Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2017, т. 14, № 4, 147–166

УДК 517.51

***М. В. Працьовитий*[1], *Н. А. Василенко*[2], *І. В. Замрій*[3]**

[1] *НПУ імені М. П. Драгоманова, Інститут математики НАН України, Київ; prats4444@gmail.com*

[2] *Інститут математики НАН України, Київ; vasylenkonnn@gmail.com*

[3] *Державний університет телекомунікацій, Київ; irinafraktal@gmail.com*

Сім'я функцій, які зберігають цифру Q_s-зображення чисел

We consider a polybase Q_s-representation $\Delta^{Q_s}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}$ of number x that is a generalizing of classic s-adic representation: $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} s^{-k}\alpha_k(x) = \Delta^{s}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}$, where $\alpha_k(x) \in A_s \equiv \{0,1,\ldots,s-1\}$. In the paper, we study continuum class of functions defined on $[0;1]$ and preserving one of the digits of Q_s-representation, namely:

$$f(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}) = \Delta^{Q_s}_{\delta_1\delta_2\ldots\delta_k\ldots}, \text{ where } \alpha_k, \delta_k \in A_s,$$

$$\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots} = \beta_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty}\Big(\beta_{\alpha_k(x)}\prod_{j=1}^{k} q_{\alpha_j(x)}\Big)$$

and $\delta_k = \varphi_k(\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_k(x))$ but $\delta_k = m$ if and only if $\alpha_k(x) = m$, where m is a fixed digit of alphabet A_s.

For some representatives of various subclasses of the family of functions preserving digit m of alphabet A_s, self-similar and fractal properties are studied in details.

Key words: Q_s-representation of real numbers; function preserving digit in Q_s-representation of number; level sets of function; inversor of digits of Q_s-representation of number; self-similarity of function (graph of function).

Робота присвячена вивченню континуального класу визначених на відрізку $[0;1]$ функцій, які зберігають одну з цифр поліосновного Q_s-зображення $\Delta^{Q_s}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}$ числа x, що є узагальненням класичного s-кового зображення: $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} s^{-k}\alpha_k(x) = \Delta^{s}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}$, де $\alpha_k(x) \in A_s \equiv \{0,1,\ldots,s-1\}$. А саме, функціям наступного виду:

$$f(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}) = \Delta^{Q_s}_{\delta_1\delta_2\ldots\delta_k\ldots}, \text{ де } \alpha_k, \delta_k \in A_s,$$

$$\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots} = \beta_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty}\Big(\beta_{\alpha_k(x)}\prod_{j=1}^{k} q_{\alpha_j(x)}\Big)$$

і при цьому $\delta_k = \varphi_k(\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_k(x))$, але $\delta_k = m$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha_k(x) = m$, де m – фіксована цифра алфавіту A_s. Для окремих представників різних підкласів сім'ї функцій, що зберігають цифру m алфавіту A_s, досліджено автомодельні й фрактальні властивості.

Ключові слова: Q_s-зображення дійсних чисел; функція, яка зберігає цифру Q_s-зображення числа; рівень функції; інверсор цифр Q_s-зображення числа; автомодельність функції (графіка функції).

Вступ

Багато неперервних на відрізку $[0;1]$ функцій мають фрактальні властивості. Для одних – це фрактальність графіка [2,3,16] (графік є фрактальною кривою простору $\mathbb{R}_2$), для других – це наявність фрактальних рівнів [1,3,11,14,15,16], а для третіх – це властивість функції зберігати розмірність Гаусдорфа-Безиковича всіх борелівських множин [6,10] тощо. Ніде не диференційовні функції утворюють потужний клас потенціально фрактальних функцій у першому сенсі. Останнім часом окремі класи функцій з фрактальними властивостями виділялись системою інваріантів зображення аргумента в тій чи іншій системі кодування. Наприклад, у роботі [13] вивчався клас функцій, які «зберігають» цифру 1 трисимвольного Q_3-зображення аргумента, що є узагальненням класичного трійкового. Як виявилось, такі функції не мають континуальних рівнів, їхні графіки не є фрактальним кривими у традиційному розумінні, хоча «слабо» фрактальними властивостями вони володіють (фрагменти графіка є афінно-еквівалентними до цілого [6,13,14]).

У цій роботі, розширюючи алфавіт ($A_s \equiv \{0, 1, \ldots, s-1\}$, $s > 3$), ми досліджуємо властивості скінченнопараметричного класу $P(m)$ функцій, які зберігають цифру $m \in A_s$. При цьому зосереджуємо увагу передусім на неперервних функціях з класу $P(m)$. Усі функції будуються з використанням перетворювача символів поліосновного Q_s-зображення дійсних чисел [10]. Останні зображення визначаються ймовірнісним вектором Q_s з додатними координатами $(q_0, q_1, \ldots, q_{s-1})$ і розкладом

$$[0;1] \ni x = \beta_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\beta_{\alpha_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j(x)} \right) \equiv \Delta^{Q_s}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots},$$

де $\alpha_k(x) \in A_s$, $\beta_0 = 0$, $\beta_i = \sum\limits_{j=0}^{i-1} q_j$.

Корисним для подальших міркувань є таке поняття [10].

Означення 1. *Нехай $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ – упорядкований набір елементів алфавіту A_s. Циліндром рангу n із основою $c_1c_2\ldots c_n$ називається множина $\Delta^{Q_s}_{c_1c_2\ldots c_n}$ усіх чисел $x \in [0,1]$, які мають таке Q_s-зображення: $x = \Delta^{Q_s}_{c_1c_2\ldots c_n\alpha_{n+1}\ldots\alpha_{n+k}\ldots}$, $\alpha_{n+k} \in A_s$.*

Циліндри мають властивості:

1) $\Delta^{Q_s}_{c_1c_2\ldots c_n} = \bigcup\limits_{j=0}^{s-1} \Delta^{Q_s}_{c_1\ldots c_n j}$;

2) $[0,1] = \bigcup\limits_{i_1=0}^{s-1} \bigcup\limits_{i_2=0}^{s-1} \dots \bigcup\limits_{i_n=0}^{s-1} \Delta^{Q_s}_{i_1 i_2 \dots i_n}$;

3) $max \Delta^{Q_s}_{c_1 c_2 \dots c_n i} = min \Delta^{Q_s}_{c_1 c_2 \dots c_n [i+1]}$;

4) $|\Delta^{Q_s}_{c_1 c_2 \dots c_n}| = \prod\limits_{i=1}^{n} q_{c_i} \to 0 \ (n \to \infty)$;

5) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Delta^{Q_s}_{c_1 \dots c_n} = x \equiv \Delta^{Q_s}_{c_1 \dots c_n \dots}$ для довільної послідовності (c_n), де $c_n \in A_s$.

Зауваження 1. *Зліченна множина точок має два формально різних зображення, які визначають одне і те саме число. Це числа виду:*

$$\Delta^{Q_s}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_{k-1}(x)\alpha_k(x)(0)} \equiv \Delta^{Q_s}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_{k-1}(x)[\alpha_k(x)-1](s-1)}.$$

Щоб надалі уникнути неоднозначності в зображенні числа, домовимось не використовувати зображення з періодом $s-1$ *(період символізують круглі дужки).*

Окрему увагу в цій роботі ми приділяємо модельним прикладам неперервних функцій указаного класу, рівні яких є континуальними фрактальними множинами.

1. Постановка задачі

Нехай m — фіксована цифра алфавіту A_s, (φ_n) — послідовність функцій, причому φ_n є функцією n змінних, визначеною на A^n_s. Розглядається сім'я функцій, які задовольняють умови:

$$y = f(x) = f(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_k(x)\dots}) = \Delta^{Q_s}_{\delta_1\delta_2\dots\delta_k\dots}, \text{ де} \tag{1}$$

$$\delta_k = \begin{cases} \varphi_k(\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots, \alpha_k(x)), \text{ якщо } \alpha_k(x) \in A_s \setminus \{m\}, \\ m, \text{ якщо } \alpha_k(x) = m, \end{cases} \tag{2}$$

і послідовність функцій φ_n є наперед заданою.

Означення 2. *Будемо говорити, що функція f, означена рівністю* (1)*, де* (φ_k) *– задана послідовність функцій, зберігає цифру $m \in A_s$ (без примноження), якщо для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ виконуеться:*

$$\delta_n = \delta_n(f(x)) = m \Longleftrightarrow \alpha_n = \alpha_n(x) = m. \tag{3}$$

Теорема 1. *Множина $P(m)$ усіх функцій f, які визначені на* $[0;1]$ *і зберігають цифру m Q_s-зображення чисел, є континуальною.*

Доведення. Нехай $\{i, m, j\} \subset A_s$, причому $i \neq m \neq j \neq i$. На множині A_s означимо дві дискретні функції:

$$\rho(d) = \begin{cases} m, & \text{якщо } d = m, \\ i, & \text{якщо } d \neq m; \end{cases} \quad \tau(d) = \begin{cases} m, & \text{якщо } d = m, \\ j, & \text{якщо } d \neq m. \end{cases}$$

Нехай $B = \{\rho, \tau\}$, $L \equiv B \times B \times \ldots \times B \times \ldots$. Очевидно, що простір L послідовностей функцій ρ і τ є континуальним.

Визначимо сім'ю F функцій f з $P(m)$ рівністю:

$$f(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}) = \Delta^{Q_s}_{\delta_1(\alpha_1)\delta_2(\alpha_2)\ldots\delta_k(\alpha_k)\ldots},$$

де $(\delta_n) \in L$.

Покажемо, що довільні дві функції f_1 і f_2 з сім'ї F не є тотожно рівними, тобто що для довільних двох різних послідовностей $(\delta_n), (\phi_n) \in L$ різними є відповідні функції f_1 і f_2:

$$f_1(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}) = \Delta^{Q_s}_{\delta_1(\alpha_1)\delta_2(\alpha_2)\ldots\delta_k(\alpha_k)\ldots},$$

$$f_2(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}) = \Delta^{Q_s}_{\phi_1(\alpha_1)\phi_2(\alpha_2)\ldots\phi_k(\alpha_k)\ldots}.$$

Розглянемо точку $x_0 = \Delta^{Q_s}_{(ij)}$. Оскільки послідовності (δ_n) і (ϕ_n) різні, то існує такий номер $k \in \mathbb{N}$, що $\delta_k(f_1(x_0)) \neq \phi_k(f_2(x_0))$.

Тоді у випадку, коли $|i - j| > 1$, маємо

$$|\delta_k(\alpha_k(x_0)) - \phi_k(\alpha_k(x_0))| > 1.$$

Звідки отримуємо $f_1(x_0) \neq f_2(x_0)$. Зрозуміло, що якщо $s > 3$, то вибір цифр i, j можна здійснити таким чином, що умова $|i-j| > 1$ гарантується.

Розглянемо випадок, коли числа m і s визначили єдиноможливий вибір цифр i, j і при цьому $|i-j| = 1$. Це могло трапитися лише коли $s = 3$ і (а) $i, j \in \{0, 1\}$ або (б) $i, j \in \{1, 2\}$. Тоді, враховуючи, що послідовності (δ_n) і (ϕ_n) в кожному з випадків можуть використовувати лише один з періодів: (0) або (2), то отримаємо

$$|\delta_k(\alpha_k(x_0)) - \phi_k(\alpha_k(x_0))| = 1,$$

тобто функції $f_1(x_0)$ та $f_2(x_0)$ не збігаються.

Оскільки F і L мають однакові потужності і $F \subset P(m)$, то множина $P(m)$ є континуальною. □

2. Фрактальні функції з класу $P(m)$

Підклас «простих» функцій сім'ї $P(m)$ утворюють функції f, для яких $\delta_n = \varphi(\alpha_n(x))$, де φ – задана функція, названі в роботі [16] канторівськими проекторами. Їхні графіки є самоподібними фракталами, а більшість їхніх рівнів мають фрактальні властивості (дробову розмірність Гаусдорфа-Безиковича [10]).

П р и к л а д 1. Нехай $s = 5$, $m = 3$,

$$\delta_n = \varphi(\alpha_n) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \alpha_n < 3, \\ 3, & \text{якщо } \alpha_n = 3, \\ 4, & \text{якщо } \alpha_n > 3. \end{cases}$$

Розглядається відображення $f(\Delta^{Q_5}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}) = \Delta^{Q_5}_{\delta_1\delta_2\ldots\delta_k\ldots}$.

Якщо не використовувати такого зображення числа $x = \Delta^{Q_5}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}[\alpha_k-1](4)}$, то легко впевнитися, що відображення f є функцією. Дослідимо властивості функції f.

Лема 2. *(1) Множиною значень E_f функції f є самоподібна множина канторівського типу $C[Q_5, \{0, 3, 4\}] = \{y : y =$*

$\Delta^{Q_5}_{\delta_1\delta_2\ldots\delta_n\ldots}, \delta_n \in \{0,3,4\}\}$, *розмірність Гаусдорфа-Безиковича якої є розв'язком рівняння*

$$q_0^x + q_3^x + q_4^x = 1.$$

(2) Якщо рівень y_0 функції f у своєму Q_5-зображенні містить скінченну кількіть нулів, то він скінченний, а якщо нескінченну – то континуальний, причому коли

$$\alpha_{n_k}(y_0) = 0, k \in N, \text{ а } \alpha_i(y_0) \neq 0 \text{ при } i \notin (n_k),$$

то розмірність Гаусдорфа-Безиковича α_0 множини $f^{-1}(y_0)$ задовольняє нерівність

$$0 \le \alpha_0(f^{-1}(y_0)) < \alpha_0^* = \alpha_0(f^{-1}(0)),$$

де α_0^* є розв'язком рівняння

$$q_0^x + q_1^x + q_2^x = 1. \tag{4}$$

Доведення. Правильність твердження (1) обґрунтовано в роботі [16].

Доведемо твердження (2). Розглянемо рівень $y_0 = \Delta^{Q_5}_{\delta_1\delta_2\ldots\delta_n\ldots} = f(x_0)$, де $x_0 = \Delta^{Q_5}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$. Висновок про потужність рівня y_0 є наслідком того, що при $\delta_n = 0$ виконується:

$$\left\{\Delta^{Q_5}_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}0\alpha_{n+1}\ldots}, \Delta^{Q_5}_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}1\alpha_{n+1}\ldots}, \Delta^{Q_5}_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}2\alpha_{n+1}\ldots}\right\} \in f^{-1}(y_0).$$

Маючи альтернативи лише на скінченній кількості місць цифр Q_5-зображення точки x_0, маємо скінченну кількість прообразів y_0.

Якщо ж таких місць нескінченна множина, то континуальність множини прообразів y_0 очевидна.

Рівень

$$f^{-1}(0) = \{x : x = \Delta^{Q_5}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}, \alpha_n \in \{0,1,2\}, n \in N\} = C[Q_5; \{0,1,2\}]$$

вочевидь є наймасивнішим і його розмірність (як відомо з [16]) є розв'язком рівняння (4). □

Лема 3. *Якщо Q_5-зображення числа $y_0 \in E_f$ містить нескінченну кількість 0 і нескінченну кількість цифр 3 (або 4), причому частота $\nu_0(y_0)$ цифри 0 дорівнює 0, то $f^{-1}(y_0)$ є аномально фрактальною множиною.*

Доведення. Оскільки $f^{-1}(y_0) = C[Q_5, V_n]$, де

$$V_n = \begin{cases} \{0,1,2\}, \text{ якщо } \alpha_n(y_0) = 0, \\ 3, \text{ якщо } \alpha_n(y_0) = 3, \end{cases}$$

то кожен прообраз y_0 має частоти цифр $0, 1, 2$, які дорівнюють 0. А тому згідно з теоремою [10, С. 99] розмірність Гаусдорфа-Безиковича цієї множини обчислюється за формулою

$$\alpha_0 = \frac{\ln \nu_0^{\nu_0} \nu_1^{\nu_1} \nu_2^{\nu_2} \nu_3^{\nu_3} \nu_4^{\nu_4}}{\ln q_0^{\nu_0} q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2} q_3^{\nu_3} q_4^{\nu_4}} = \frac{\ln 1}{\ln q_3} = 0.$$

□

П р и к л а д 2. Розглянемо відображення $g(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}) = \Delta^{Q_s}_{\delta_1\delta_2\ldots\delta_k\ldots}$, де $\alpha_n \in A_s$, $\delta_n = \varphi(\alpha_n)$, причому

$$\varphi(\alpha_n) = \begin{cases} m, \text{ якщо } \alpha_n = m, \\ j \in A^*_{c_k}, \text{ якщо } \alpha_n \neq m, \end{cases} \tag{5}$$

де $A^*_{c_k} \equiv \{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$, $1 \leq k \leq s-2$, $c_i \in A_s \backslash \{m\}$, $c_i \neq c_j$ при $i \neq j$.

Зрозуміло, що відображення g буде функцією, якщо не використовувати зображень точок x, які містять період $(s-1)$.

Лема 4. *Якщо множина $A^*_{c_k}$ така що $1 \leq k \leq s-2$, то функція g відображає відрізок $[0;1]$ на множину канторівського типу C.*

Доведення. Нехай задано $A^*_{c_k}$, таку що $1 \leq k \leq s-2$. Тоді, згідно з заданням функції g, принаймні дві Q_s-цифри аргументу мають один образ, тобто існує нескінченна кількість y_0, таких, що множина $g^{-1}(y_0)$ прообразів точки y_0 є порожньою. Тому функція g, Q_s-цифри якої визначені системою (5), відображає відрізок $[0;1]$ на множину канторівського типу C. □

3. Неперервні функції з класу $P(m)$

Позначимо через $P_c(m)$ множину неперервних функцій з класу $P(m)$. Наведемо деякі приклади функцій з множини $P_c(m)$.

П р и к л а д 1. Тотожне перетворення відрізка $[0;1]$, тобто функція вигляду:

$$e(x) = e(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}) = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots} = x, \qquad (6)$$

належить до класу $P_c(m)$ за будь-якого значення $m \in A_s$.

П р и к л а д 2. Функція

$$I(x) = I(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}) = \Delta^{Q_s}_{[s-1-\alpha_1(x)][s-1-\alpha_2(x)]\ldots[s-1-\alpha_k(x)]\ldots}, \qquad (7)$$

за умови, що s – непарне число, є прикладом неперервної функції з класу $P(\left[\frac{s-1}{2}\right])$ і називається інверсором цифр Q_s-зображення чисел.

Лема 5. *Якщо $s = 4$, то множина $P_c(m)$ складається з однієї функції — тотожного перетворення відрізка* $[0;1]$.

Доведення. Припустимо, що $P_c(m) \supset \{e, f\}$, причому принаймні для однієї точки $x_1 \in [0;1]$ виконується $f(x_1) \neq e(x_1)$.

Нехай $\square^j_i \equiv \Delta^{Q_4}_i \times \Delta^{Q_4}_j$ – циліндричний прямокутник першого рангу, його внутрішність позначатимемо через $\boxdot^j_i$. Тоді одиничний квадрат $\square$ є таким об'єднанням:

$$\square \equiv [0;1] \times [0;1] = \cup^3_{j=0} \cup^3_{i=0} \square^j_i.$$

Нехай функція f зберігає цифру $m = 2$. Оскільки кожна пряма, паралельна осі OY, перетинає графік не більше, ніж в одній точці і графік проходить через точку $M(\Delta^{Q_4}_{(m)}; \Delta^{Q_4}_{(m)})$, то $\boxdot^j_2 \cap \Gamma_f = \varnothing$, $j \in \{0, 1, 3\}$.

Оскільки функція f зберігає цифру m, то серед внутрішніх точок прямокутників $\boxdot^2_0$, $\boxdot^2_1$, $\boxdot^2_3$ точок графіка функції f немає.

Крім цього, враховуючи неперервність функції f можна стверджувати, що серед внутрішніх точок прямокутників $\boxdot_3^0$ і $\boxdot_1^0$ точок графіка Γ_f немає. Таким чином, графік Γ_f функції f належить об'єднанню: $\square_0^0 \cup \square_0^1 \cup \square_0^2 \cup \square_1^1 \cup \square_1^3 \cup \square_2^2 \cup \square_3^1 \cup \square_3^3 \equiv G$ (див. рис. 1 а))

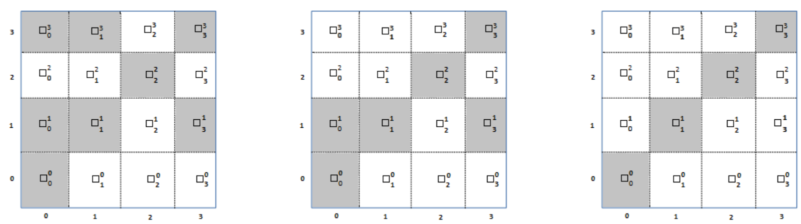

Рис. 1: а) б) в)

Оскільки фігура G не має симетрій, а функція f зберігає цифру 2, доходимо висновку, що в кожному з прямокутників об'єднання G, серед внутрішніх точок яких є точки графіка, частина графіка $\square_i^j \cap \Gamma_f$ є афінно подібною до всього графіка, причому отримується з нього за допомогою паралельного перенесення. Додатково врахувавши неперервність функції f, отримаємо: $\square_2^3 \cap \Gamma_f = \varnothing$, але тоді $\square_0^3 \cap \Gamma_f = \varnothing$. Таким чином, графік функції f належить такому об'єднанню (див. рис. 1 б)).

Далі, врахувавши попередні міркування, отримаємо: $\square_3^1 \cap \Gamma_f = \varnothing$, та $\square_0^1 \cap \Gamma_f = \varnothing$, тобто графік функції належить такому об'єднанню: $\square_0^0 \cup \square_1^1 \cup \square_2^2 \cup \square_3^3$ (див. рис. 1 в)), який відповідає функції $e(x)$. Отримали протиріччя, що й доводить твердження.

Випадки, коли $m = 0$, $m = 1$, $m = 3$, розглядають за допомогою аналогічних міркувань, як і для випадку $m = 0$. $\square$

Лема 6. *Якщо функція f належить множині $P_c(m)$, то для довільних $x \in [0;1]$ і $n \in \mathbb{N}$ має місце нерівність:*

$$|m - \delta_n(f(x))| \leq |m - \alpha_n(x)|, \tag{8}$$

де $f(x) = f(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots}) = \Delta^{Q_s}_{\delta_1\delta_2\ldots\delta_n\ldots}$.

Доведення. Нехай $f \in P_c(m)$. Із неперервності функції f на відрізку $[0;1]$ випливає її неперервність на кожному циліндрі довільного рангу. Зафіксуємо $n \in \mathbb{N}$, довільно його обравши, і знайдемо можливі значення цифри δ_n функції f на циліндрі $\Delta^{Q_s}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}\alpha_n}$ при кожному обраному α_n.

Нехай $\alpha_n = m$. Тоді з формул (1)-(2) отримаємо $\delta_n = \varphi_n(c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, m) = m$, звідки випливає, що формула (8) виконується.

Розглянемо тепер (два або один – залежно від значення цифри m) суміжні з $\Delta^{Q_s}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}m}$ циліндри, тобто нехай $A_s \ni \alpha_n = m \pm 1$. Із формули (3) випливає, що $\delta_n = \varphi_n(c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, m \pm 1) \neq m$, а враховуючи неперервність функції f для суміжних із $\Delta^{Q_s}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}m}$ циліндрів, отримаємо:

$$\delta_n = \varphi_n(c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, m+1) = \varphi_n(c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, m) \pm 1 = m \pm 1,$$

$$\delta_n = \varphi_n(c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, m-1) = \varphi_n(c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, m) \pm 1 = m \pm 1,$$

тобто $\delta_n \in \{m-1, m+1\}$ при $\alpha_n = m \pm 1$. Звідки легко помітити, що нерівність (8) виконується.

Відповідно, для $A_s \ni \alpha_n = m \pm 2$ отримаємо:

$$\delta_n = \varphi_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, m+2) = \left[\begin{array}{l} \varphi_n(c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, m+1), \\ \varphi_n(c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, m+1) - 1, \\ \varphi_n(c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, m+1) + 1, \end{array}\right.$$

$$\delta_n = \varphi_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, m-2) = \left[\begin{array}{l} \varphi_n(c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, m-1), \\ \varphi_n(c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, m-1) - 1, \\ \varphi_n(c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, m-1) + 1, \end{array}\right.$$

при цьому врахувавши умову (3) маємо, що

$$\delta_n = \varphi_n(c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, m \pm 2) \in \{m-2, m-1, m+1, m+2\}.$$

Звідки можна впевнитися, що нерівність (8) має сенс.

Аналогічними міркуваннями за скінченну кількість корків можна показати, що для всіх значень $j \in A_s$ і всіх цифр $A_s \setminus \{m\} \ni \alpha_n = m \pm j$ виконується:

$$\delta_n{=}\varphi_n(c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, m{+}j){=}\left[\begin{array}{l}\varphi_n(c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, m + j - 1),\\ \varphi_n(c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, m + j - 1) - 1,\\ \varphi_n(c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, m + j - 1) + 1;\end{array}\right.$$

$$\delta_n{=}\varphi_n(c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, m{-}j){=}\left[\begin{array}{l}\varphi_n(c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, m{-}j + 1),\\ \varphi_n(c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, m{-}j + 1) - 1,\\ \varphi_n(c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, m{-}j + 1) + 1;\end{array}\right.$$

тобто

$$\delta_n \in \{m{-}j, m{-}[j{-}1], \ldots, m{-}1, m{+}1, \ldots, m{+}j, m{+}j{-}1, m{+}j\}.$$

Звідки $|m - \alpha_n| = j$, а $|m - \delta_n| \in \{1, 2, \ldots, j\}$.

Отже, маємо, що формула (8) виконується для всіх значень $\alpha_n \in A_s$. □

Лема 7. *При $m \neq \frac{s-1}{2}$ множина $P_c(m)$ складається з однієї функції — тотожного перетворення відрізка* $[0; 1]$.

Доведення. Припустимо, що $P_c(m) \supset \{e, f\}$. Тоді існуватиме принаймні одна точка $x_1 \in [0; 1]$ така, що $f(x_1) \neq e(x_1)$. Це означає, що для функції f існує мінімальне число $d \in A_s$ і циліндр $\Delta^{Q_s}_{c_1 c_2 \ldots c_{n-1} d}$ мінімального рангу $n \in \mathbb{N}$, на якому $\delta_n(f(x_1)) = \varphi_n(c_1, \ldots, c_{n-1}, d) \neq d$. Причому або $\varphi_n(c_1, \ldots, c_{n-1}, d{-}1) = d{-}1$ або $\varphi_n(c_1, \ldots, c_{n-1}, d + 1) = d + 1$. Враховуючи неперервність функції f, отримаємо, що

1) на циліндрі $\Delta^{Q_s}_{c_1 \ldots c_{n-1} d}$, суміжному до $\Delta^{Q_s}_{c_1 \ldots c_{n-1} [d-1]}$ виконується:

$$\delta_n(f(x_1)){=}\varphi_n(c_1, \ldots, c_{n-1}, d){=}\begin{cases}\varphi_n(c_1, \ldots, c_{n-1}, d - 1){-}1 = d - 2,\\ \varphi_n(c_1, \ldots, c_{n-1}, d - 1){+}1 = d;\end{cases} \tag{9}$$

2) або на циліндрі $\Delta^{Q_s}_{c_1\ldots c_{n-1}d}$, суміжному до $\Delta^{Q_s}_{c_1\ldots c_{n-1}[d+1]}$, виконується:

$$\delta_n(f(x_1)) = \varphi_n(c_1,\ldots,c_{n-1},d) = \begin{cases} \varphi_n(c_1,\ldots,c_{n-1},d+1)-1 = d, \\ \varphi_n(c_1,\ldots,c_{n-1},d+1)+1 = d+2. \end{cases} \tag{10}$$

Розглянемо випадок 1). Зазначивши, що згідно із припущенням друга рівність системи (9) неможлива, отримаємо, що $\delta_n(f(x_1)) = d-2$.

Не порушуючи загальності, можна вважати, що точка x_1 є Q_s-раціональною точкою і має таке Q_s-зображення:

$$\Delta^{Q_s}_{c_1\ldots c_{n-1}d(0)} = x_1 = \Delta^{Q_s}_{c_1\ldots c_{n-1}[d-1](s-1)}.$$

Оскільки $\varphi_n(c_1,\ldots,c_{n-1},d) = d-2$, а $\varphi_n(c_1,\ldots,c_{n-1},d-1) = d-1$, то рівність $f(\Delta^{Q_s}_{c_1\ldots c_{n-1}d(0)}) = f(\Delta^{Q_s}_{c_1\ldots c_{n-1}[d-1](s-1)})$ можлива лише у випадку, коли для всіх $j \in \mathbb{N}$ виконується:

$$\begin{cases} \varphi_{n+j}(c_1,\ldots,c_{n-1},d,\underbrace{0\ldots0}_{j}) = s-1, \\ \varphi_{n+j}(c_1,\ldots,c_{n-1},d,\underbrace{s-1\ldots s-1}_{j}) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Але цифра m вибрана так, що $A_s \ni m \neq \frac{s-1}{2}$, тому, скориставшись лемою 8, легко впевнитися, що система (11) є несумісною за будь-якого допустимого значення цифри m. Тому $f(\Delta^{Q_s}_{c_1\ldots c_{n-1}d(0)}) \neq f(\Delta^{Q_s}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}[d-1](s-1)})$. Але останнє суперечить припущенню, що $f \in P_c(m)$. Отримане протиріччя доводить твердження.

У випадку 2) доведення проводиться аналогічно до 1), тільки для Q_s-зображення точки x_1 треба розглянути таке:
$\Delta^{Q_s}_{c_1\ldots c_{n-1}d(s-1)} = x_1 = \Delta^{Q_s}_{c_1\ldots c_{n-1}[d+1](0)}$. □

4. Модельний приклад функції з класу $P_c(m)$, рівень якої є континуальною множиною

Нехай $s = 7$, $A_7 = \{0, 1, \dots, 6\}$. Визначимо на A_7 дискретну функцію $\tau(\alpha)$:

$$\tau(\alpha) = \begin{cases} 6 - \alpha, \text{ якщо } \alpha \leq 3, \\ 2, \text{ якщо } \alpha > 3. \end{cases} \tag{12}$$

На відрізку $[0;1]$ розглядається відображення:

$$f(x) = f(\Delta^{Q_7}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_k(x)\dots}) = \Delta^{Q_7}_{\delta_1\delta_2\dots\delta_k\dots}, \tag{13}$$

де $\delta_1 = \tau(\alpha_1)$, а всі інші цифри визначаються з таких умов:
а) якщо $\delta_{k-1} = 2$, то

$$\delta_k = \begin{cases} \tau(\alpha_k) \text{ при } \alpha_{k-1} \in \{1, 4, 6\}, \\ \tau(6 - \alpha_k), \text{ при } \alpha_{k-1} \in \{0, 2, 5\}; \end{cases} \tag{14}$$

б) якщо ж $\delta_{k-1} \geq 3$, то всі наступні цифри, починаючи з δ_k, визначаються з системи:

$$\delta_{k+j} = \begin{cases} 6 - \alpha_{k+j} \text{ при } \alpha_{k-1} \in \{0, 1, 2, 3\}, \\ \alpha_{k+j} \text{ при } \alpha_{k-1} \in \{4, 5, 6\}. \end{cases} \tag{15}$$

Теорема 8. *Відображення f є неперервною на відрізку $[0;1]$ функцією.*

Доведення. Спочатку покажемо, що відображення f є функцією. Тобто, що для кожного числа $x \in [0;1]$ існує, причому єдине, значення $y \in [0;1]$, таке, що $y = f(x)$.

Оскільки зліченна множина точок $x \in [0;1]$ (тобто множина Q_7-раціональних чисел) має два (формально різні) зображення, а всі решта — єдине, то порушення вимоги єдиності значення y при відображенні f може відбуватися лише в точках виду

$x_1 \equiv \Delta^{Q_7}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}\alpha_k(0)} = \Delta^{Q_7}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}[\alpha_k-1](6)} \equiv x_2$. Знайдемо значення функції f у цих точках.

Скориставшись формулами (12)-(15), для значень функції f маємо такі можливі випадки:

1) $\delta_{k-1} \geq 3$ і $\alpha_{k-1} \leq 3$;

2) $\delta_{k-1} \geq 3$ і $\alpha_{k-1} \geq 3$;

3) $\delta_{k-1} = 2$ і $\alpha_{k-1} \in \{1, 4, 6\}$;

4) $\delta_{k-1} = 2$ і $\alpha_{k-1} \in \{0, 2, 5\}$.

Випадки 2) й 4) розглядаються аналогічно до відповідних для них випадків 1) і 3). Тому проведемо міркування для випадків 1) та 3).

1) Нехай $\delta_{k-1} \geq 3$ і $\alpha_{k-1} \leq 3$. Тоді з вище зазначених формул (12)-(15) отримаємо, що цифра $\alpha_k(x_1) = \alpha_k$ при відображенні f переходить у відповідну цифру $\delta_k(f(x_1)) = 6 - \alpha_k$, а цифра $\alpha_k(x_2) = [\alpha_k - 1]$ — у цифру $\delta_k(f(x_2)) = 6 - [\alpha_k - 1] = 7 - \alpha_k$.

Таким чином, $f(x_1) = \Delta^{Q_7}_{\delta_1\delta_2\ldots\delta_{k-1}[6-\alpha_k](6)}$, $f(x_2) = \Delta^{Q_7}_{\delta_1\delta_2\ldots\delta_{k-1}[7-\alpha_k](0)}$. Звідки отримаємо рівність $f(x_1) = f(x_2)$.

3) Нехай $\delta_{k-1} = 2$ і $\alpha_{k-1} \in \{1, 4, 6\}$. Тоді з формул (12)-(15) маємо, що цифра $\alpha_k(x_1) = \alpha_k$ при відображенні f переходить у цифру $\delta_k(f(x_1)) = \tau(\alpha_k)$, а для значень $\delta_k(f(x_2))$, де $\alpha_k(x_2) = [\alpha_k - 1] \in \{0, 3, 5\}$, можливі такі випадки:

3а) $\delta_k(f(x_2)) = \tau(6 - \alpha_k(x_2))$;

3б) $\delta_k(f(x_2)) = 3$.

Розглянемо кожен випадок окремо.

3а) Нехай $\delta_k(f(x_2)) = \tau(6 - \alpha_k(x_2)) = \tau(7 - \alpha_k)$. Таким чином,

$$f(x_1) = f(\Delta^{Q_7}_{\delta_1\delta_2\ldots\delta_{k-1}[\tau(\alpha_k)](6)}) \text{ і } f(x_2) = \Delta^{Q_7}_{\delta_1\delta_2\ldots\delta_{k-1}[\tau(7-\alpha_k)](0)}.$$

Враховуючи, що $\alpha_k \neq 0$, безпосередньою перевіркою можна впевнитися у збіганні значень $f(x_1)$ і $f(x_2)$.

3б) Нехай $\delta_k(f(x_2)) = 3$. Такий варіант можливий лише коли $\alpha_k(x_1) = 4$. Таким чином, $\delta_k(f(x_1)) = 2$, цифри $\alpha_{k+j}(x_2) = 6$ при відображенні f переходять у цифри $\delta_{k+j}(f(x_2)) = 0$, а цифри

$\alpha_{k+j}(x_1) = 0$ — у цифри $\delta_{k+j}(f(x_1)) = 6$. Тобто маємо такі два зображення функції:

$$f(x_1) = \Delta^{Q_7}_{\delta_1\delta_2\ldots\delta_{k-1}2(6)}, f(x_2) = \Delta^{Q_7}_{\delta_1\delta_2\ldots\delta_{k-1}3(0)},$$

значення яких вочевидь збігаються.

Так, із наведених міркувань випливає, що відображення f є функцією.

Для доведення неперервності функції f у довільній точці $x_0 \in [0;1]$ достатньо показати, що $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$.

Неперервність функції f у Q_7-раціональних точках випливає з попередніх міркувань (доведення коректності зображення функції у Q_7-раціональних точках). Тому залишається розглянути випадок, коли x_0 — Q_7-ірраціональне число.

Нехай $x_0 = \Delta^{Q_7}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$. Для довільного числа x існує номер $n = n(x)$ такий, що:

$$\begin{cases} \alpha_i(x) = \alpha_i(x_0), & i = \overline{1, n-1} \\ \alpha_n(x) \neq \alpha_n(x_0). \end{cases}$$

Умова $x \to x_0$ рівносильна умові $n \to \infty$. Отож:

$$|f(x)-f(x_0)| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} \beta_{\delta_i(f(x))} \prod_{j=1}^{i-1} q_{\alpha_j(f(x))} - \sum_{i=1}^{\infty} \beta_{\delta_i(f(x_0))} \prod_{j=1}^{i-1} q_{\alpha_j(f(x_0))} \right| =$$

$$= \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j(f(x))} \left| \sum_{i=n}^{\infty} \beta_{\delta_i(f(x))} \prod_{j=n}^{i-1} q_{\alpha_j(f(x))} - \sum_{i=n}^{\infty} \beta_{\delta_i(f(x_0))} \prod_{j=n}^{i-1} q_{\alpha_j(f(x_0))} \right| \leq$$

$$\prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j(f(x))} \leq \left(\max_{q_i \in Q_7} \{q_i\} \right)^n \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Отже, функція f неперервна в кожній точці відрізка $[0;1]$. □

Лема 9. *Якщо:*

(1) у Q_7-зображенні точки $y_0 = \Delta^{Q_7}_{\delta_1\delta_2...\delta_k...}$ всі цифри $\delta_j \in \{0,1\}$, то множина $f^{-1}(y_0)$ є порожньою;

(2) у Q_7-зображенні точки $y_0 = \Delta^{Q_7}_{\delta_1\delta_2...\delta_k...}$ цифра $\delta_1 \neq 2$, то множина $f^{-1}(y_0)$ складається з однієї точки $x = \Delta^{Q_7}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k...}$, де $\alpha_j(x) = 6 - \delta_j(y_0)$;

(3) $y_0 = \Delta^{Q_7}_{\underbrace{2....2}_{m}...\delta_1\delta_2...\delta_k....}$, то множина $f^{-1}(y_0)$ складається з 3^m точок;

(4) $y_0 = \Delta^{Q_7}_{(2)}$, то множина $f^{-1}(y_0)$ є континуальною.

Доведення. Доведення твердження (1) є очевидним і спирається на формули (12)-(15) — означення функції f.

Твердження (2) доведемо методом від супротивного.

Нехай у Q_7-зображенні точки $y_0 = \Delta^{Q_7}_{\delta_1\delta_2...\delta_k...}$ цифра $\delta_1(y_0) \neq 2$. Припустимо, що множина $f^{-1}(y_0)$ містить принаймні дві різні точки: $x = \Delta^{Q_7}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k...}$ й $x' = \Delta^{Q_7}_{\alpha'_1\alpha'_2...\alpha'_k...}$. Тоді існує номер m, такий, що

$$\begin{cases} \alpha_i(x) = \alpha'_i(x') \text{ при } i < m, \\ \alpha_m(x) \neq \alpha'_m(x'). \end{cases}$$

Оскільки $\delta_1(y_0) \neq 2$, то згідно з формулою (12) маємо, що $\delta_1(y_0) \geq 3$. Тоді з формули (15) випливає, що для довільного $k \in \mathbb{N}$ виконується: $\delta_k(y_0) = 6 - \alpha_k(x)$, звідки $\alpha_k(x) = 6 - \delta_k(y_0)$. А отже, остання рівність виконується і для $k = m$, тобто $\alpha_m(x) = 6 - \delta_m(y_0)$, $\alpha'_m(x') = 6 - \delta_m(y_0)$. Звідки випливає, що $\alpha_m(x) = \alpha'_m(x')$. Отримали протиріччя, що й доводить твердження.

Доведемо твердження (3). Нехай $y_0 = \Delta^{Q_7}_{\underbrace{2...2}_{m}...\delta_{m+1}\delta_{m+2}...\delta_{m+k}...}$.

З формул (12)-(15) легко помітити, що для $n \leq m$ кожна Q_7-цифра $\delta_n(y_0) = 2$ має 3 альтернативи для Q_7-цифр $\alpha_n(x)$ зображення числа $x \in f^{-1}(y_0)$. При цьому, оскільки $\delta_{m+1}(y_0) \neq 2$, то всі цифри $\alpha_{m+j}(x)$ мають одну фіксовану Q_7-цифру, яка однозначно визначається з формули (15). Тому множина $f^{-1}(y_0)$ містить 3^m точок.

Доведемо твердження (4). Нехай $y_0 = \Delta^{Q_7}_{(2)}$. Згідно з формулами (12)-(15) маємо, що множина $f^{-1}(y_0)$ є зліченним об'єднанням множин виду:

$$f^{-1}(y_0) = E_0 \bigcup E_0^1 \bigcup E,$$

де $E_0 = C[Q_7, V_0] = \{x : \alpha_j(x) \in V_0 = \{4, 6\}\}$, $E_0^1 = C[Q_7, V_1] = \{x : x = \Delta^{Q_7}_{5\alpha_1\alpha_2...\alpha_k...},\ \alpha_j(x) \in V_1 = \{0, 2\}\}$, а множина E складається зі зліченного об'єднання множин, подібних до E_0 і E_0^1. Такими множинами можуть, наприклад, бути:

$$E^{(1)}_{2k} = C[Q_7, V_0] = \{x : x = \Delta^{Q_7}_{\underbrace{51...51}_{2k}\alpha_1\alpha_2...\alpha_k...},\ \alpha_j \in V_0 = \{4, 6\}\},$$

$$E^{(1)}_{2k+1} = C[Q_7, V_1] = \{x : x = \Delta^{Q_7}_{\underbrace{51...15}_{2k+1}\alpha_1\alpha_2...\alpha_k...},\ \alpha_j \in V_1 = \{0, 2\}\},$$

причому $E^{(1)}_{2k} \overset{n_1}{\sim} E_0$, $E^{(1)}_{2k+1} \overset{n_1}{\sim} E_0^1$ з коефіцієнтом подібності $n_1 = q_5^k q_1^k$.

Оскільки кожна цифра Q_7-зображення точок, що входять до множин E_0 або E_0^1, має по 2 альтернативи, то E_0 і E_0^1 мають потужність континууму, а отже, таку потужність має і множина $f^{-1}(y_0)$. $\square$

Наслідок 10. *Якщо* $y_0 = \Delta^{Q_7}_{\underbrace{2....2}_{m_1}...\delta_{m_1+1}...\delta_{m_1+k}\underbrace{2...2}_{m_2}...\delta_{m_1+m_2+k+1}...}$, *то множина* $f^{-1}(y_0)$ *складається з* 3^{m_1} *точок.*

Література

[1] *Albeverio S., Baranovskyi O., Kondratiev Yu., Pratsiovytyi M.* On one class of functions related to Ostrogradsky series and containing singular and nowhere monotonic functions // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. – 2013. – № 15. – С. 35-55.

[2] *Peter R. Massopust.* Fractal functions, fractal surfaces, and wavelets. – Academic Press; 1 edition (January 18, 1995), 383 p.

[3] *Pratsiovytyi M., Vasylenko N.* Fractal properties of functions defined in terms of Q-representation // Int. Journal of Math. Analysis, Vol. 7, 2013. – № 64. – P. 3155-3169.

[4] *Pratsovytyi M., Makarchuk O., Skrypnyk S.* Rational and algebraic Q_2-representation of real numbers // Šiauliai Math. Semin. – 2015. – Vol. 10 (18). – P. 199-211.

[5] *Schweiger F.* Ergodic theory of fibred systems and metric number theory. – Oxford: Clarendon Press. – 1995. – 320 p.

[6] *Замрій І. В., Працьовитий М. В.* Сингулярність інверсора цифр Q_3 – зображення дробової частини дійсного числа, його фрактальні та інтегральні властивості // Нелінійні коливання. Том 18, № 1. – Інститут математики НАН України. – 2015 р. – С. 55-70.

[7] *Калашніков А. В., Працьовитий М. В.* Сингулярність функцій однопараметричного класу, який містить функцію Мінковського // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — К.: НПУ ім. М. П. Драгоманова. – 2011. – №12. – P. 59-65.

[8] *Кац М.* Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел. – М.: Изд. иностр. лит. – 1963. – 156 с.

[9] *Климчук С. О., Макарчук О. П., Працьовитий М. В.* Частота цифри у зображенні числа і його асимптотичне середнє значення цифр // Укр. мат. журн. – 2014. – №3. – С. 302-310.

[10] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова. – 1998. – 296 с.

[11] *Працьовитий М. В.* Ніде не монотонні сингулярні функції // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. – 2011. – № 12. – С. 24-36.

[12] *Працьовитий М. В., Замрій І. В.* Інверсор цифр Q_3 – зображення дробової частини дійсного числа як розв'язок системи трьох функціональних рівнянь // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. – 2013, № 15. – С. 156-167.

[13] *Працьовитий М. В., Замрій І. В.* Неперервні функції, які зберігають цифру 1 Q_3-зображення числа // Буковинський математичний журнал. – Т. 3, № 3-4. – Чернівці: Чернівецький національний університет. – 2015. – С. 142-159.

[14] *Працьовитий М. В., Калашніков А. В.* Самоафінні сингулярні та ніде не монотонні функції, пов'язані з Q-зображенням дійсних чисел // Укр. Мат. Жур. – 2013. – Т. 65, № 3. – С. 405-417.

[15] *Працьовитий М. В., Калашніков А. В.* Про один клас неперервних функцій зі складною локальною будовою, більшість з яких сингулярні або недиференційовні // Труды ИПММ НАН Украины. – 2011. – Том 23. – С. 180-191.

[16] *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. – К.: Наукова думка. – 1992. – 208 с.