчості та плідної наукової діяльності, атмосфера наукового пошуку;
- у період трудової університетської діяльності — сформованість якостей дослідника, системність наукових інтересів, творчі задатки особистості, надзвичайна самокритичність та вимогливість до себе і своїх творінь, талант вченого, гармонічне поєднання в особистості дослідника аналітичного й геометричного стилів мислення.

Не менш важливим в цьому відношенні були і його принципи:

- «Сама лише математика, як яскрава зоря, сяє переді мною, на неї всі мої сподівання...»;
- «Лаври Гаусса не дають мені спати».

«Нарешті, згадаю ще одну характерну рису мислення Вороного. Він був людиною, якій ніколи не бракувало тем для наукових праць. Як відомо, у математиці чи не найважчим є знайти собі відповідну і продуктивну тему. Вороному ніколи не бракувало таких тем. Усі його праці наскрізь оригінальні і свідчать про його надзвичайні наукові здібності» (В. Серпінський [16]).

5. Феномен популярності Вороного

Феномен популярності вченого у глибині його творів, різноплановості досліджень, плідності ідей (геометризації теоретико-числових об'єктів, задач і методів їхнього розв'язування) і продуктивності понять (клітини, діаграми Вороного), популяризації його ідей колегами, учнями й послідовниками (в першу чергу це колега Брайцев, учень Вацлав Серпінський і послідовник Борис Делоне). Велику роботу з популяризації наукових результатів вченого виконала Національна академія наук України.

У 1952–1953 роках Інститут математики АН України видав повне зібрання наукових праць у трьох томах з розлогими коментарями таких провідних фахівців, як Б. М. Делоне, Б. О. Венков, Ю. В. Лінник, Й. Б. Погребинський і Й. З. Штокало.

«Формула підсумовування Вороного дає надзвичайно елегантний і простий метод наближеного обчислювання числових рядів, порівняно з яким усі інші методи, на які натрапляємо в підручниках (і навіть у найкращих підручниках), здаються просто незграбними» (В. Серпінський [16]).

«Юрія Тодосьовича Вороного багато в чому, як із погляду питань, що цікавили його, так і з погляду методів, які він прикладав, можна поставити поруч із Г. Мінковським,— і тут важко сказати, кому належить пальма першості. Ми, мабуть, не помилились, коли скажемо, що Вороной глибший, а Мінковський блискучіший» [10].

«Цікаво, що ця думка Вороного через багато років після його теорії знову з'являється в сучасній теорії структури твердої

речовини, і загалом можна сказати, що цей фундаментальний цикл ідей Вороного далеко ще не завершений.... Безперечно, після Лобачевського й Чебишова одним із найвизначніших наших математиків був Вороний» [10, С. 40–41].

6. Педагогічна діяльність та педагогічний доробок

Після закінчення університету Вороний почав працювати штатним викладачем Петергофської прогімназії. Університетська педагогічна діяльність Вороного розпочалась у Варшавському університеті 1894 року і тривала з деякими перервами до кінця його життя. Спочатку він був призначений виконувачем обов'язків доцента (травень 1894 р.), а до читання лекцій приступив у вересні 1894 року вже як екстраординарний професор. На час приїзду Вороного до університету математичні курси викладали лише два професори математики В. А. Анісімов (1860–1907 рр.) й М. М. Зінін (1854–1910 рр.). Вороному довелося викладати: аналітичну геометрію, нарисну геометрію, теорію чисел і теорію ймовірностей.

1898 року Дмитро Дмитрович Мордухай-Болтовський (1876–1952) після закінчення фізико-математичного факультету Петербурзького університету (і рішення «залишити при університеті для підготовки до професорського звання») був направлений до Варшавського політехнічного інституту в розпорядження Г. Ф. Вороного на посаду асистента.

Восени 1908 року після відновлення занять у Варшавському університеті Вороний повернувся з Новочеркаська до Варшави і з початку навчального року розпочав читати новий курс — математичний аналіз, підготовка якого була останньою в його педагогічній діяльності. Педагогічну спадщину Вороного складають підручники, щоденники, кандидатська, магістерська та докторська дисертації. Серед них:

1) підручник із аналітичної геометрії, виданий у Варшаві 1900 року літографічним способом, який містить 838 сторінок (на титульній сторінці: «Аналітична геометрія. Лекції, прочитані в імператорському варшавському університеті професором Г. Вороным. 1899/1900 н. р.». Один примірник цього підручника зберігається в бібліотеці Інституту математики НАН України [19]);

2) підручник із математичного аналізу, який під редакцією І. Р. Брайцева виданий у Варшавських університетських відомостях упродовж 1909–1911 років;

3) підручник із диференціального й інтегрального числення, виданий у Києві 1914 року;

4) щоденник Вороного (рукопис зберігається в Інституті рукопису Національної бібліотеки імені В. І. Вернадського), виданий 2004 року під редакцією М. І. Кратка.

«Усі праці Вороного характеризуються з наукового погляду найвищою точністю, а з дидактичного — надзвичайною прозорістю і простотою викладу» (В. Серпінський [16]).

«Вороной був одним із тих нечисленних професорів російського університету в Варшаві, кому вдалося збудити у своїх учнів любов до науки і хто назавжди залишив у їхній пам'яті вдячну згадку» (В. Серпінський [16]).

7. Учні та послідовники Г. Ф. Вороного

У свій час Вороной звернув увагу на здібного й активного студента Варшавського університета, що цікавився математикою і працював у його семінарі. Це був Вацлав Серпінський. Професор уважно стежив за успіхами Серпінського і вже 1904 року запропонував йому написати перший науковий твір у галузі теорії чисел.

Методи, використанні Вороним у роботі «Про одну трансцендентну функцію...», можна було поширити на задачу про визначення числа цілих точок у крузі. Цю тему він запропонував В. Серпінському для виконання конкурсної студентської роботи.

Задача зводилася до дослідження виразу

$$S = \sum \sum f(m^2 + n^2) = \sum_{\substack{k < b \\ k > a}} \tau(k) f(k),$$

де $f(x)$ — неперервна функція $a < m^2 + n^2 < b$, $\tau(k)$ — число розкладів k на суму двох квадратів. Серпінський із завданням блискуче впорався. У розлогуому відгуку Вороного на роботу Серпінського на тему «Про підсумовування ряду $\sum_{\substack{n \leq b \\ n > a}} \tau(n) f(n)$ за умови, що $\tau(n)$ представляє число розкладів n на суму квадратів двох цілих чисел» міститься ряд пропозицій загального характеру, які наведені в роботі [19, с. 548]. Закінчується відзвиг словами «для цієї мети автор скористався загальною суматорною формулою, повідомленою мною на лекціях...». Вороний, високо оцінивши роботу Серпінського, представив її до золотої медалі, яка була присуджена автору Радою університету. Робота Серпінського опублікована у 1907 році і була дослідженням часткового випадку задачі про знаходження подвійних сум виду

$$\sum f(pm^2 + 2qmn + rn^2),$$

де $f(m, n)$ — додатньо визначена квадратична форма з цілими коефіцієнтами.

Загальні результати в цьому напрямі Вороним були викладені в доповіді на Гайдельберзькому конгресі.

Вацлав Серпінський (14.03.1882 — 21.10.1969) — видатний польський математик; із 1917 року — член-кореспондент Краківської академії, а з 1921 року — дійсний член академії наук у Кракові (1917 — 1951), член польської АН (1952) і 11 іноземних академій, член багатьох наукових товариств.

Народився Вацлав Серпінський 14 березня 1882 року у Варшаві. Батько його був лікарем. Читати й писати хлопчик навчився ще до школи. У гімназії Вацлав виявив особливу зацікавленість та здібності до вивчення математичних дисциплін.

1900 року Серпінський успішно закінчив гімназію і вступив на фізико-математичний факультет Варшавського університету, де навчався до 1904 року. Одним із його вчителів був Г. Ф. Вороний (іншим науковим керівником вважають Станіслава Зарембу). Перша наукова праця Серпінського, написана 1904 року під керівництвом Вороного і відзначена Радою університету золотою медаллю, справила суттєвий вплив на формування наукових інтересів Серпінського. З вересня 1904 він працював вчителем математики і фізики в IV жіночій гімназії у Варшаві.

Вацлав Серпінський — автор понад 700 наукових праць, серед яких 31 книжка. Його наукові інтереси торкалися теорії чисел, математичного аналізу, теорії множин, теоретико-множинної топології, теорії міри та категорій, теорії функцій дійсної змінної тощо.

Борис Миколайович Делоне (15.03.1890 — 17.07.1980) — послідовник і продовжувач робіт Г. Ф. Вороного в галузях теорії чисел і геометрії чисел; член-кореспондент СРСР (1929), член академії «Леополдіна» (1962), лауреат міжнародної премії імені Лобачевського (1987). Нагороджений орденом Леніна, двома орденами Трудового Червоного Прапора, медалями. Майстер спорту з альпінізму.

Народився Делоне в Санкт-Петербурзі. На початку 1900-х років разом з сім'єю переїхав до Києва. Батько Бориса Миколайовича — професор механіки Микола Борисович Делоне з 1900 року був направлений до Варшавського політехнічного інституту для створення кафедри практичної механіки. Там (у Варшаві) Микола Делоне і Георгій Вороний познайомилися. Борис Делоне згадає випадок, коли одного разу до їхньої квартири прибіг Вороний і збуджено вигукнув кілька разів «Вона лінійна! Вона лінійна!». 1908 року Борис Миколайович закінчив Київську гімназію (екстерном), 1913 — Київський університет Святого Володимира. Був учнем В. П. Єрмакова і Д. А. Граве. Працював у Київському університеті (1913 — 1916), Київському політехнічному інституті (1916 — 1922), у Ленінградському (1922 — 1935),

Московському університеті (1935). Із 1932 року працював в Математичному інституті імені В. А. Стеклова АН СРСР.

Наукові роботи Делоне виконані на межі алгебри, геометрії й теорії чисел.

У геометрії чисел він розв'язав задачу про визначення двовимірної решітки за відстаннями між її точками і створив новий метод у геометрії чисел, який назвав методом «порожньої кулі», побудовані ним математичні об'єкти, які згодом отримали назву «триангуляція Делоне», тісно пов'язані з діаграмами Вороного. Практичний інтерес викликає дослідження Делоне в математичній кристалографії. Все своє життя Делоне популяризував ідеї та результати Вороного.

8. Конференції, присвячені Вороному

Від 1993 року, один раз на п'ять років у Києві відбувались міжнародні конференції з теорії чисел та діаграм Вороного під загальною назвою «International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations», в яких брали участь математики з багатьох країн світу, фахівці з різних галузей знань, які в своїх дослідженнях використовують діаграми Вороного та його наукові результати. Головним організатором конференцій був Інститут математики НАН України. У вересні 2018 року планується проведення Шостої міжнародної конференції з аналітичної теорії чисел і просторих мозаїк.

Першу конференцію, приурочену до 125-ої річниці від дня народження вченого (1993 р.), ініціював відомий український фахівець у галузі теорії чисел, доктор фізико-математичних наук, професор Павло Дмитрович Варбанець, який тривалий час очолює кафедру комп'ютерної алгебри в Одеському національному університеті імені І. І. Мечникова. Ідею підтримали академік НАН України Анатолій Михайлович Самойленко, член-кореспондент НАН України Михайло Йосипович Ядренко, кандидат фізико-математичних наук Галина Миколаївна Сита. Саме

Галина Миколаївна стала головною сподвижницею всіх наступних конференцій. 2008 і 2013 років конференції відбувалися на базі Фізико-математичного інституту (факультету) Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова, 2018 року планується проведення конференції на цій самій базі.

Засідання конференції 1993 року відбувалися в Інституті математики АН України з 5 по 9 жовтня. За тематикою було охоплено ті напрямки сучасної математики (зокрема, теорії чисел), які значною мірою стали розвитком основоположних ідей Г. Вороного. Це аналітична теорія чисел, алгебраїчна теорія чисел, геометрична теорія чисел, лінійні методи підсумовування рядів.

Із 7 по 14 вересня 1998 року в Києві відбулася Друга Міжнародна конференція пам'яті Георгія Вороного з аналітичної теорії чисел та просторових мозаїк, організована Українським математичним товариством, Інститутом математики НАН України, Національним університетом імені Т. Г. Шевченка, Національним педагогічним університетом імені М. П. Драгоманова й Ніжинським державним педагогічним інститутом імені Миколи Гоголя.

З 22 по 28 вересня 2003 року в Києві відбулася Третя міжнародна конференція пам'яті Г. Вороного з аналітичної теорії чисел і просторових мозаїк, організована Інститутом математики НАН України, Національним педагогічним університетом імені М. П. Драгоманова, Київським національним університетом імені Тараса Шевченка, Ніжинським державним педагогічним університетом імені Миколи Гоголя, Українським міжнародним комітетом з питань науки і культури при НАН України, Українським математичним товариством.

З ініціативи організаторів ISVD-симпозіумів Четверта міжнародна конференція і Міжнародний симпозіум з діаграм Вороного в науці й техніці (ISVD) об'єднано проходили в Києві. В науковому форумі взяли участь понад 80 учасників з 21 країни світу: з Австрії, Великобританії, Греції, Ізраїлю, Індії, Іспанії, Канади, Південної Кореї, Литви, Нідерландів, Німеччини, Польщі, Ро-

сії, США, Сингапуру, України, Фінляндії, Франції, Чехії, Швеції, Японії. Напередодні з ініціативи оргкомітету конференції Національний банк України, продовжуючи серію «Видатні особистості України», випустив пам'ятну монету номіналом 2 гривні «Георгій Вороной», а видавництво «Марка України» випустило конверт до 140-річчя Вороного й у квітні організувало спецпогашення конверта в селі Журавка на Чернігівщині. На замовлення оргкомітету здійснено випуск компакт-диска з матеріалами конференції та підручником Г. Вороного «Дифференциальное и интегральное исчисление», виданим у Києві 1914 року.

На конференції працювали дві основні секції: чистої математики і діаграм Вороного. З пленарними доповідями виступили професори: А. Окабе (Японія), Є. Качоровський (Польща), К. Лаутенсак (Німеччина), Ю. Нестеренко (Росія), Т. Тейлор (США), Ю. В. Матіяевич (Росія), К. Голд (Великобританія).

З 16 по 20 вересня 2013 року відбулася П'ята міжнародна конференція з аналітичної теорії чисел і просторових мозаїк, присвячена 145-річчю з дня народження видатного українського математика Георгія Вороного (1868–1908). Як і на всіх попередніх київських конференціях, тематика конференції пов'язана з напрямками досліджень Вороного, а саме: теорія чисел, геометрія чисел, метод Вороного підсумовування рядів і інтегралів, просторові мозаїки, застосування діаграм Вороного у природничих науках, фрактальний аналіз і фрактальна геометрія.

Організаторами були Фізико-математичний інститут Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова, Інститут математики НАН України, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Ніжинський державний університет імені Миколи Гоголя, Благодійний фонд імені Георгія Вороного.

24–28 вересня 2018 року в Києві на базі фізико-математичного факультету Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова відбудеться Шоста міжнародна конференція з аналітичної теорії чисел і просто-

рових мозаїк, присвячена 150-му ювілею всесвітньо відомого українського математика Георгія Вороного (1868—1908).

Організатори заходу: Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Інститут математики НАН України, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Український міжнародний комітет з питань науки і культури, НАН України (м. Київ, Україна), Центр досліджень діаграм Вороного, Університет Ханьян (м. Сеул, Республіка Корея), Інститут математики Польської академії наук (м. Варшава, Республіка Польща), Благодійний фонд імені Георгія Вороного (с. Журавка, Україна).

Доброю традицією проведення конференцій стали поїздки учасників на малу батьківщину Г. Вороного — в село Журавку Варвинського району Чернігівської області на могилу вченого з відвідуванням кімнати-музею Вороного у місцевій школі.

8.1. Праці конференцій

- Вплив наукового доробку Г. Вороного на сучасну науку. Кн. 1. Ред. П. Енгел та Г. Сита. Національна академія наук України. Інститут математики. — Київ: Інститут математики. — 1998. — 276 с.
Вплив наукового доробку Г. Вороного на сучасну науку. Кн. 2. Ред. П. Енгел та Г. Сита. Національна академія наук України. Інститут математики. — Київ: Інститут математики. — 1998. — 228 с.
- Вплив наукового доробку Вороного на сучасну науку. Кн. 3. Праці Третьої міжнародної конференції з аналітичної теорії чисел і просторових мозаїк Ред.: Г. Сита, А. Юрчаківський, П. Енгел. Національна академія наук України. Інститут математики. — Київ: Інститут математики. — 2005. — 230 с.
- Вплив Вороного на сучасну науку. Книга 4, том 1. Праці Четвертої Міжнародної конференції з аналітичної теорії

чисел і просторових розшарувань / Ред.: Антанас Лаурінчикас і Йорн Штойдинг. – Київ: Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова; Інститут математики НАН України. – 2008. – xii+260 с.

Вплив Вороного на сучасну науку. Книга 4, том 2. Праці Четвертої Міжнародної конференції з аналітичної теорії чисел і просторових розшарувань / Ред.: Кокічі Сугіхара і Деок-Су Кім. – Київ: Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова; Інститут математики НАН України. – 2008. – x+256 с.

- Вплив Вороного на сучасну науку. Книга 5, том 1. Праці П'ятої Міжнародної конференції з аналітичної теорії чисел і просторових мозаїк / Ред.: Микола Працьовитий; Національна академія наук України, Інститут математики; Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова. – Київ: Інститут математики. – 2015. – viii+66 с.

Література

- [1] *Брайцев И. Р.* Г. Ф. Вороной (1868–1908), Некролог. – Варшава. – 1909.
- [2] *Брайцев И. Р.* Г. Ф. Вороной. Некролог. Сообщ. Харьковского матем. общ-ва, Вторая серия, т. XI, № 6. – 1910. – С. 197–210.
- [3] *Бородін О. Г., Бугай А. С.* Біографічний словник діячів у галузі математики. – Київ: Радянська школа, 1973. – 550 с.
- [4] *Виноградов И. М., Венков Б. А., Делоне Б. Н. и др.* Собр. соч. в трех томах. Изд-во АН УССР, К., 1952–1953.
- [5] *Вейберг С. А.* Участие Г. Ф. Вороного в решении некоторых задач геометрической кристаллографии. – В кн.: Прот. засед. О-ва естествоисп. при Имп. Варшавск. ун-те за 1909 г. № 1-2. – 1910. – С. 5-9.
- [6] *Венков Б. А.* О научном дневнике Г. Ф. Вороного. – Укр. мат. журн. – 1951, т. 3, № 3. – С. 279-289.

- [7] Георгій Вороний. Вчений, який випередив час на століття: Збірник науково-популярних статей / Інститут математики НАН України, Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, – Київ, 2010. – 68 с.
- [8] Георгій Вороний та його родинне оточення. Крізь терни – у вічність. Відновимо імена – відродимо Україну. Збірник матеріалів і публікацій. – Чернігів: Десна Поліграф, 2012. – 608 с.
- [9] *Делоне Б. М.* Петербургская школа теории чисел, М. – Л., 1947.
- [10] *Делоне Б. Н.* Юрій Тодосьович Вороний / Журнал математичного циклу ВУАН. – т.1 № 2. – 1933. – С. 15-16.
- [11] *Карацуба А. А.* Основы аналитической теории чисел. 2 изд. – М., 1983.
- [12] *Марков А. А.* Г. Ф. Вороной. 1868–1908. Некролог. – Изв. Акад. наук, 1908, т. 2, № 17. – С. 1247-1248.
- [13] *Працьовитий Микола, Сита Галина* Георгій Вороний. Український вчений, який випередив час на століття. // Науково-популярний журнал «Світоглад» № 2(16). – Київ: Академперіодика НАН України. – 2009. – 80 с.
- [14] *Погребынский И. Б.* Обзор архивных материалов о Г. Ф. Вороном. – В кн.: Вороной Г. Ф. Собр. соч. В трех томах. Т. 3. Изд-во АН УССР, К. – 1953. – С. 248-251.
- [15] *Погребынский И. Б.* Рукописный фонд Г. Ф. Вороного. – В кн.: Вороной Г. Ф. Собр. соч. В трех томах. Т. 3. К.: Изд-во АН УССР. – 1953. – С. 251-260.
- [16] *Серпінський В.* Георгій Вороний (Конспект лекції, прочитаної у Львівській університеті дня 28 листопада 1908 р.), в кн.: Георгій Вороний та його родинне оточення. Збірник матеріалів і публікацій. – Чернігів: Десна Поліграф. – 2012. – С. 34-38.
- [17] *Чудаков Н. Г.* О некоторых рукописях Г. Ф. Вороного, относящихся к аналитической теории чисел. – В кн.: Г. Ф. Вороной. Собр. соч. в трех томах. Т.1. Изд-во АН УССР, К. – 1953. – С. 211-224.
- [18] *Штокало И. З., Погребынский И. Б.* Жизнь и научная деятельность Г. Ф. Вороного, в кн.: Г. Ф. Вороной, Собр. соч., В трех томах. Т. 3, К.: Изд-во АН УССР, 1953. – С. 263-304.

[19] *Штокало И. З., Погребыский И. Б.* Творчество Г. Ф. Вороного. — В кн.: История отечественной математики. Том 2. — Киев: Наукова думка, 1967. — С. 533-550.

[20] *Штокало И. З. и др.* История отечественной математики. Том 2. — Киев: Наукова думка. — 1967. — 616 с.

[21] *Штойдинг Й.* Внесок Вороного в сучасну теорію чисел. — В кн.: Сучасні дослідження з теорії чисел у доступному викладі, К.: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2009. — С. 5-59.

Публікації Г. Ф. Вороного:

[22] *Вороной Г. Ф.* О числах Бернулли. Сообщ., Харьков. мат. об-ва 2 (1890), 129-148. (див.: Собр.соч. т. I (1952), С. 25-195).

[23] *Вороной Г. Ф.* О целых алгебраических числах, зависящих от корня уравнения 3-й степени, Магистерская диссертация, С. - Петербург, 1894 (див.: Собр.соч. т. I (1952), С. 25-195).

[24] *Вороной Г. Ф.* Об одном обобщении алгоритма непрерывных дробей, Докторская диссертация, Варшава, 1896. (див.: Собр.соч. т. I (1952), С. 197-391).

[25] *Вороной Г. Ф.* О числе корней сравнения третьей степени при простом модуле, Дневник X съезда русских естествоиспытателей и врачей 1898, р. 329 (див.: Собр. соч. т. III (1953), С. 8).

[26] *Вороной Г. Ф.* Об определении суммы квадратичных вычетов простого числа p вида $4m + 3$ при помощи чисел Бернулли, Протоколы С.-Петербур. мат. об-ва 5 (1899), 184. (див.: Собр. соч. т. I (1952), С. 7).

[27] *Вороной Г. Ф.* Расширение понятия о пределе суммы членов бесконечного ряда, Дневник XI съезда русских естествоиспытателей и врачей 1901, (1902), 60-61. Extension of the notion of the limit of the sum of terms of an infinite series, Ann. of Math., 33, 1932, 422-423. (див.: Собр. соч. т. III (1953), С. 9-10).

[28] *Voronoi G. F.* Sur une probleme du calcul des fonctions asymptotiques, J. reine angew. Math. 126 (1903), 241-282. Об одной задаче из теории асимптотических функций, Собр. соч., т. II (1952), С. 5-49.

- [29] *Voronoi G. F.* Sur une fonction transcendente et ses applications a la sommation de quelques series, Ann. l'Ecole Normale sup. 20 (1903), С. 207-268; С. 459-539. Об одной трансцендентной функции и ее приложениях к суммированию некоторых рядов, Собр. соч. т. II (1952), С. 51-165.
- [30] *Voronoi G. F.* Sur une propriete du discriminant des fonctions entieres in: Ver.d. 3. intern. Math. Kongr. Heidelb. Leipzig 1905, 185-189. Об одном свойстве дискриминанта целых функций. Собр. соч. т. III (1953), С. 12-15.
- [31] *Voronoi G.* Sur le developpement a l'aide des fonctions cylindriques, des sommes doubles $\sum f(pm^2 + 2qmn + 2n^2)$, ou $pm^2 + 2qmn + 2n^2$ est une forme positive a coefficients entiers. Verh. III Intern. Math. Kongr. in Heidelberg, Leipzig, 1905, 241-245. О разложении посредством цилиндрических функций двойных сумм $\sum f(pm^2 + 2qmn + 2n^2)$, где $pm^2 + 2qmn + 2n^2$ – положительная форма с целыми коэффициентами. Собр. соч., т. II (1952), С. 166-170.
- [32] *Voronoi G.* (1907-08) Nouvelles applications des parametres continus a la theorie des formes quadratiques. Premier Memoire. Sur quelques proprietes des formes quadratiques positive parfaites. J reine angew. Math., 133, Heft 2 (1907), С. 97–156, Heft 3 (1908), С. 157–178. Новые приложения непрерывных параметров к теории квадратичных форм. Первый мемуар. О некоторых свойствах положительных совершенных квадратичных форм, Собр. соч., вид-во АН УРСР, К., т. II (1952), С. 171-238.
- [33] *Voronoi G.* (1908-09) Nouvelles applications des parametres continus a la theorie des formes quadratiques. Deuxieme Memoire. Recherches sur les paralleloedres primitifs. J reine angew Math.. Band 134 (1908), Heft 3, 198-246; Heft 4, С. 247–287. Introduction (С. 198–211); Premiere partie. Partition uniforme de l'espace analytique a n dimensions a l'aide des translations d'un meme polyedre convexe (С. 212–287). Band 136 (1909), Heft 2, С. 67-178. Seconde partie. Domaines de formes quadratiques correspondant aux differents types de paralleloedres primitifs.