Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2017, т. 14, № 4, 137–146

УДК 517.5

С. П. Ратушняк

Інститут математики НАН України, Київ;
ratush404@gmail.com

Взаємозв'язки двосимвольного та чотирисимвольного Q-зображень дробової частини дійсного числа

We consider a Q_2-representation of a fractional part of a real number. This is a one-parameter generalization of a classic binary representation. For a given Q_2-expansion and corresponding representation, induced four-symbol Q_4-representation is introduced. The conditions when the four-symbol Q_4-representation is induced by a two-symbol representation as well as the conditions for the two-symbol conversion of the four-symbol Q_4-representation to be a Q_2-representation are found. A class of singular functions is constructed by simple conversion of a four-symbol Q_4-representation to a two-symbol Q_2-representation.
Key words: Q_s-representation of a real number, classic binary representation, quaternary representation, singular function.

Для заданого Q_2-представлення (і до нього відповідного зображення) дробової частини дійсного числа, що є однопараметричним узагальненням класичного двійкового представлення, вводиться індуковане чотирисимвольне Q_4-зображення. Знайдено умови, за яких чоторисимвольне Q_4-зображення є індукованим двосимвольним, а також умови, коли двосимвольне перекодування чотирисимвольного Q_4-зображення є Q_2-зображенням. Виявлено клас сингулярних функцій, які отримуються завдяки простому перекодуванню чотирисимвольного Q_4-зображення на двосимвольне Q_2-зображення.
Ключові слова: Q_s-зображення, двійкове зображення чисел, четвіркове зображення чисел, сингулярна функція.

Вступ

Нагадаємо, що *кодуванням* дійсних чисел множини $D = \langle a; b\rangle$ засобами алфавіту A називається відповідність між множинами D і $L = A \times A \times A \times \ldots$, при якій кожному числу $x \in D$ відповідає принаймні один елемент множини L. Інакше кажучи, *кодуванням* чисел множини D засобами алфавіту A називається сюр'єктивне відображення $f : L \to D$. При цьому множина

$$\Delta^L_{c_1c_2\ldots c_m} = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) : \ a_i = c_i \in A, \ i = m\}$$

називається *циліндром рангу m із основою* $c_1c_2 \ldots c_m$ у просторі L послідовностей алфавіту.

Образ циліндра $\Delta^L_{c_1c_2\ldots c_m}$ при відображенні f

$$\Delta^f_{c_1c_2\ldots c_m} = f\left(\Delta^L_{c_1c_2\ldots c_m}\right)$$

називається циліндром $\Delta^f_{c_1c_2\ldots c_m}$ рангу m із основою $c_1c_2 \ldots c_m$.

Сама послідовність $(\alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots) \in L$, яка відповідає числу x, називається його *f-зображенням (або f-кодом), а* α_n — n-ою цифрою (або символом) цього зображення.

Якщо кожен циліндр є проміжком, то кодування називається *неперервним*.

Кажуть, що зображення (кодування) має *нульову надлишковість*, якщо кожне число має не більш, аніж два зображення, причому множина чисел, що мають два зображення, є не більш, як зліченною.

Системою числення (яка обслуговує множину дійсних чисел) називається сукупність засобів для представлення=подання (математичного виражения), зображення (кодування, скороченого, формального запису), найменування дійсних чисел, їх ідентифікації та порівняння, а також побудови арифметики. Ця сукупність містить: модель числа у формі математичного виразу (ряду, нескінченного добутку, ланцюгового дробу тощо); алфавіт — набір цифр (символів, знаків) для формального (скороченого) запису представлень числа математичним виразом.

1. Постановка задачі

Так зване Q_2-зображення дробової частини дійсного числа визначається одним параметром $q_0 \in (0;1)$. Воно є двосимвольним самоподібним кодуванням чисел з нульовою надлишковістю, що узагальнює класичну двійкову систему і збігається з нею при $q_0 = \frac{1}{2}$. В технічному сенсі двосимвольні системи кодування чисел мають суттєві переваги. Такий органічний зв'язок двійкової системи з системою числення з основою 2^k легко переноситься на Q_2 і Q_s-зображення при $s = 2^k$. Цьому взаємозв'язу присвячена наша робота.

Нехай $2 \leq s$ — задане натуральне число, $A_s \equiv \{0, 1, ..., s-1\}$, $\overline{q} = (q_0, q_1, ..., q_{s-1})$ — стохастичний вектор з додатними координатами. Означення Q_s–зображення числа $x \in [0;1]$ породжує таке твердження.

Теорема 1. *[4] Для будь-якого дійсного числа $x \in [0;1]$ існує* *послідовність* $(\alpha_n) \in L = A_s \times A_s \times ... \times A_s \times ...$, *така, що*

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\beta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j} \right) = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k...}, \tag{1}$$

де $\beta_0 \equiv 0$, $\beta_{\alpha_k} \equiv \sum\limits_{i=0}^{\alpha_k - 1} q_i$.

Теорема 2. *Якщо* $\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}$ *—* Q_2*-зображення числа* x *(яке визначається одним параметром* $q_0 \in (0;1)$*),то число* x *має* Q'_4*-зображенням* $\Delta^{Q'_4}_{a_1a_2...a_n...}$, *де* $q'_0 = q_0^2$, $q'_1 = q_0q_1$, $q'_2 = q_0q_1$, $q'_3 = q_1^2$ *і*

$$a_n = \varphi(\alpha_{2n-1}, \alpha_{2n}) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } \alpha_{2n-1}, \alpha_{2n} = 00, \\ 1, \text{ якщо } \alpha_{2n-1}, \alpha_{2n} = 01, \\ 2, \text{ якщо } \alpha_{2n-1}, \alpha_{2n} = 10, \\ 3, \text{ якщо } \alpha_{2n-1}, \alpha_{2n} = 11. \end{cases} \tag{2}$$

Доведення. Справді, для довільного $x \in [0;1]$

$$\begin{aligned} x &= \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...} = \\ &= \beta_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_2}q_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_3}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2} + \beta_{\alpha_4}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2}q_{\alpha_3} + ... = \\ &= (\beta_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_2}q_{\alpha_1}) + (\beta_{\alpha_3}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2} + \beta_{\alpha_4}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2}q_{\alpha_3}) + ... = \\ &= (\beta_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_2}q_{\alpha_1}) + q_{\alpha_1}q_{\alpha_2}\left(\beta_{\alpha_3} + \beta_{\alpha_4}q_{\alpha_3}\right) + ... = \\ &= \beta'_{a_1} + \beta'_{a_2}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2} + \beta'_{a_3}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2}q_{\alpha_3}q_{\alpha_4} + ... = \\ &= \beta'_{a_1} + \beta'_{a_2}q'_{a_1} + \beta'_{a_3}q'_{a_1}q'_{a_2} + ... = \Delta^{Q'_4}_{a_1a_2...a_n...}, \end{aligned}$$

де $q'_{a_n} = q_{\alpha_{2n-1}}q_{\alpha_{2n}} = \begin{cases} q_0^2, \text{ якщо } \alpha_{2n-1}\alpha_{2n} = 00, \\ q_0q_1, \text{ якщо } \alpha_{2n-1}\alpha_{2n} = 01, \\ q_0q_1, \text{ якщо } \alpha_{2n-1}\alpha_{2n} = 10, \\ q_1^2, \text{ якщо } \alpha_{2n-1}\alpha_{2n} = 11, \end{cases}$

$$\beta'_{a_n} = \beta_{\alpha_{2n-1}} + \beta_{\alpha_{2n}} q_{\alpha_{2n-1}}$$

$$\beta'_{a_n} = \begin{cases} \beta_0 + q_0\beta_0 = 0 \text{ при } \alpha_{2n-1}\alpha_{2n} = 00, \\ \beta_0 + q_0\beta_1 = q_0^2 \text{ при } \alpha_{2n-1}\alpha_{2n} = 01, \\ \beta_1 + q_1\beta_0 = q_0 \text{ при } \alpha_{2n-1}\alpha_{2n} = 10, \\ \beta_1 + q_1\beta_1 = q_0 + q_0q_1 \text{ при } \alpha_{2n-1}\alpha_{2n} = 11. \end{cases}$$

□

Означення 1. *Q'_4-зображення числа, утвореного внаслідок перекодування Q_2-зображення за схемою (2), називатимемо Q_4-зображенням, індукованим Q_2-зображенням.*

Зауваження 1. *Якщо Q_2-зображення є звичайним двійковим зображенням, то Q_4-зображенням, ним індукованим, є традиційне четвіркове зображення. Справді,*

$$\begin{aligned} x &= \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \frac{\alpha_3}{2^3} + \frac{\alpha_4}{2^4} + ... + \frac{\alpha_{2k-1}}{2^{2k-1}} + \frac{\alpha_{2k}}{2^{2k}} + ... \\ &= \frac{2\alpha_1 + \alpha_2}{4} + \frac{2\alpha_3 + \alpha_4}{4^2} + ... + \frac{2\alpha_{2k-1} + \alpha_{2k}}{4^k} + ... \, . \end{aligned}$$

Геометричний зв'язок цих зображень є добре відомим [4].

2. Сингулярні функції, породжені перекодуванням чотирисимвольного Q-зображення числа

Нехай $x = \Delta^{Q'_4}_{a_1a_2...a_n...}$ — Q_4-зображення числа $x \in [0;1]$. Виконаємо його перекодування за допомогою двосимвольного алфавіту заміною цифри 0 на пару цифр 00, цифри 1 — на пару 01, цифри 2 — на пару 10, цифри 3 — на пару 11. Отримали двосимвольне зображення $\Delta_{b_1b_2...b_n...}$ того самого числа x. Природним є запитання: чи є це зображення деяким Q_2-зображенням? Зрозуміло, що коли Q_4-зображення є індукованим деяким Q_2-зображенням, то це буде так. У загальній постановці, суть задачі полягає ось у чому: за яких умов на стохастичний вектор $\overline{q}$ матимемо ствердну відповідь?

Нехай $Q_4 = (q_0, q_1, q_3, q_4) = \overline{q}$, $Q_2 = (g_0, g_1) = \overline{g}$ — задані додатні стохастичні вектори. Розглядається функція

$$f(x) = f(\Delta^{Q_4}_{a_1(x)a_2(x)\dots a_n(x)\dots}) = \Delta^{Q_2}_{\varphi(a_1)\varphi(a_2)\dots\varphi(a_n)\dots} = \tag{3}$$

$$= \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{2n-1}\alpha_{2n}\dots}, \tag{4}$$

де $\varphi(a_n) = \begin{cases} 00, & \text{при } a_n = 0, \\ 01, & \text{при } a_n = 1, \\ 10, & \text{при } a_n = 2, \\ 11, & \text{при } a_n = 3. \end{cases}$

Теорема 3. *Функція f є коректно означеною рівністю (3), неперервною і строго зростаючою.*

Доведення. 1. Коректність означення могла би порушитись у Q_4–раціональних точках, тобто в точках виду

$$\Delta^{Q_4}_{c_1c_2\dots c_{m-1}c_m(0)} = \Delta^{Q_4}_{c_1c_2\dots c_{m-1}[c_m-1](3)},$$

а саме: коли «значення» функції від двох різних зображень одного й того самого аргументу не збігались би.

Розглянемо різницю

$$f(\Delta^{Q_4}_{c_1c_2\dots c_{m-1}c_m(0)}) - f(\Delta^{Q_4}_{c_1c_2\dots c_{m-1}[c_m-1](3)}) =$$
$$= \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{2m-3}\alpha_{2m-2}\alpha_{2m-1}\alpha_{2m}(0)} - \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{2m-3}\alpha_{2m-2}\alpha'_{2m-1}\alpha'_{2m}(1)} =$$
$$= (\prod_{i=1}^{2m-2} g_{\alpha_i})(\beta_{\alpha_{2m-1}} + \beta_{\alpha_{2m}} g_{\alpha_{2m-1}} + \beta_0 g_{\alpha_{2m-1}} g_{\alpha_{2m}} + \dots$$
$$- \beta_{\alpha'_{2m-1}} - \beta_{\alpha'_{2m}} g_{\alpha'_{2m-1}} - g_{\alpha'_{2m-1}} g_{\alpha'_{2m}} [\beta_1 + \beta_1 g_1 + \dots]) =$$
$$= A \prod_{i=1}^{2m-2} g_{\alpha_i},$$

$A = \beta_{\alpha_{2m-1}} + \beta_{\alpha_{2m}} g_{\alpha_{2m-1}} - \beta_{\alpha'_{2m-1}} - \beta_{\alpha'_{2m}} g_{\alpha'_{2m-1}} - g_{\alpha'_{2m-1}} g_{\alpha'_{2m}}$.

Оскільки $c_m \neq 0$, то можливі такі випадки.

Якщо $c_m = 1$, то $A = \beta_1 g_0 - g_0 g_0 = 0$.

Якщо $c_m = 2$, то $A = \beta_1 - \beta_1 g_0 - g_0 g_1 = 0$.

Якщо $c_m = 3$, то $A = \beta_1 + \beta_1 g_0 - \beta_1 - g_0 g_1 = 0$.

Таким чином,

$$f(\Delta^{Q_4}_{c_1 c_2 \ldots c_{m-1} c_m (0)}) = f(\Delta^{Q_4}_{c_1 c_2 \ldots c_{m-1} [c_m - 1](3)}).$$

А тому функція f коректно означена і в разі потреби ми можемо використовувати «зручне» для себе зображення аргументу.

2. Для доведення неперервності функції в будь–якій точці $x_0 \in [0;1]$ покажемо, що $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$. Для цього окремо розглянемо випадки, коли x_0 є Q_4–ірраціональним числом і коли воно є Q_4–раціональним числом.

У першому випадку умова $x \to x_0$ рівносильна $m \to \infty$, де m таке натуральне число, що $a_m(x_0) \neq a_m(x)$, але $a_j(x_0) = a_j(x)$ при $j < m$.

Нехай $x = \Delta^{Q_4}_{a_1 a_2 \ldots a_{m-1} a'_m \ldots}$ і $x_0 = \Delta^{Q_4}_{a_1 a_2 \ldots a_{m-1} a_m \ldots}$.

Розглянемо модуль різниці

$$\begin{aligned}
\rho \equiv |f(x) - f(x_0)| &= \\
&= |f(\Delta^{Q_4}_{a_1 a_2 \ldots a_{m-1} a'_m \ldots}) - f(\Delta^{Q_4}_{a_1 a_2 \ldots a_{m-1} a_m \ldots})| = \\
&= |\Delta^{Q_2}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha'_{2m-1} \alpha'_{2m} \ldots} - \Delta^{Q_2}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{2m-1} \alpha_{2m} \ldots}| = \\
&= \prod_{i=1}^{2m-2} g_{\alpha_i} \cdot |\Delta^{Q_2}_{\alpha_{2m-1}(x) \alpha_{2m}(x) \ldots} - \Delta^{Q_2}_{\alpha_{2m-1}(x_0) \alpha_{2m}(x_0) \ldots}| = \\
&= |A| \prod_{i=1}^{2m-2} g_{\alpha_i} \leq \prod_{i=1}^{2m-2} g_{\alpha_i} \leq \\
&\leq \prod_{i=1}^{2m-2} max\{g_0, g_1\} \to 0 (m \to \infty),
\end{aligned}$$

оскільки

$|A| = |(\beta_{\alpha'_{2m-1}} + \beta_{\alpha'_{2m}} g_{\alpha'_{2m-1}} + \ldots - \beta_{\alpha_{2m-1}} - \beta_{\alpha_{2m}} g_{\alpha_{2m-1}} - \ldots)| \leq 1.$

Якщо x_0 є Q_4-раціональною точкою, а саме: $x_0 = \Delta^{Q_4}_{a_1a_2\ldots a_k(0)} = \Delta^{Q_4}_{a_1a_2\ldots[a_k-1](3)}$, то для доведення неперервності функції f в цій точці достатньо довести її неперервність зліва і справа в точці x_0. У першому випадку можна скористатись попередньою схемою міркувань для зображення $x_0 = \Delta^{Q_4}_{a_1a_2\ldots[a_k-1](3)}$, а в другому — для зображення $x_0 = \Delta^{Q_4}_{a_1a_2\ldots a_k(0)}$.

3. Щоб довести, що функція f є строго зростаючою, скористаємося означенням, тобто покажемо, що з $x_1 < x_2$ випливає нерівність $f(x_2) - f(x_1) > 0$.

Нехай $x_1 = \Delta^{Q_4}_{a_1a_2\ldots a_m\ldots}$, $x_2 = \Delta^{Q_4}_{a_1a_2\ldots a'_m\ldots}$. Оскільки $x_1 < x_2$, то існує $m \in N$, таке, що $a_m(x_1) < a_m(x_2)$, але $a_j(x_1) = a_j(x_2)$ при $j < m$. Тоді $\alpha_j(y_1) = \alpha_j(y_2)$, $j = \overline{1, 2m-2}$, і

$$\alpha_{2m-1}(y_1)\alpha_{2m}(y_1) \neq \alpha_{2m-1}(y_2)\alpha_{2m}(y_2),$$

а отже, можливі лише два випадки:

$$\begin{cases} \alpha_{2m-1}(y_1) = 0, \\ \alpha_{2m-1}(y_2) = 1, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \alpha_{2m-1}(y_1) = \alpha_{2m-1}(y_2), \\ \alpha_{2m}(y_1) = 0, \\ \alpha_{2m}(y_2) = 1. \end{cases}$$

Тоді

$$f(x_2) - f(x_1) = A \prod_{i=1}^{2m-2} g_{\alpha_i},$$

$$A = \Delta^{Q_2}_{\alpha_{2m-1}(y_2)\alpha_{2m}(y_2)\ldots} - \Delta^{Q_2}_{\alpha_{2m-1}(y_1)\alpha_{2m}(y_1)\ldots}.$$

Зауважимо, що при $x_1 \neq x_2$ ситуація, коли виконується система рівностей

$$\begin{cases} a'_m = c \neq 0, \\ a_m = c - 1, \\ a'_{m+j} = 0, \\ a_{m+j} = 3, \end{cases}$$

неможлива. Тому в першому випадку

$A > g_0 - (q_0^2 + q_0^2 q_1 + q_0^2 q_1^2 + ...) = 0$, у другому випадку $A > g_{\alpha_{2m-1}}(y_2)(g_0 - (g_0^2 + g_0^2 g_1 + g_0^2 g_1^2 + ...)) = 0$.

Отже, $f(x_2) - f(x_1) > 0$, тобто f строго зростає. □

Теорема 4. *Функція f є лінійною, а саме: $f(x) = x$, якщо*

$$\begin{cases} q_0 = g_0^2, \\ q_1 = g_0 g_1 = q_2, \\ q_3 = q_1^2, \end{cases} \tag{5}$$

і сингулярною в решті випадків.

Доведення. 1. При виконані умов (5) індуковане Q_4'-зображення Q_2-зображенням збігається з заданим Q_4-зображенням (оскільки $q_0' = g_0^2 = q_0$, $q_1' = g_0 g_1 = q_1$, $q_2' = g_0 g_1 = q_2$, $q_3' = g_1^2 = q_3$), тому

$$f(x) = f(\Delta^{Q_4}_{a_1(x)a_2(x)...a_n(x)...}) = \Delta^{Q_2}_{(\alpha_1\alpha_2)(\alpha_3\alpha_4)...(\alpha_{2k-1}\alpha_{2k})...} = \\ = \Delta^{Q_4'}_{a_1 a_2 ... a_n ...} = x.$$

2. Припустимо, що умова (5) не виконується. Оскільки

$$f(\Delta^{Q_4}_{a_1 a_2 ... a_n ...}) = \Delta^{Q_2'}_{(\alpha_1\alpha_2)(\alpha_3\alpha_4)...(\alpha_{2k-1}\alpha_{2k})...} = \Delta^{Q_4'}_{a_1 a_2 ... a_n ...},$$

то f є функція розподілу випадкової величини $\xi = \Delta^{Q_4}_{\tau_1\tau_2...\tau_n}$ цифри τ_n, Q_4–зображення якої є незалежними однаково розподіленими випадковими величинами, причому $P\{\tau_n = i\} = p_i = q_i'$, $i = 0, 1, 2, 3$.

Добре відомо, що розподіл випадкової величини ξ є рівномірним, якщо $p_i = q_i$, $i = 0, 1, 2, 3$ і сингулярним коли існує $p_i \neq q_i$. Тому у випадку коли умови (5) не виконуються, $F_\xi(x) = f(x)$ є сингулярною. [4] □

Література

[1] *Працьовитий М. В.* Геометрія класичного двійкового зображення дійсних чисел. – Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. – 2012. – 68 с.

[2] *Працьовитий М. В.* Двосимвольні системи зображення (кодування) дійсних чисел // Студентські фізико–математичні етюди. – Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова. – 2010. – № 9. – С. 6-26.

[3] *Працевитый Н. В.* Случайные величины с независимыми Q_2-символами // Асимптотические методы в исследовании стохастических моделей. — Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1987. – С. 92–102.

[4] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова. – 1998. – 296 с.

[5] *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. – Київ: Наукова думка. – 1992. – 208 с.