Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2017, т. 14, № 4, 167–177

УДК 511.72

М. В. Працьовитий

НПУ імені М. П. Драгоманова, Інститут математики НАН України, Київ; prats4444@gmail.com

Нега–канторівські зображення дійсних чисел як тривіальні перекодування канторівських (нега–s–кові — перекодування s–кових)

In this paper we study representations of numbers in Cantorian and negative Cantorian numeral systems, that are generalization of the classical s-adic system, we examine geometry and metric relations for the representations. We substantiated a fact: number representation by Cantor's familiar series does not generate a new geometry, but is only a trivial re-coding of the known representation by a positive Cantor series.

Key words: numeral system, coding of real numbers, alphabet of numeral system, s-adic representations of real number, negative s-adic representations of real number, Cantor series, Cantor representation of number, negative Cantor representation of number, metric relations generated by representation of number.

Робота присвячена зображенням чисел у канторівській і нега–канторівській системах числення, що є узагальненням класичної s–кової системи, геометрії й метричним відношенням для таких зображень. Обґрунтовується факт: представлення чисел знакопочережними рядами Кантора не породжує нової геометрії, а є лише тривіальним перекодуванням відомого представлення додатним рядом Кантора.
Ключові слова: система числення; кодування дійсних чисел; алфавіт системи зображення числа; s–кове зображення числа; нега–s–кове зображення; ряд Кантора; канторівське зображення числа; нега–канторівське зображення числа; метричні відношення, породжені зображенням чисел.

Вступ

Сьогодні людство оперує різними числовими системами (системами чисел, які утворюють певні алгебраїчні структури і мають деяку ступінь автономності). Це системи натуральних, цілих, раціональних, дійсних, комплексних, гіперкомплексних чисел тощо. Представник тієї чи іншої числової системи має свої зміст і форму існування, які йому надає система числення. Системою числення називається сукупність засобів для

1) представлення=подання (математичного вираження);
2) зображення (кодування, скороченого запису);
3) найменування дійсних чисел;
4) їхньої ідентифікації й порівняння;
5) а також побудови арифметики.

До цієї сукупності належать:

1. Модель числа у формі математичного виразу (ряду, нескінченного добутку, ланцюгового дробу тощо).

2. Алфавіт — набір цифр (символів, знаків) для формального (скороченого) запису представлення числа математичним виразом, які відіграють роль чисел або індексів. Він може бути скінченним та нескінченним, мінімальним та надлишковим, сталим та змінним.

3. Базис (базисну послідовність), якщо моделлю числа є ряд.

Існуючі сьогодні системи числення часто мають принципові відмінності. Класичною у цьому сенсі є s-кова система числення, де $1 < s \in N$, зокрема десяткова і двійкова.

Числові системи і системи числення обслуговують потреби обчислювальної математики й обчислювальної техніки, сучасних інформаційно-комунікаційних технологій, різні напрями прикладної математики й інформатики.

1. Нега – s–кове зображення як тривіальне перекодування s–кового зображення дійсних чисел

Нехай $1 < s$ – фіксоване натуральне число, $A_s \equiv \{0, 1, \dots, s-1\}$ – алфавіт s –кової системи числення, $L_s \equiv A_s \times A_s \times \ldots \times A_s \times \ldots$ — простір послідовностей елементів алфавіту A_s.

Нагадаємо, що зміст s–кового зображення $\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ числа $x \in [0; 1]$, де $(\alpha_n) \in L_s$, розкриває рівність

$$x = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s^2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{s^n} + \cdots \equiv \Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}. \tag{1}$$

Тут представленням числа x є ряд (1), при цьому послідовність $a_n = \overline{s}^n$ є базисною, а цифри α_n відіграють роль чисел у поданні числа і символів у його зображенні.

Теорема 1. *Для будь–якого числа $x \in [0;1]$ існує послідовність $(\tau_n) \in L_s$, така, що*

$$x = \frac{s}{s+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_n}{(-s)^n} \equiv \overline{\Delta}^s_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_n\ldots} = \tag{2}$$

$$= 1 - \frac{\gamma_1}{s} + \frac{\gamma_2}{s^2} - \frac{\gamma_3}{s^3} + \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{(-s)^n}, \tag{3}$$

де $\gamma_n \in \{1, 2, \ldots, s\}$.

Доведення. Добре відомо, що для числа x існує послідовність $(\alpha_n) \in L_s$, така, що

$$x = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{s^n} + \ldots.$$

Тоді

$$\begin{aligned} x &= 1 - 1 + \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2+1}{s^2} - \frac{1}{s^2} + \frac{\alpha_3}{s^3} + \frac{\alpha_4+1}{s^4} - \frac{1}{s^4} + \frac{\alpha_5}{s^5} + \ldots = \\ &= 1 - \frac{s-\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2+1}{s^2} - \frac{s-\alpha_3}{s^3} + \frac{\alpha_4+1}{s^4} - \frac{s-\alpha_5}{s^5} + \ldots = \\ &= 1 - \frac{\gamma_1}{s} + \frac{\gamma_2}{s^2} - \frac{\gamma_3}{s^3} + \frac{\gamma_4}{s^4} - \frac{\gamma_5}{s^5} + \ldots = \\ &= 1 + \frac{\gamma_1}{(-s)^1} + \frac{\gamma_2}{(-s)^2} + \frac{\gamma_3}{(-s)^3} + \frac{\gamma_4}{(-s)^4} + \frac{\gamma_5}{(-s)^5} + \ldots, \end{aligned}$$

де $\gamma_n = \begin{cases} s - \alpha_n, & \text{якщо } n\text{– непарне,} \\ \alpha_n + 1, & \text{якщо } n\text{– парне,} \end{cases} \quad \gamma_n \in \{1, 2, \ldots, s\}.$

Якщо покласти $\tau_n \equiv \gamma_n - 1$, то $\tau_n \in \{0, 1, 2, \ldots, s-1\}$ і маємо

$$x = 1 + \frac{\tau_1}{(-s)^1} - \frac{1}{s} + \frac{\tau_2}{(-s)^2} + \frac{1}{s^2} + \frac{\tau_3}{(-s)^3} - \frac{1}{s^3} + \frac{\tau_4}{(-s)^4} + \frac{1}{s^4} + \ldots.$$

Оскільки $1 - \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^3} + \ldots = \frac{s}{s+1}$, то

$$x = \frac{s}{s+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_n}{(-s)^n}, \quad \text{де} \quad \tau_n \in A_s,$$

що й треба було довести. □

Означення 1. *Розклад числа x у ряд (3) називається його* нега–s–ковим представленням*, а його формальний запис $\overline{\Delta}^s_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_n\ldots}$ — нега–s–ковим зображенням. При цьому τ_n називається n–ою цифрою даного зображення.*

Зауваження 1. *Хід доведення теореми 1 указує на зв'язок s–кового й нега–s–кового зображень одного і того самого числа, а саме: цифри τ_n нега–s–кового зображення $\overline{\Delta}^s_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_n\ldots}$ числа $x = \Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ обчислюються за формулою*

$$\tau_n = \begin{cases} s-1-\alpha_n, & \text{якщо} \quad n-\text{ непарне,} \\ \alpha_n, & \text{якщо} \quad n-\text{ парне.} \end{cases}$$

Якщо ж відоме нега–s–кове зображення числа $x = \overline{\Delta}^s_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_n\ldots}$, то цифри його s–кового зображення можна отримати за формулами:

$$\alpha_n = \begin{cases} s-1-\tau_n, & \text{якщо} \quad n-\text{ непарне,} \\ \tau_n, & \text{якщо} \quad n-\text{ парне.} \end{cases}$$

Отже,

$$\Delta^s_{a_1a_2\ldots a_n\ldots} = \overline{\Delta}^s_{[s-1-a_1]a_2[s-1-a_3]a_4[s-1-a_5]a_6\ldots}. \tag{4}$$

Рівність (4) дає підставу стверджувати, що нега–s–кове зображення фактично є лише перекодуванням s–кового зображення числа x. Для повнішого обґрунтування такого висновку проведемо аналіз його тополого–метричних властивостей.

2. Геометрія нега–s–кового зображення

Суть геометрії зображення чисел значною мірою розкривають властивості циліндричних множин. Нагадаємо, що *циліндром* *рангу m із основою $c_1c_2\ldots c_m$* для s–кового й нега–s–кового зображень відповідно називаються множини:

$$\Delta^s_{c_1c_2\ldots c_m} \equiv \{x : \alpha_i(x) = c_i,\ i = \overline{1,m}\},$$

$$\overline{\Delta}^s_{c_1c_2\ldots c_m} \equiv \{x : \tau_i(x) = c_i,\ i = \overline{1,m}\}.$$

1. Циліндр для кожного з зображень є відрізком, причому

   1.1. $\Delta^s_{c_1\ldots c_m} = [a;b]$, де $a = \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{c_i}{s^i}$, $b = a + \dfrac{1}{s^m}$;

   1.2. $\overline{\Delta}^s_{c_1\ldots c_m} = [A-B; A+C]$, $A = \dfrac{s}{s+1} + \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{c_i}{(-s)^i}$;

   $$B = \begin{cases} \dfrac{1}{s^m(s+1)}, & \text{якщо } m\text{– непарне,} \\ \dfrac{1}{s^{m-1}(s+1)}, & \text{якщо } m\text{– парне,} \end{cases}$$

   $$C = \begin{cases} \dfrac{1}{s^{m-1}(s+1)}, & \text{якщо } m\text{– непарне,} \\ \dfrac{1}{s^m(s+1)}, & \text{якщо } m\text{– парне;} \end{cases}$$

2. $|\Delta^s_{c_1c_2\ldots c_m}| = \dfrac{1}{s^m} = |\overline{\Delta}^s_{c_1c_2\ldots c_m}|$;

3. $\dfrac{|\Delta^s_{c_1c_2\ldots c_m i}|}{|\Delta^s_{c_1c_2\ldots c_m}|} = \dfrac{1}{s} = \dfrac{|\overline{\Delta}^s_{c_1c_2\ldots c_m i}|}{|\overline{\Delta}^s_{c_1c_2\ldots c_m}|}$;

4. $x = \Delta^s_{a_1a_2\ldots a_m\ldots} = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \Delta^s_{a_1a_2\ldots a_m}$;
   $x = \overline{\Delta}^s_{a_1a_2\ldots a_m\ldots} = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \overline{\Delta}^s_{a_1a_2\ldots a_m}$.

Властивість 3 циліндрів s–кового й нега–s–кового зображень називається *основним метричним відношенням.* Його вираз є свідченням близкості (і навіть збігу) відповідних метричних теорій.

Більше того, добре відомо [1, 14], що у випадку s–кового зображення для майже всіх (у розумінні міри Лебега) чисел $x \in [0; 1]$ існує границя

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \phi(1 - t + x_n) = v,$$

де x_n – дробова частина числа $s^{n-1}x$, тобто $x_n = \{s^{n-1}x\}$, $0 < v \le 1$,

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } 0 \le t \le 1, \\ 0, & \text{якщо } t < 0 \text{ або } t > 1. \end{cases}$$

Інакше кажучи, числа послідовності (x_n) майже для всіх x рівномірно розподілені на відрізку $[0; 1]$.

Зауваження 2. *Враховуючи зазначене, доходимо висновку, що розв'язки задач для нега–s–кового зображення, аналогічних до задач для s–кового зображення, можна отримати з відомих результатів для останнього переформулюванням у новій системі кодування з урахуванням указаних зв'язків.*

3. Представлення чисел додатними та знакозмінними рядами Кантора

Нехай (s_n) – фіксована послідовність натуральних чисел, більших або рівних 2; $A_{s_n} \equiv \{0, 1, \ldots, s_n - 1\}$ – послідовність алфавітів; $L \equiv A_{s_1} \times A_{s_2} \times \ldots \times A_{s_n} \times \ldots$.

Теорема 2. *[15] Для будь-якого числа $x \in [0; 1]$ існує послідовність $(a_n) \in L$, така, що*

$$x = \frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_1 s_2} + \ldots + \frac{a_n}{s_1 s_2 \ldots s_n} + \ldots \equiv \Delta^{(s_n)}_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots}. \qquad (5)$$

Ряд (5) називаються рядом Кантора. Розклад (1) є узагальненням класичного s–кового розкладу числа і збігається з ним при

$s_n = s$ для будь-якого $n \in N$. Зображення $\Delta^{(s_n)}_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}$ числа x називається $\Delta^{(s_n)}$ – зображенням. Воно ґрунтується на розвиненні числа в додатний ряд Кантора (5).

Теорема 3. *Якщо виконується рівність (5), то*

$$
\begin{aligned}
x &= 1 - \frac{\gamma_1}{s_1} + \frac{\gamma_2}{s_1 s_2} - \frac{\gamma_3}{s_1 s_2 s_3} + \frac{\gamma_4}{s_1 s_2 s_3 s_4} - \frac{\gamma_5}{s_1 s_2 s_3 s_4 s_5} + \dots \\
&= b - \frac{\tau_1}{s_1} + \frac{\tau_2}{s_1 s_2} - \frac{\tau_3}{s_1 s_2 s_3} + \frac{\tau_4}{s_1 s_2 s_3 s_4} - \dots + \frac{\tau_5}{s_1 s_2 s_3 s_4 s_5} + \dots \equiv \\
&\equiv \overline{\Delta}^{(s_n)}_{\tau_1 \tau_2 \dots \tau_n \dots},
\end{aligned}
\tag{6}
$$

де $b = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{s_1 s_2 \dots s_n} = \frac{s_1 - 1}{s_1} + \frac{s_3 - 1}{s_1 s_2 s_3} + \frac{s_5 - 1}{s_1 s_2 s_3 s_4 s_5} + \dots$,

$\gamma_n = \begin{cases} s_n - a_n, & \textit{якщо} \quad n - \textit{непарне}, \\ a_n + 1, & \textit{якщо} \quad n - \textit{парне}. \end{cases}$

$\gamma_n - 1 \equiv \tau_n \in A_{s_n} = \{0, 1, \dots s_n - 1\}$,

Доведення. З рівності (5) маємо

$$
\begin{aligned}
x &= 1 - 1 + \frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2 + 1}{s_1 s_2} - \frac{1}{s_1 s_2} + \frac{a_3}{s_1 s_2 s_3} + \frac{a_4 + 1}{s_1 s_2 s_3 s_4} - \frac{1}{s_1 s_2 s_3 s_4} + \\
&\qquad \frac{a_5}{s_1 s_2 s_3 s_4 s_5} + \dots = \\
&= 1 - \frac{s_1 - a_1}{s_1} + \frac{a_2 + 1}{s_1 s_2} - \frac{s_3 - a_3}{s_1 s_2 s_3} + \frac{a_4 + 1}{s_1 s_2 s_3 s_4} - \frac{s_5 - a_5}{s_1 s_2 s_3 s_4 s_5} + \dots = \\
&= 1 - \frac{\gamma_1}{s_1} + \frac{\gamma_2}{s_1 s_2} - \frac{\gamma_3}{s_1 s_2 s_3} + \frac{\gamma_4}{s_1 s_2 s_3 s_4} - \frac{\gamma_5}{s_1 s_2 s_3 s_4 s_5} + \dots,
\end{aligned}
$$

де $\gamma_n = \begin{cases} s_n - a_n, & \text{якщо} \quad n - \text{непарне}, \\ a_n + 1, & \text{якщо} \quad n - \text{парне}. \end{cases}$

Отже, $\gamma_n \in \{1, 2, \dots, s_n\}$.

Якщо покласти $\tau_n \equiv \gamma_n - 1$, то $\tau_n \in \{0, 1, 2, \dots, s_n - 1\}$ і матимемо

$$x = 1 - \frac{\tau_1}{s_1} - \frac{1}{s_1} + \frac{\tau_2}{s_1 s_2} + \frac{1}{s_1 s_2} + \frac{\tau_3}{s_1 s_2 s_3} - \frac{1}{s_1 s_2 s_3} + \frac{\tau_4}{s_1 s_2 s_3 s_4} + \\ + \frac{1}{s_1 s_2 s_3 s_4} + \ldots = \\ = b - \frac{\tau_1}{s_1} + \frac{\tau_2}{s_1 s_2} - \frac{\tau_3}{s_1 s_2 s_3} + \frac{\tau_4}{s_1 s_2 s_3 s_4} - \ldots$$

де $b = 1 - \dfrac{1}{s_1} + \dfrac{1}{s_1 s_2} - \dfrac{1}{s_1 s_2 s_3} + \ldots = \frac{s_1 - 1}{s_1} + \frac{s_3 - 1}{s_1 s_2 s_3} + \frac{s_5 - 1}{s_1 s_2 s_3 s_4 s_5} + \ldots,$
що й треба було довести. □

Зауваження 3. *Має місце рівність*

$$\Delta^{(s_n)}_{\gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_n \ldots} = \overline{\Delta}^{(s_n)}_{[s_1 - 1 - a_1] a_2 [s_2 - 1 - a_3] a_4 \ldots},$$

яка засвідчує факт перекодування $\Delta^{(s_n)}$-зображення в $\overline{\Delta}^{(s_n)}$-зображення (нега-зображення). Деталізує цей висновок аналіз метричних співвідношень, які породжують властивості циліндрів.

Означення 2. *Представлення числа x рядом (6) називаєтьcя його розкладом в знакопочережний ряд Кантора, а $\overline{\Delta}^{s_n}_{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_n \ldots}$ – $\overline{\Delta}^{s_n}$-зображенням числа x.*

Зауваження 4. *Теорема 3 встановлює зв'язок між представленнями того самого числа додатним рядом Кантора і знакопочережним рядом Кантора.*

Незважаючи на те, що нега–s–кове та нега–канторівське зображення чисел є перекодуваннями відомих s–кових і канторівських зображень, вони дають змогу розширити коло зручних аналітичних завдань неперервних функцій з нерегулярною локальною поведінкою (сингулярних, ніде не монотонних, недиференційовних, звивистих), ортогональних міри Лебега розподілів ймовірностей, динамічних систем з фрактальними атрактарами та ін. Наприклад, функція, означена рівністю

$$f\left(\bar{\Delta}^{2}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}\right) = \Delta^{L_2}_{b_1b_2\ldots b_n\ldots} = \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + \ddots}}},$$

де $b_n = \begin{cases} 0,5, & \text{якщо} \quad a_n = 0, \\ 1, & \text{якщо} \quad a_n = 1, \end{cases}$ є неперервною строго зростаючою функцією, похідна якої дорівнює 0 майже скрізь у розумінні міри Лебега.

Література

[1] *Гельфонд А. О.* Об одном общем свойстве систем счисления // Известие Академии наук СССР, Серия математическая. – 1959. – 23. – С. 809-814.

[2] *Касаткин В. Н.* Новое о системах счисления. – К.: Вища школа. – 1982. – 96 с.

[3] *Понтрягин Л. С.* Обобщение чисел. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат.лит. – 1986. – 120 с.

[4] *Працьовитий М. В.* Геометрія класичного двійкового зображення дійсних чисел. — Київ. Вид–во НПУ імені М. П. Драгоманова. – 2012. – 68 с.

[5] *Працьовитий М. В.* Системи числення зі змінною основою та змінним алфавітом (або розвинення чисел в ряди Кантора) // Студентські фізико-математичні етюди. – Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова. – 2009. – № 8. – С. 6-18.

[6] *Працьовитий М. В., Торбін Г. М.* Суперфрактальність множини чисел, які не мають частоти n-адичних знаків, та фрактальні розподіли ймовірностей //Укр. мат. журн. – 1995. – 47, № 7. – С. 971-975.

[7] *Працьовита І. М.* Про розклади чисел в знакозмінні s–адичні ряди і ряди Остроградського 1–го та 2–го виду // Український математичний журнал. – 2009. – 61 – № 7. – С. 958-968.

[8] *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. – Київ: Наукова думка. – 1992. – 208 с.

[9] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. – 1998. – 296 с.

[10] *Ралко Ю. В.* Зображення чисел рядами Кантора та деякі його застосування // Науковий часопи НПУ імені М. П. Драгоманова. – 2009, № 10. – С. 132-140.

[11] *Стахов А. П.* Алгоритмическая теория измерения. – М.: Знание. – 1979. – 64 с.

[12] *Фомин С. В.* Системы счисления. – М.: Наука. – 1987. – 48 с.

[13] *Schweiger F.* Ergodische theorie der engelschen und sylvesterschen reihen // Praha, Czechoslovak Mathematical Journal. – 1970. – 20(95). – P. 243-245.

[14] *Hardy G. H. and Littlewood J. E.* The fractional part of $n^k\Theta$ // Acta Math. – 1914. – 37. – P. 155-191.

[15] *Cantor G.* Uber die einfachen Zahlensysteme // Z. Math. Phys. – 1979. – Bd. 14. – P. 121-128.