Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2017, т. 14, № 4, 188–200

УДК 517.5

М. В. Працьовитий[1]***, Р. В. Кривошия***[2]***,***
О. П. Макарчук[3]

[1] *НПУ імені М. П. Драгоманова, ІМ НАН України Київ;*
prats4444@gmail.com

[2] *Інститут математики НАН України, Київ;*
mostik19@gmail.com

[3] *ЦДПУ імені Володимира Винниченка, Київ;*
makolpet@gmail.com

Рівномірно розподілені послідовності, продуковані перетворенням зсуву в класі Q_2^*-представлень

In the paper we extending result of Nivena and Zukerman on the class of Q_2^*-representations in context of metric theory of Borel's normal numbers
Key words: Q_2^*-representation of real numbers, uniformly distribution sequence, shift operator, normal number.

У роботі поглиблюється на клас Q_2^*-представлень, результат І. Нівена та Г. Цукермана в контексті метричної теорії нормальних чисел Е. Бореля.
Ключові слова: Q_2^*-зображення дійсних чисел, рівномірно розподілена послідовність, оператор зсуву, нормальне число.

Вступ

Нехай $(p_{0n}; p_{1n})$ — послідовність стохастичних векторів із додатними координатами, така, що

$$\prod_{n=1}^{\infty} max\{p_{0n}; p_{1n}\} = 0.$$

Відомо [1], що для довільного дійсного числа $x \in [0;1]$ існує двійковий вектор $(\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n; \ldots)$, такий, що

$$\begin{aligned} x = &\beta_{\alpha_1 1} + \beta_{\alpha_2 2} p_{\alpha_1 1} + \beta_{\alpha_3 3} p_{\alpha_2 2} p_{\alpha_1 1} + \ldots + \\ &+ \beta_{\alpha_{(n+1)}(n+1)} p_{\alpha_n n} p_{\alpha_{n-1}(n-1)} \ldots p_{\alpha_1 1} + \ldots, \end{aligned} \tag{1}$$

де

$$\begin{cases} \beta_{0n} = 0 \\ \beta_{1n} = p_{0n} \quad \forall n \in N. \end{cases}$$

Ряд (1) називається Q_2^*-представленням числа x і має таке зображення:

$$x = \Delta^{Q_2^*}_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_n \ldots}.$$

Якщо $p_{0n} = \frac{1}{2}$ для кожного натурального n, то отримаємо класичне двійкове зображення з відповідним представленням:

$$x = \Delta^2_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_n \ldots} = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\alpha_j}{2^j}.$$

Існує зліченна множина чисел виду $\Delta^{Q_2^*}_{\gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_k 1(0)}$, які мають 2 зображення (і відповідно представлення):

$$\Delta^{Q_2^*}_{\gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_k 1(0)} = \Delta^{Q_2^*}_{\gamma_1 \ldots \gamma_k 0(1)},$$

для всіх інших чисел із відрізка $[0;1]$ відповідне представлення однозначне.

Означення 1. *Послідовність (x_n) називається рівномірно розподіленою за модулем 1, якщо для довільних дійсних $a < b$:*

$$\frac{N_n([a;b])}{n} \to b - a \ \ (n \to \infty),$$

де $N_n([a;b])$ — кількість чисел серед $x_1, x_2, \ldots, x_n$, які належать відрізку $[a;b]$.

Одним із найважливіших критеріїв рівномірної розподіленості є наступний критерій Вейля.

Теорема 1. *Послідовність (x_n) є рівномірно розподіленою лише тоді, коли*

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} e^{ih\{x_k\}}}{n} \to 0 \ \ (n \to \infty)$$

для кожного $h \in Z \setminus \{0\}$, де $i = \sqrt{-1}$ і $\{t\}$ — дробова частина числа t.

У теоремі 1 достатньо розглядати лише натуральні h. Справді,

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} e^{ih\{x_k\}}}{n} \to 0 \ \ (n \to \infty) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \cos(h\{x_k\}) + i \sum\limits_{k=1}^{n} \sin(h\{x_k\})}{n} \to 0 \ \ (n \to \infty) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} e^{-ih\{x_k\}}}{n} \to 0 \ \ (n \to \infty).$$

Уперше поняття рівномірно розподіленої послідовності ввів Вейль у 1919-му році в роботі [5], де він обґрунтував рівномірну розподіленість послідовності $\{n\gamma\}(\gamma \notin Q)$, що є актуальним фактом для питань астрономії. Він також першим довів наведений щойно критерій рівномірної розподіленості послідовностей (теорема 1).

Означення 2. *Число*

$$x = \Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots} = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\alpha_j}{2^j}$$

називається слабонормальним за основою 2, якщо

$$\frac{w_k}{k} \to \frac{1}{2} \ \ (k \to \infty),$$

де w_k *— кількість одиниць серед чисел* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$*, тобто* $\omega_k = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i$.

Означення 3. *Число*

$$x = \Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots} = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\alpha_j}{2^j}$$

називається нормальним за основою 2, якщо для довільного двійкового вектора $(c_1; c_2; ...; c_r)$ *виконується умова:*

$$\frac{w_k}{k} \to \frac{1}{2^r} \ \ (k \to \infty),$$

де w_k *— кількість блоків цифр* $[c_1; c_2; ...; c_r]$*, які не перетинаються, серед набору цифр* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$.

Останні два означення ввів Еміль Борель у роботі [3].

У роботі [8] І. Нівена й Г. Цукермана показано, що число x є нормальним за основою 2 тоді і тільки тоді, коли послідовність $\{2^n x\}$ рівномірно розподілена на відрізку $[0; 1]$.

Оскільки правильною є така теорема [6]:

Теорема 2. *Для довільної послідовності* (d_n) *попарно різних цілих чисел послідовність* $(d_n x)$ *рівномірно розподілена за модулем 1 для майже всіх дійсних* x.

Тим самим було показано, що множина нормальних за основою 2 чисел має міру Лебега 1.

Доведення останнього факту на основі індивідуальної ергодичної теореми (теорема Біркхофа-Хінчина) вперше вказав Ф. Рісс у роботі [9], адже перетворення

$$x \to \{2x\}$$

є ергодичним по відношенню до міри Лебега.

1. Ергодичні властивості оператора зсуву й рівномірно розподілені послідовності, ним продуковані

За послідовністю стохастичних векторів $(p_{0n}; p_{1n})$ побудуємо такі послідовності стохастичних векторів:

$$(p_{0n}^{(l)}; p_{1n}^{(l)}) = (p_{0(n+l)}; p_{1(n+l)}) \ \ \forall n \in N$$

і

$$(p_{0n}^{(-l)}; p_{1n}^{(-l)}) = \begin{cases} (\frac{1}{2}; \frac{1}{2}) \ \ \forall n \le l \\ (p_{0(n-l)}; p_{1(n-l)}) \ \ \forall n > l \end{cases}$$

при кожному натуральному l.

Для того, щоб підкреслити, що $\tilde{Q}_2$-представлення породжене послідовністю стохастичних векторів $(p_{0n}; p_{1n})$, будем використовувати запис:

$$\Delta^{\tilde{Q}(p_{0n};p_{1n})}_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}.$$

Розглянемо послідовність перетворень

$$T^l(\Delta^{\tilde{Q}(p_{0n};p_{1n})}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{\tilde{Q}(p_{0n}^{(l)};p_{1n}^{(l)})}_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots},$$

для яких оберненими є відповідно

$$T^{-l}(\Delta^{\tilde{Q}(p_{0n};p_{1n})}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{\tilde{Q}(p_{0n}^{(l)};p_{1n}^{(l)})}_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}$$

при кожному натуральному l.

Оскільки існує лише зчисленна множина чисел із відрізку $[0;1]$, які мають 2 відповідні Q_2^*-представлення, то ергодичні властивості послідовності перетворень $T^k(x)$ можливо розглядати при домовленості використовувати зображення з періодом (0).

Лема 3. *Перетворення $T(x)$ є ергодичним відносно міри Лебега.*

Доведення. Зрозуміло, що

$$T^{-1}([\Delta^{\tilde{Q}(p_{0n};p_{1n})}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)};\Delta^{\tilde{Q}(p_{0n};p_{1n})}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(1)}]) =$$
$$= [\Delta^{\tilde{Q}(p^{(-1)}_{0n};p^{(-1)}_{1n})}_{0\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)};\Delta^{\tilde{Q}(p^{(-1)}_{0n};p^{(-1)}_{1n})}_{0\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(1)}] \cup [\Delta^{\tilde{Q}(p^{(-1)}_{0n};p^{(-1)}_{1n})}_{1\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)};\Delta^{\tilde{Q}(p^{(-1)}_{0n};p^{(-1)}_{1n})}_{1\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(1)}].$$

Зрозуміло, що

$$\lambda([\Delta^{\tilde{Q}(p_{0n};p_{1n})}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)};\Delta^{\tilde{Q}(p_{0n};p_{1n})}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(1)}]) = p_{\alpha_1 1}\cdot p_{\alpha_2 2}\cdot\ldots\cdot p_{\alpha_n n}$$

і

$$\lambda([\Delta^{\tilde{Q}(p^{(1)}_{0n};p^{(1)}_{1n})}_{0\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)};\Delta^{\tilde{Q}(p^{(-1)}_{0n};p^{(-1)}_{1n})}_{0\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(1)}]\cup[\Delta^{\tilde{Q}(p^{(-1)}_{0n};p^{(-1)}_{1n})}_{1\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)};\Delta^{\tilde{Q}(p^{(-1)}_{0n};p^{(-1)}_{1n})}_{1\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(-1)}]) =$$
$$\frac{1}{2}\cdot p_{\alpha_1 1}\cdot\ldots\cdot p_{\alpha_n n} + \frac{1}{2}\cdot p_{\alpha_1 1}\cdot\ldots\cdot p_{\alpha_n n} = p_{\alpha_1 1}\cdot\ldots\cdot p_{\alpha_n n}.$$

Отже,

$$\lambda(T^{-1}([\Delta^{\tilde{Q}(p_{0n};p_{1n})}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)};\Delta^{\tilde{Q}(p_{0n};p_{1n})}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(1)}])) =$$
$$= \lambda([\Delta^{\tilde{Q}(p^{(-1)}_{0n};p^{(-1)}_{1n})}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)};\Delta^{\tilde{Q}(p^{(-1)}_{0n};p^{(-1)}_{1n})}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(-1)}]).$$

Оскільки сукупність відрізків $[\Delta^{Q_2^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)};\Delta^{Q_2^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(1)}]$ породжує $B(R)\cap[0;1]$, то для кожного $[a;b]\subseteq[0;1]$:

$$\lambda(T^{-1}([a;b])) = \lambda([a;b]).$$

Для довільної вимірної за Лебегом множини E і довільного $\varepsilon>0$ існують набори відрізків $[a_n;b_n]$ й $[a_n^*;b_n^*]$, такі, що

$$E \supseteq \bigcup_n [a_n;b_n], E \subseteq \bigcup_n [a_n^*;b_n^*],$$

$$\sum_n (b_n - a_n) - \varepsilon < \lambda(E) < \sum_n (b_n^* - a_n^*) + \varepsilon.$$

Маємо:

$$\sum_n (b_n - a_n) - \varepsilon < \lambda(T^{-1}(E)) < \sum_n (b_n^* - a_n^*) + \varepsilon \Rightarrow$$

$$\lambda(T^{-1}(E)) = \lambda(T(E)).$$

Отже, $T(x)$ зберігає міру Лебега.

Покажемо, що $T(x)$ метрично транзитивне відносно міри Лебега.

Припустимо протилежне, що існують множини U, W, такі, що

$$U \cup W = [0;1];$$

$$U \cap W = \varnothing;$$

$$T^{-1}(U) = U;$$

$$T^{-1}(W) = W.$$

Нехай $u = \lambda(U) \in (0;1)$ і $X(t)$ — характеристична функція множини U:

$$X(t) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } t \in U \\ 0, \text{ якщо } t \notin U. \end{cases}$$

Оскільки для кожного

$$x = \Delta^{\tilde{Q}(p_{0n};p_{1n})}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots} \in U$$

і кожного $l \in N$ число

$$x^{(l)} = \Delta^{\tilde{Q}(p^{(l)}_{0n};p^{(l)}_{1n})}_{q_1,q_2,\ldots,q_l,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$$

є прообразом x порядку l для перетворення T, то

$$X(\Delta^{\tilde{Q}(p^{(l)}_{0n};p^{(l)}_{1n})}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_k\ldots}) = X(\Delta^{\tilde{Q}(p_{0n};p_{1n})}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_k\ldots}).$$

за всіма нескінченними двійковими векторами $(\gamma_1; \gamma_2; \ldots; \gamma_k; \ldots)$.

Зрозуміло, що, позначивши

$$B_l = [\Delta^2_{a_1 a_2 \ldots a_l (0)}; \Delta^2_{a_1 a_2 \ldots a_l (1)}],$$

матимемо:

$$\lambda(U \cap B_l) = \int\limits_{B_l} X(t) d\lambda = \frac{1}{2^n} \int\limits_{R} X(t) d\lambda = \frac{u}{2^n}.$$

Розглянемо число $\varepsilon > 0$, таке, що $1 - u > \varepsilon$. Оскільки множина U і її доповнення W до множини $[0; 1]$ має додатні міри Лебега, то за теоремою про точки щільності [2] існує точка щільності z, тобто для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, таке, що

$$\frac{\lambda(U \cap \Delta)}{\lambda(\Delta)} > 1 - \varepsilon$$

для довільного відрізка Δ, який містить точку z і міра Лебега якого строго менша за δ.

Розглянемо число $n_0 = [\log_2 \frac{1}{\delta}] + 1$. Тоді $\frac{1}{2^{n_0}} < \delta$.

Позначимо:

$$z = \Delta^{\tilde{Q}(p_{0n}^{(n_0)}; p_{1n}^{(n_0)})}_{b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots}$$

і розглянемо відрізок

$$\Delta = B_{n_0} = [\Delta^2_{b_1, b_2, \ldots, b_{n_0}, (0)}; \Delta^2_{b_1, b_2, \ldots, b_{n_0}, (1)}].$$

Маємо:

$$\lambda(U \cap \Delta) = \frac{u}{2^{n_0}},$$

а також

$$\lambda(U \cap \Delta) > (1 - \varepsilon) \lambda(\Delta) = \frac{1 - \varepsilon}{2^{n_0}},$$

звідки

$$\frac{u}{2^{n_0}} > \frac{1 - \varepsilon}{2^{n_0}}$$

і

$$1 - u < \varepsilon$$

ми отримали суперечність.

Теорема 4. *Для майже всіх чисел* $x = \Delta^{Q_2^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ *послідовність*

$$x, T(x), T^2(x), \ldots, T^k(x), \ldots$$

є рівномірно розподіленою на $[0;1]$.

Доведення. Оскільки перетворення $T(x)$ є ергодичним відносно міри Лебега, то для заданого $h \in N$ за теоремою Біргкофа-Хінчина

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} cos(2\pi h T^k(x))}{n} \to \int\limits_0^1 cos(2\pi hx)dx = 0 \;\; (n \to +\infty) \qquad (2)$$

для майже всіх $x \in [0;1]$.

Позначимо через A_h множину тих $x \in [0;1]$, для яких виконується умова (2), тоді $\lambda(A_h) = 1$. Зрозуміло, що

$$\lambda(A_1 \cap A_2) = \lambda(A_1) + \lambda(A_2) - \lambda(A_1 \cup A_2) = 2 - 1 = 1,$$

тому за індукцією

$$\lambda(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) = 1$$

і відповідно

$$\lambda(A_1) - \lambda(\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k) = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda(A_1 \cap \ldots \cap A_j \backslash A_1 \cap \ldots \cap A_{j+1}) = 0,$$

звідки для $A^* = \bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} A_k$, маємо $\lambda(A^*) = 1$.

Отже, для довільного $x \in A^*$:

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} cos(2\pi h T^k(x))}{n} \to 0 \qquad \forall h \in N (n \to \infty).$$

Аналогічно показуємо, що існує множина B^*, така, що $\lambda(B^*) = 1$ і для довільного $x \in B^*$:

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} sin(2\pi h T^k(x))}{n} \to \int\limits_0^1 sin\pi hx dx = 0 \ \ (n \to +\infty) \ \forall h \in N.$$

Отже, для кожного $x \in A^* \cap B^*$

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} e^{2\pi i h T^k(x)}}{n} =$$
$$= \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \cos(2\pi h T^k(x)) + i \sum\limits_{k=1}^{n} \sin(2\pi h T^k(x))}{n} \to 0 \ \ (n \to +\infty) \ \forall h \in N,$$

тобто послідовність $T^n(x)$ є рівномірно розподіленою на $[0;1]$. Зрозуміло, що

$$\{T(x)\} = T(x) \qquad \forall x \in [0;1).$$

Оскільки $\lambda(A^* \cap B^*) = 1$, то маємо потрібне. Теорему доведено.

Оскільки скінченний перетин підмножин $[0;1]$ міри Лебега 1 є множиною міри Лебега 1, то маємо такий наслідок.

Припущення 5. *Нехай* $(q_{0n}^{(l)}; q_{1n}^{(l)})(l \in N)$ *— послідовність стохастичних векторів таких, що*

$$\prod_{j=1}^{+\infty} \max(q_{0j}^{(l)}; q_{1j}^{(l)}) = 0 \qquad \forall l \in N,$$

тоді множина чисел $x \in [0;1]$*, таких, що послідовність*

$$\Delta^{\tilde{Q}(q^{(l)}_{0n};q^{(l)}_{1n})}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}, \Delta^{\tilde{Q}(q^{(l)}_{0n};q^{(l)}_{1n})}_{\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}, \ldots, \Delta^{\tilde{Q}(q^{(l)}_{0n};q^{(l)}_{1n})}_{\alpha_r\alpha_{r+1}\ldots\alpha_k\ldots}, \ldots$$

рівномірно розподілена на відрізку $[0;1]$*, для кожного* $l \in N$*, де*

$$x = \Delta^{\tilde{Q}(q^{(l)}_{0n};q^{(l)}_{1n})}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$$

має міру Лебега 1.

Теорема 6. *Якщо число*

$$x = \Delta^{2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$$

нормальне за основою 2 і для послідовності стохастичних векторів $(q_{0n};q_{1n})$ *виконується умова*

$$\lim_{n\to\infty} q_{0n} = \frac{1}{2},$$

то послідовність

$$\tilde{x}, T(\tilde{x}), \ldots, T^n(\tilde{x}), \ldots$$

рівномірно розподілена на відрізку $[0;1]$*, де*

$$\tilde{x} = \Delta^{Q_2(q_{0n};q_{1n})}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}.$$

Доведення. Нехай

$$q_{0n} = \frac{1}{2} + S_n$$

для кожного натурального n, тоді

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 0.$$

Нехай $\varepsilon \in (0;0,1)$ — достатньо мале дійсне число, тоді існує $k_0 \in N$, таке, що

$$|S_n| < \varepsilon \ \ \forall n \in N, n \geq k_0.$$

Для довільних натуральних $m \geq k_0$ і l та довільного двійкового вектора $(j_1; j_2; \dots ; j_l)$ маємо:

$$\frac{1}{2} - \varepsilon = \sqrt[l]{(\frac{1}{2} - \varepsilon)^l} < \sqrt[l]{q_{j_1(m+1)} \cdot q_{j_2(m+2)} \cdot \dots \cdot q_{j_l(m+l)}} <$$
$$< \sqrt[l]{(\frac{1}{2} + \varepsilon)^l} = \frac{1}{2} + \varepsilon,$$

тобто

$$|\sqrt[l]{q_{j_1(m+1)} \cdot \dots \cdot q_{j_l(m+l)}} - \frac{1}{2}| < \varepsilon.$$

За теоремою Лагранжа існує

$$z \in \left(\min(\frac{1}{2}; \sqrt[l]{q_{j_1(m+1)} \cdot \dots \cdot q_{j_l(m+l)}}) ; \right.$$
$$\left. \max(\frac{1}{2}; \sqrt[l]{q_{j_1(m+1)} \cdot \dots \cdot q_{j_l(m+l)}}) \right),$$

таке, що

$$q_{j_1(m+1)} \cdot \dots \cdot q_{j_l(m+l)} - (\frac{1}{2})^l = l \cdot z^{l-1} (\sqrt[l]{q_{j_1(m+1)} \cdot \dots \cdot q_{j_l(m+l)}} - \frac{1}{2}).$$

Оскільки

$$l \cdot z^{l-1} < l \cdot 0,51^{l-1},$$

то

$$|q_{j_1(m+1)} \cdot \dots \cdot q_{j_l(m+l)} - (\frac{1}{2})^l| < l \cdot 0,51^{l-1} \cdot \varepsilon.$$

Нехай

$$x = \Delta^{Q_2(\tilde{p}_{0k}; \tilde{p}_{1k})}_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \dots},$$

де $(\tilde{p}_{0k}; \tilde{p}_{1k}) = (\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ для кожного $k \in N$.

При $m \geq k_0$ маємо:

$$|T^m(\tilde{x}) - T^m(x)| \leq \beta_{\alpha_{m+1}(m+1)} |q_{\alpha_m m} - \frac{1}{2}| +$$
$$+ \beta_{\alpha_{m+2}(m+2)} |q_{\alpha_m m} \cdot q_{\alpha_{m+1}(m+1)} - \frac{1}{2^2}| + \dots < \varepsilon \cdot C,$$

де

$$C = \sum_{j=1}^{+\infty} j \cdot 0,51^{j-1}.$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty} (T^n(x) - T^n(\tilde{x})) = 0,$$

звідки випливає потрібне. Теорему доведено.

Література

[1] *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. – Киев: Наук.думка. – 1992. – 208 с.

[2] *Титчмарш Е.* Теория функций. – Москва: Наука. – 1980. – 464 с.

[3] *Borel E.* Les probabilies denombrables et leurs applications arithmetiques. – Rend. Circ. Mat. Palermo. – 1909, p. 247-271.

[4] *Borel E.* Lecons sur la theorie des fonctions, 2nd ed. – Paris: Gauthier. – Villars. – 1914.

[5] *Weil H.* Uber die Gibbssche Erscheinung und verwandte Konvergenzphanomene. – Rend. Circ. Math.Palermo. – 1910. – 30. – P. 377-407.

[6] *Weil H.* Uber ein Problem aus dem Gebiete der diophantischen Approximationen. — Nachr. Ges. Wiss. Gottingen, Math.-phys. Kl. – 1914. – P. 234-244.

[7] *Weil H.* Uber die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. – Math. Ann. – 1916. – 77. – P. 313-352.

[8] *Niven I., Zuckerman H.S.* On the definition of normal numbers. – Pacific J. Math. – 1951. – P. 103-109.

[9] *Ries F.* Sur la theorie ergodique. – Comment. Math. Helv. – 1944/45. – 17. – P. 221-239.