Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2017, т. 14, № 4, 178–187

УДК 517.5

***О. І. Бондаренко*[1], *М. В. Працьовитий*[2]**

[1] *НПУ імені М. П. Драгоманова, Київ; omar2011@meta.ua*

[2] *НПУ імені М. П. Драгоманова, Інститут математики НАН України, Київ; prats4444@gmail.com*

Канторівська система числення, пов'язана з двійковим рядом і послідовністю Фібоначчі

We study geometry of the Cantor notation generated by a sequence of bases (s_n), where $s_n = 2^{\varphi_n}$ and (φ_n) is a classical Fibonacci sequence. We examine sets of Cantor type with zero and positive Lebesgue measure, in particular anomalously fractal ones.
Key words: Cantor notation, Fibonacci sequence, binary series, geometry of representation, classical binary number system.

У роботі вивчається геометрія канторівської системи числення, породженої послідовністю основ (s_n), де $s_n = 2^{\varphi_n}$, (φ_n) – класична послідовність Фібоначчі. Розглядаються множини канторівського типу з нульовою й додатною мірою Лебега, зокрема аномально фрактальні.
Ключові слова: канторівська система числення, послідовність Фібоначчі, двійковий ряд, геометрія зображення, класична двійкова система числення.

Вступ

Сьогодні в математиці широко застосовуються різні представлення (зображення) чисел зі скінченним і нескінченним, сталим і змінним алфавітом, із натуральною, цілою від'ємною, раціональною та ірраціональною основами тощо. Це s-кові й нега-s-кові розклади, ланцюгові дроби, розклади чисел в ряди Кантора, Люрота, Енгеля, Сільвестера, Остроградського-Серпінського-Пірса, Q – представлення тощо.

Їхнім застосуванням передують ґрунтовні вивчення геометрії зображень. Канторівські системи числення є узагальненням класичної s-кової системи, яка була покладена в основу першої змістовної теорії дійсних чисел (теорія Веєрштрасса). Така система в якості базисної послідовності використовує добутки елементів наперед заданої послідовності натуральних чисел, більших за 1. Це обумовлює тополого-метричні властивості зображення, які продукують властивості математичних об'єктів, означених у термінах таких зображень.

Канторівські системи числення не мають такого поширення як s-кові системи, але останнім часом їхня роль почала суттєво переусвідомлюватись. У першу чергу завдяки задачам фрактальної геометрії, фрактального аналізу, теорії динамічних систем. Використовуються вони також у метричній і ймовірнісній теорії чисел, зокрема, в теорії сингулярних розподілів випадкових величин тощо.

У цій роботі ми концентруємо увагу на одній із канторівських систем, пов'язаній з двійковою системою числення і класичною послідовністю Фібоначчі.

1. Постановка задачі

Розглядається представлення чисел $x \in [0; 1]$ рядами Кантора:

$$x = \frac{\alpha_1}{s_1} + \frac{\alpha_2}{s_1 s_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{s_1 s_2 \dots s_n} + \dots \equiv \triangle^{(s_n)}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}, \qquad (1)$$

що визначається класичною послідовністю Фібоначчі:

$$\varphi_1 = 1, \varphi_2 = 1, \ldots, \varphi_{n+2} = \varphi_n + \varphi_{n+1}, n \in N, \tag{2}$$

загальний член якої виражається відомою формулою Біне:

$$\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right], \tag{3}$$

а саме: $s_n = 2^{\varphi_n}$,

$$x = \frac{c_1}{2^1} + \frac{c_2}{2^1 \cdot 2^1} + \frac{c_3}{2^2 \cdot 2^2} + \frac{c_4}{2^4 \cdot 2^3} + \cdots + \frac{c_n}{2^{\varphi_{n+1}-1} \cdot 2^{\varphi_n}} + \cdots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2^{\varphi_{n+2}-1}} \equiv \triangle_{c_1 c_2 \ldots\ c_n \ldots}, \tag{4}$$

де $c_n \in \{0, 1, \ldots, 2^{\varphi_n - 1}\} \equiv A_n$.

Формальний (скорочений) запис $\triangle_{c_1 c_2 \ldots\ c_n \ldots}$ ряду (4) і його суми — числа x називатимемо їхнім $\triangle$ - зображенням. Тоді послідовність (c_n) з $\triangle$ - зображення $\triangle_{c_1 c_2 \ldots\ c_n \ldots}$ числа x є елементом простору $L = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \ldots \times \mathcal{A}_n \times \ldots$ - елементів послідовності алфавітів (A_n) і її кодом у цьому просторі.

Добре відомо, що більшість чисел має єдине $\triangle$-зображення і лише зліченна множина чисел має їх два, а саме:

$$\triangle^{(s_n)}_{c_1 c_2 \ldots\ c_n (0)} = \triangle^{(s_n)}_{c_1 c_2 \ldots\ c_n \ldots\ [s_n - 1][s_{n+1}-1][s_{n+2}-1]\ldots}.$$

2. Зв'язок $\triangle$ - зображення числа з його класичним двійковим зображенням

Зосередимо свою увагу на $\triangle$ - зображенні числа x. Як буде показано далі, це зображення має тісний зв'язок з класичним двійковим зображенням, а тому має деякі свої технічні переваги.

Лема 1. *Якщо* $\Delta_{c_1 c_2 \ldots c_n \ldots}$ — Δ*-зображення числа* $x \in [0;1]$*, тобто*

$$x = \frac{c_1}{2^1} + \frac{c_2}{2^1 \cdot 2^1} + \frac{c_3}{2^2 \cdot 2^2} + \frac{c_4}{2^4 \cdot 2^3} + \cdots + \frac{c_n}{2^{\varphi_{n+1}-1} \cdot 2^{\varphi_n}} + \ldots,$$

то його класичне двійкове зображення має вигляд:

$$\Delta^2_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots} = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \frac{\alpha_3}{2^3} + \frac{\alpha_4}{2^4} + \ldots + \frac{\alpha_n}{2^n} + \ldots, \text{ де } \alpha_n \in \{0,1\},$$

причому

$$c_1 = \alpha_1, c_2 = \alpha_2,$$

$$c_3 = 2 \cdot \alpha_3 + \alpha_4, c_4 = 2^2 \cdot \alpha_5 + 2 \cdot \alpha_6 + \alpha_7, \ldots,$$

$$c_n = 2^{\varphi_n - 1} \cdot \alpha_{\varphi_{n+1}} + 2^{\varphi_n - 2} \cdot \alpha_{\varphi_{n+1}+1} + \ldots + 2^1 \cdot \alpha_{\varphi_{n+1}+\varphi_n-2} + 2^0 \cdot \alpha_{\varphi_{n+2}-1}.$$

Доведення. Оскільки $c_n \in A_n$, то його можна подати у вигляді:

$$c_n = 2^{\varphi_n - 1} \cdot \alpha_{\varphi_{n+1}} + 2^{\varphi_n - 2} \cdot \alpha_{\varphi_{n+1}+1} + \ldots + 2^1 \cdot \alpha_{\varphi_{n+1}+\varphi_n-2} + 2^0 \cdot \alpha_{\varphi_{n+2}-1},$$

причому це можна зробити єдиним чином. Тоді, подавши дріб

$$\frac{2^{\varphi_n-1} \cdot \alpha_{\varphi_{n+1}} + 2^{\varphi_n-2} \cdot \alpha_{\varphi_{n+1}+1}}{2^{\varphi_{n+1}-1} \cdot 2^{\varphi_n}} + \ldots +$$

$$+ \frac{+2^1 \cdot \alpha_{\varphi_{n+1}+\varphi_n-2} + 2^0 \cdot \alpha_{\varphi_{n+2}-1}}{2^{\varphi_{n+1}-1} \cdot 2^{\varphi_n}}$$

у вигляді суми φ_n доданків

$$\frac{2^{\varphi_n-1} \cdot \alpha_{\varphi_{n+1}}}{2^{\varphi_{n+1}-1} \cdot 2^{\varphi_n}} = \frac{\alpha_{\varphi_{n+1}}}{2^{\varphi_{n+1}}}, \frac{2^{\varphi_n-2} \cdot \alpha_{\varphi_{n+1}+1}}{2^{\varphi_{n+1}-1} \cdot 2^{\varphi_n}} = \frac{\alpha_{\varphi_{n+1}+1}}{2^{\varphi_{n+1}+1}}, \ldots,$$

$$\frac{2^1 \cdot \alpha_{\varphi_{n+1}+\varphi_n-2}}{2^{\varphi_{n+1}-1} \cdot 2^{\varphi_n}} = \frac{\alpha_{\varphi_{n+1}+\varphi_n-2}}{2^{\varphi_{n+1}+\varphi_n-2}}, \frac{2^0 \cdot \alpha_{\varphi_{n+2}-1}}{2^{\varphi_{n+1}-1} \cdot 2^{\varphi_n}} = \frac{\alpha_{\varphi_{n+2}-1}}{2^{\varphi_{n+2}-1}},$$

отримаємо двійкове зображення числа:

$$x = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{2^n} + \cdots + = \triangle^2_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots}.$$

□

Лема 2. $\triangle$ - *зображення числа* $x = \triangle^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\,\alpha_n\ldots}$ *має вигляд* $\triangle_{c_1c_2\ldots\,c_n\ldots}$, *де*

$$c_n = 2^{\varphi_n-1}\cdot\alpha_{\varphi_{n+1}}+2^{\varphi_n-2}\cdot\alpha_{\varphi_{n+1}+1}+\ldots+2^1\cdot\alpha_{\varphi_{n+1}+\varphi_n-2}+2^0\cdot\alpha_{\varphi_{n+2}-1}.$$

Доведення. Нехай є двійкове зображення числа $x \in [0;1]$:

$$\Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \frac{\alpha_3}{2^3} + \frac{\alpha_4}{2^4} + \ldots + \frac{\alpha_n}{2^n} + \ldots, \text{ де } \alpha_n \in \{0,1\}.$$

Згрупуємо почленно, зведемо до спільного знаменника, починаючи з третього доданка і отримаємо:

$$x = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \left(\frac{\alpha_3}{2^3} + \frac{\alpha_4}{2^4}\right) + \left(\frac{\alpha_5}{2^5} + \frac{\alpha_6}{2^6} + \frac{\alpha_7}{2^7}\right) +$$
$$+ \left(\frac{\alpha_8}{2^8} + \frac{\alpha_9}{2^9} + \frac{\alpha_{10}}{2^{10}} + \frac{\alpha_{11}}{2^{11}} + \frac{\alpha_{12}}{2^{12}}\right) + \ldots =$$

$$= \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \frac{2\cdot\alpha_3+\alpha_4}{2^4} + \frac{2^2\cdot\alpha_5+2\cdot\alpha_6+\alpha_7}{2^7} +$$
$$+ \frac{2^4\cdot\alpha_8+2^3\cdot\alpha_9+2^2\cdot\alpha_{10}+2\cdot\alpha_{11}+\alpha_{12}}{2^{12}} + \ldots +$$
$$+ \frac{2^{\varphi_n-1}\cdot\alpha_{\varphi_{n+1}}+2^{\varphi_n-2}\cdot\alpha_{\varphi_{n+1}+1}}{2^{\varphi_{n+1}-1}\cdot 2^{\varphi_n}} + \ldots +$$
$$+ \frac{+2^1\cdot\alpha_{\varphi_{n+1}+\varphi_n-2}+2^0\cdot\alpha_{\varphi_{n+2}-1}}{2^{\varphi_{n+1}-1}\cdot 2^{\varphi_n}} =$$

$$= \frac{\alpha_1}{2^1} + \frac{\alpha_2}{2^1\cdot 2^1} + \frac{2\cdot\alpha_3+\alpha_{43}}{2^2\cdot 2^2} + \frac{2^2\cdot\alpha_5+2\cdot\alpha_6+\alpha_7}{2^4\cdot 2^3} + \cdots +$$
$$+ \frac{2^{\varphi_n-1}\cdot\alpha_{\varphi_{n+1}}+2^{\varphi_n-2}\cdot\alpha_{\varphi_{n+1}+1}+\ldots+}{2^{\varphi_{n+1}-1}\cdot 2^{\varphi_n}}\cdot$$

$$\cdot\frac{+2^1\cdot\alpha_{\varphi_{n+1}+\varphi_n-2}+2^0\cdot\alpha_{\varphi_{n+2}-1}}{2^{\varphi_{n+1}-1}\cdot 2^{\varphi_n}},$$

ми отримуємо його $\triangle$ - зображення $\triangle_{c_1c_2\ldots\,c_n\ldots}$, де

$$c_n = 2^{\varphi_n-1}\cdot\alpha_{\varphi_{n+1}}+2^{\varphi_n-2}\cdot\alpha_{\varphi_{n+1}+1}+\ldots+2^1\cdot\alpha_{\varphi_{n+1}+\varphi_n-2}+2^0\cdot\alpha_{\varphi_{n+2}-1}.$$

□

3. Геометрія $\triangle$ - зображення.

У кожній системі кодування (зображення) дійсних чисел цифри мають свій геометричний зміст, наслідком чого є інші геометричні тлумачення різних відношень. Геометрія зображення чисел (позиційна й метрична) в значній мірі визначається властивостями циліндрів та хвостових множин.

Нагадаємо, що циліндром рангу m із основою $c_1c_2c_m$, що відповідає даному зображенню чисел, називається множина:

$$\triangle_{c_1c_2\ldots c_m} \equiv \{x : x = \triangle_{c_1c_2\ldots c_m u_{m+1}u_{m+2}\ldots}, u_{m+k} \in A_{s_{m+k}}\}, \qquad (5)$$

що є відрізком $[a;b]$ з кінцями:

$$a = \sum_{i=1}^{m} \frac{c_1}{2^{\varphi_{i+1}-1}}, b = a + \frac{1}{2^{\varphi_{m+2}-1}}.$$

Традиційно означивши циліндри рівністю (5), можна ґрунтовно конкретизувати геометрію $\triangle$ - зображення чисел (геометричний зміст цифр, властивості циліндричних, напівциліндричних і хвостових множин). Її частково розкривають такі метричні співвідношення:

1) довжина циліндра

$$|\triangle_{c_1c_2\ldots c_m}| = \frac{1}{s_1s_2\ldots s_m} = \frac{1}{2^{\varphi_1}\cdot 2^{\varphi_2}\cdot\ldots\cdot 2^{\varphi_m}} =$$

$$= \frac{1}{2^{\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_m}} = \frac{1}{2^{\varphi_{m+2}-1}},$$

2) основне метричне відношення

$$|\triangle_{c_1c_2\ldots c_m}| = s_{m+1}\cdot|\triangle_{c_1c_2\ldots c_m c}| = (2^{\varphi_1}\cdot 2^{\varphi_2}\cdot\ldots\cdot 2^{\varphi_{m+1}})\cdot|\triangle_{c_1c_2\ldots c_m c}| =$$

$$= 2^{\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_{m+1}}|\Delta_{c_1c_2\ldots c_m c}| = 2^{\varphi_{m+2}}|\Delta_{c_1c_2\ldots c_m c}|.$$

4. Метричні задачі

Теорема 3. *Множина*

$$C \equiv C[\triangle; \bar{1}] = \{x : x = \triangle_{c_1 c_2 \dots c_n \dots}, c_n \neq 1\}$$

є ніде не щільною, досконалою множиною додатної міри Лебега, яка дорівнює

$$\lambda(C) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{\varphi_n}}\right) > 0. \tag{6}$$

Доведення. Ніде не щільність множини C є наслідком того, що циліндр $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}$ містить інтервал

$$\nabla_{c_1 c_2 \dots c_m 1} \equiv (\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m 1(0)}; \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m 1(1)}),$$

у якому немає точок множини C.

Досконалість (замкненість, відсутність ізольованих точок) обґрунтовується стандартним способом (як і для всіх неперервних кодувань дійсних чисел). Нехай $F_0 \equiv [0; 1], F_k$ - об'єднання всіх циліндрів рангу k, серед внутрішніх точок яких є точки множини $C[\triangle; \bar{1}]$, тобто

$$\bigcup_{c_1 \neq 1} \cdots \bigcup_{c_k \neq 1} \triangle_{c_1 c_2 \dots c_k},$$

$\overline{F}_{k+1} = F_k \backslash F_{k+1}$. Тоді маємо

$F_0 \supset F_1 \dots \supset F_k \supset F_{k+1} \supset \dots$ і $C[\triangle; \bar{1}] \subset F_k$ при $\forall k \in N$.

Тому $\lambda(C[\triangle; \bar{1}]) \leq \lambda(F_k)$ і більше того, оскільки

$$C[\triangle; \bar{1}] = \lim_{k \to \infty} F_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k,$$

то

$$\lambda(C[\triangle; \bar{1}]) = \lim_{k \to \infty} \lambda(F_k) = \lim_{k \to \infty} \prod_{m=1}^{k} \frac{\lambda(F_m)}{\lambda(F_{m-1})} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_k)}{\lambda(F_{k-1})}.$$

Враховуючи, що $F_{k+1} = F_k \backslash \overline{F}_{k+1}$, отримуємо

$$\lambda(C[\triangle;\bar{1}]) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_{k-1}) - \lambda(\overline{F}_k)}{\lambda(F_{k-1})} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda(\overline{F}_k)}{\lambda(F_{k-1})}\right).$$

Але $\frac{\lambda(\overline{F}_k)}{\lambda(F_{k-1})} = \frac{1}{2^{\varphi_k}}$. Тому має місце рівність (6). Оскільки ж ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\varphi_k}}$ є збіжним, то збіжним є і нескінченний добуток (6). □

Теорема 4. *Міра Лебега множини*

$$C \equiv C[\triangle; V_n] = \{x : x = \triangle_{c_1 c_2 \ldots c_n \ldots}, c_n \in V_n \subset A_n\} \tag{7}$$

обчислюється за формулою

$$\lambda(C) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{|A_n \setminus V_n|}{2^{\varphi_n}}). \tag{8}$$

Доведення. Міркування, які використовувалися при доведенні попередньої теореми, приводять до формули

$$\lambda(C) = \prod^{\infty} (1 - \frac{\lambda(\overline{F_k})}{\lambda(F_{k-1})}),$$

в даному випадку $\frac{\lambda(\overline{F_k})}{\lambda(F_{k-1})} = \frac{|A_k \backslash V_k|}{2^{\varphi_k}}$. Тому виконується рівність (8). □

Наслідок. Множина C, означена рівністю (7), є нуль-множиною Лебега тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|A_n \setminus V_n|}{2^{\varphi_n}} = \infty.$$

Теорема 5. *Множина*

$$C_1 \equiv C[\triangle; V_n] = \{x : x = \triangle_{c_1 c_2 \ldots c_n \ldots}, c_n \in V_n = \{0, 2^{\varphi_n} - 1\}\}.$$

є досконалою аномально фрактальною множиною.

Доведення. Досконалість множини C_1 є очевидною. Скористаємося критерієм аномальної фрактальності досконалої множини [4]. Оскільки множину C_1 можна покрити 2-ма циліндрами рангу k, кожен із яких має довжину $\frac{1}{2^{\varphi_{k+2}-1}}$, то α-об'єм цього покриття виражається

$$l_k^\alpha = 2^k \cdot \left(\frac{1}{2^{\varphi_{k+2}-1}}\right)^\alpha = \left[\frac{2}{2^{\alpha\cdot\frac{\varphi_{k+2}-1}{k}}}\right]^k.$$

Тоді для будь-якого α, маємо $l_k^\alpha \to 0$ при $k \to \infty$, тобто міра Гаусдорфа множини C дорівнює нулю при будь-якому $\alpha > 0$, що засвідчує аномальну фрактальність множини C. □

5. Висновки.

Наявність різних систем зображення чисел розширює можливості конструювання й моделювання математичних об'єктів наперед заданими властивостями, а також допомагає обминути проблеми ефективного їхнього аналітичного задання. В континуальній сім'ї канторівських систем числення окремі мають не тільки свою специфіку, а й власні суттєві метричні переваги перед іншими. До таких належить система, яку ми вивчаємо.

Література

[1] *Працьовитий М. В.* Геометрія класичного двійкового зображення дійсних чисел. – Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова. – 2012. – **4**, № 2. – С. 68.

[2] *Працьовитий М. В.* Системи числення зі змінною основою та змінним алфавітом (або розвинення чисел в ряди Кантора) // Студентські фізико-математичні етюди. – Київ: Вид-во НПУ імені М. П.Драгоманова. – 2009. – **10**, № 8. – С. 6-18.

[3] *Ралко Ю. В.* Зображення чисел рядами Кантора та деякі його застосування // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгомано-

ва. Серія 1. Фізико-математичні науки. – Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова. – 2009. – **10**, № 10. – С. 132-140.

[4] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова. – 1998. – 296 с.

[5] *Воробьев Н. Н.* Числа Фибоначчи. Москва: Наука. – 2013. – 68 с.

[6] *Cantor G.* Uber die einfachen Zahlensysteme // Z. Math. Phys. – 1869. – **10**, Bd. 14. – P. 121-128.

[7] *Працьовитий М. В., Гетьман Б. І.* Ряди Енгеля та їх застосування // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико–математичні науки. – Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова. – 2006. – **10**, № 7. – С. 105-116.

[8] *Працьовита І. М.* Про розклади чисел в знакозмінні s-адичні ряди і ряди Остроградського 1-го та 2-го виду // Український математичний журнал. – 2009. – 61. – **10**, № 7. – С. 958-968.

[9] *Працьовита І. М.* Ряди Остроградського 2-го виду і розподіли їх випадкових неповних сум // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. - Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова. – 2006. – **10**, № 7. – С. 174-189.

[10] *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. – К.: Наук. думка. – 1992. – 208 с.

[11] *Galambos J.* On some Properties of the Luroth-tipe alternating series representations fer real numbers // Int. J. Math. Math. – 2001. – Sci. 28. – **10**, № 6. – P. 367-373.

[12] *Kalpazidou S., Knopfmacher A., Knopfmacher J.* Luroth-type alternating series representations for real numbers // Acta Arith. – 1990. – **10**, Vol. 55. – P. 311-322.

[13] *Galambos J.* Some remarks on the Luroth expansion // Czechoslovak Mathematical Journal. – 1990. – Vol. 22. – **10**, № 2. – P. 266-271.

[14] *Sylvester J. J.* On a point in the theory of vulgar fractions // Amer. Journal of Math. – 1880. – **10**, № 3. – P. 332-335.