Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2017, т. 14, № 4, 111–124

УДК 517.5

М. В. Працьовитий, О. В. Свинчук

НПУ імені М.П. Драгоманова, Київ;
prats4444@gmail.com, 7011990@ukr.net

Структура і спектральні властивості розподілу значень немонотонної функції канторівського типу

Let f be a continuous function defined by equality

$$f\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k(x)}{5^k}\right)=\delta_{\alpha_1(x)1}+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\delta_{\alpha_k(x)k}\prod_{j=1}^{k-1}g_{\alpha_j(x)j}\right),$$

where (ε_n) is a sequence of positive real numbers, $0\le\varepsilon_n\le 1$,
$g_{0n}=g_{4n}=\dfrac{2+\varepsilon_n}{4}$, $g_{1n}=g_{3n}=\dfrac{-\varepsilon_n}{4}$, $g_{2n}=0$, $n=1,2,\ldots$,
$\delta_{0n}=0$, $\delta_{1n}=\dfrac{2+\varepsilon_n}{4}$, $\delta_{2n}=\dfrac{2}{4}=\delta_{3n}$, $\delta_{4n}=\dfrac{2-\varepsilon_n}{4}$,
$\alpha_k(x)$ is a quinary digit of number x.
We study Lebesgue structure and spectral properties of distribution of random variable $Y=f(X)$ for a given distribution of random variable X with independent quinary digits.
Keywords: s-adic numeral system, continuous function of Cantor type, discrete probability distribution, continuous probability distribution, singular probability distribution, absolutely continuous probability distribution, mixture of probability distributions, Lebesgue type of probability distribution, structure of probability distribution, point spectrum of probability distribution.

Для неперервної функції f, означеної рівністю

$$f\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k(x)}{5^k}\right)=\delta_{\alpha_1(x)1}+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\delta_{\alpha_k(x)k}\prod_{j=1}^{k-1}g_{\alpha_j(x)j}\right),$$

де (ε_n) — послідовність додатних дійсних чисел, $0\leq\varepsilon_n\leq 1$,
$g_{0n}=g_{4n}=\dfrac{2+\varepsilon_n}{4}$, $g_{1n}=g_{3n}=\dfrac{-\varepsilon_n}{4}$, $g_{2n}=0$, $n=1,2,\ldots$,
$\delta_{0n}=0$, $\delta_{1n}=\dfrac{2+\varepsilon_n}{4}$, $\delta_{2n}=\dfrac{2}{4}=\delta_{3n}$, $\delta_{4n}=\dfrac{2-\varepsilon_n}{4}$,
$\alpha_k(x)$ — k-та п'ятіркова цифра числа x,
досліджується лебегівська структура та спектральні властивості розподілу випадкової величини $Y=f(X)$ при відомому розподілі аргументу як випадкової величини з незалежними п'ятірковими цифрами.

Ключові слова: s-кова система числення, неперервна функція канторівського типу, дискретний розподіл, неперервний розподіл, сингулярний розподіл, абсолютно неперервний розподіл, суміш розподілів, лебегівський тип розподілу, структура розподілу, точковий спектр розподілу.

Вступ

Неперервні функції з фрактальними властивостями і складною локальною тополого-метричною структурою [1, 2, 6, 8 – 10] природнім чином породжують розподіли своїх значень, якщо наперед є відомим розподіл випадкового аргументу [3, 11]. У випадку, коли функція є функцією канторівського типу [4, 5, 7, 14], випадкова величина, що є значенням функції, має загалом нетривіальну дискретну компоненту, тобто її розподіл має атоми. В такій ситуації природним чином виникають суміші дискретних та неперервних розподілів, а їх неперервні складові часто є сумішшю абсолютно неперервного та сингулярного розподілів (це виникає переважно тоді, коли функція є немонотонною, а точніше, коли вона не має проміжків монотонності, крім проміжків сталості). Саме такій функції і розподілу її значень присвячена ця робота.

1. Основний об'єкт

Нехай $A_5 \equiv \{0, 1, 2, 3, 4\}$ — алфавіт п'ятіркової системи числення, $L \equiv A_5 \times A_5 \times \ldots \times A_5 \times \ldots$ — простір послідовностей алфавіту, $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k(x)}{5^k} \equiv \Delta^5_{\alpha_1 \ldots \alpha_k \ldots}$— п'ятіркове зображення числа $x \in [0, 1]$, $(\alpha_k) \in L$.

Нехай (ε_n) — задана послідовність додатних дійсних чисел, причому $0 \leq \varepsilon_n \leq 1$; $(\overline{g_n}) = (g_{0n}, g_{1n}, g_{2n}, g_{3n}, g_{4n})$ — послідовність векторів, така, що: $g_{0n} = g_{4n} = \dfrac{2 + \varepsilon_n}{4}$, $g_{1n} = g_{3n} = \dfrac{-\varepsilon_n}{4}$, $g_{2n} = 0$, $n = 1, 2, \ldots$.

Розглядається функція f, означена рівністю

$$f(x) = \delta_{\alpha_1(x)1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\delta_{\alpha_k(x)k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)j} \right) \equiv \Delta^G_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k \ldots}, \tag{1}$$

де $\delta_{0n} = 0$, $\delta_{1n} = \dfrac{2 + \varepsilon_n}{4}$, $\delta_{2n} = \dfrac{2}{4} = \delta_{3n}$, $\delta_{4n} = \dfrac{2 - \varepsilon_n}{4}$, тобто

$$\delta_{[i+1]n} = \delta_{in} + g_{in} = \sum_{j=0}^{i} g_{jn}, \ n \in N.$$

Функція f належить до класу функцій, які вивчались у роботах [12], [13], [14], де обґрунтовано коректність даного означення функції, доведено її неперервність на $[0; 1]$ і описано деякі інші властивості.

Теорема 1. *[13] Функція $f(x)$ є:*

1) сталою на кожному циліндрі виду $\Delta^5_{c_1 c_2 \ldots c_m 2}$ і крім цього на циліндрах $\Delta^5_{c_1 c_2 \ldots c_{n-1} 1}$ і $\Delta^5_{c_1 c_2 \ldots c_{n-1} 3}$, якщо $\varepsilon_n = 0$ для будь-якого $n \in N$;

2) монотонною — тоді і тільки тоді, коли $\varepsilon_n = 0$ *для будь-якого* $n \in N$*;*

3) сингулярною функцією канторівського типу, якщо $\varepsilon_n = 1$*, множиною несталості якої є множина канторівського типу* $C[5; \{0,1,3,4\}] = \{x : x \in [0,1], \alpha_n(x) \in \{0,1,3,4\}\}$ *з фрактальною розмірністю Гаусдорфа-Безиковича* $\log_5 4$.

Вона набуває всіх значень із відрізка $[0,1]$*, не має проміжків монотонності, крім проміжків сталості, якщо нерівність* $\varepsilon_n \neq 0$ *виконується для нескінченної множини значень* n*, і має графік, симетричнй відносно точки* $C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Зауваження. Далі ми розглядаємо випадок, коли $\varepsilon_n = 1$.

Цікавлячись розподілом значень функції f при відомому розподілі аргументу як випадкової величини $X = \Delta^5_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_n\ldots}$ з незалежними п'ятірковими цифрами, нагадаємо його властивості.

Теорема 2. *[6] Якщо* (τ_n) *— послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень* $0,1,2,3,4$ *з ймовірностями* $p_{0n}, p_{1n}, p_{2n}, p_{3n}, p_{4n}$*,* $n \in N$ *відповідно, то випадкова величина* X *має чистий лебегівський тип розподілу, причому:*

1. *чисто дискретний — тоді і тільки тоді, коли*

$$M \equiv \prod_{k=1}^{\infty} \max_i \{p_{ik}\} > 0;$$

2. *чисто абсолютно неперервний — тоді і тільки тоді, коли*

$$L \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{4} (1 - 5p_{ik})^2 < \infty;$$

3. *чисто сингулярно неперервний — тоді і тільки, коли* $M = 0$ *і* $L = \infty$.

2. Суміші розподілів

Лема 3. *Має місце рівність* $f(\Delta^5_{c_1c_2\ldots c_m2}) = \Delta^G_{c_1c_2\ldots c_m2(0)} = y_0$.

Доведення. Справді, якщо $x \in \Delta^5_{c_1\ldots c_m2}$, тобто $x = \Delta^5_{c_1\ldots c_m2\alpha_{m+2}\ldots}$, то

$$f(x) = \delta_{c_1} + \ldots + \delta_{c_m}\prod_{i=1}^{m-1} g_{c_i} + \delta_2\prod_{i=1}^{m} g_{c_i} + 0 = \Delta^{G_2}_{c_1c_2\ldots c_m2(0)} = y_0,$$

причому значення функції не залежить від цифр $\alpha_{m+2}, \alpha_{m+3}\ldots$.

Якщо G-зображення числа $y \in E(f)$ використовує лише цифри 0 і 1, то його називатимемо G_2-зображенням.

Теорема 4. *Образом множини* $C_1 \equiv C[5;\{0,1\}]$ *при відображенні* f *є відрізок* $\left[0, \frac{3}{4}\right]$, *зліченна множина точок якого має рівно два* G_2*-зображення, а саме:*

$$\Delta^{G_2}_{c_1c_2\ldots c_m01(0)} = \Delta^{G_2}_{c_1c_2\ldots c_m11(0)}, \tag{2}$$

а решта точок мають єдине G_2*-зображення.*

Доведення. Спочатку доведемо рівність (2).

Нехай $\varphi_m \equiv \delta_{c_1} + \sum\limits_{k=2}^{m}\left(\delta_{c_k}\prod\limits_{j=1}^{k-1} g_{c_j}\right)$. Розглянемо різницю:

$$\Delta^{G_2}_{c_1c_2\ldots c_m01(0)} - \Delta^{G_2}_{c_1c_2\ldots c_m11(0)} =$$

$$= \varphi_m + \delta_1 g_0\prod_{j=1}^{m} g_{c_j} - \varphi_m - \delta_1\prod_{j=1}^{m} g_{c_j} - \delta_1 g_1\prod_{j=1}^{m} g_{c_j} =$$

$$= [\delta_1 g_0 - \delta_1 - \delta_1 g_1]\left(\prod_{j=1}^{m} g_{c_j}\right) = \delta_1[g_0 - 1 - g_1]\left(\prod_{j=1}^{m} g_{c_j}\right) = 0.$$

Отже, рівність (2) є правильною.

Нехай $E = f(C[5;\{0,1\}])$. Доведемо, що $E = \left[0, \frac{3}{4}\right]$. Якщо $x \in C_1$, тобто $x = \Delta^5_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$, де $\alpha_n \in \{0,1\}$, то

$$0 < f(x) = \delta_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\delta_{\alpha_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)} \right) \le g_0 = \frac{3}{4}.$$

Отже, $E \subset \left[0, \frac{3}{4}\right]$.

Означимо циліндричний відрізок рангу m із основою $c_1 c_2 \ldots c_m$ рівністю

$$\Delta^*_{c_1 c_2 \ldots c_m} = \left[\inf \Delta^{G_2}_{c_1 c_2 \ldots c_m}; \sup \Delta^{G_2}_{c_1 c_2 \ldots c_m}\right], \text{ де } c_i \in \{0, 1\}.$$

Якщо $\prod\limits_{i=1}^{m} g_{c_i} \equiv D$, то легко помітити, що

$$\inf \Delta^*_{c_1 c_2 \ldots c_m} = \begin{cases} \Delta^*_{c_1 c_2 \ldots c_m (0)}, \text{якщо } D > 0, \\ \Delta^*_{c_1 c_2 \ldots c_m 1(0)}, \text{якщо } D < 0, \end{cases}$$

$$\sup \Delta^*_{c_1 c_2 \ldots c_m} = \begin{cases} \Delta^*_{c_1 c_2 \ldots c_m 1(0)}, \text{якщо } D > 0, \\ \Delta^*_{c_1 c_2 \ldots c_m (0)}, \text{якщо } D < 0. \end{cases}$$

Доведемо, що для будь-якого $m \in N$

$$\left[0, \frac{3}{4}\right] = \Delta^*_0 \cup \Delta^*_1 = (\Delta^*_{00} \cup \Delta^*_{01}) \cup (\Delta^*_{11} \cup \Delta^*_{10}) = \ldots =$$

$$= \bigcup_{c_1=0}^{1} \bigcup_{c_2=0}^{1} \ldots \bigcup_{c_m=0}^{1} \Delta^*_{c_1 c_2 \ldots c_m},$$

причому ці формально різні циліндричні відрізки, які входять до об'єднання, не перекриваються (в цьому легко пересвідчитись, наприклад, $\Delta^*_0 = [0; g_0^2]$, $\Delta^*_1 = [g_0^2; g_0]$, $\Delta^*_{00} = [0; g_0^3]$, $\Delta^*_{01} = [g_0^3; g_0^2]$, $\Delta^*_{10} = [g_0(1 + g_0 g_1); g_0]$, $\Delta^*_{11} = [g_0^2; g_0(1 + g_0 g_1)], \ldots$). Проведемо загальні міркування для циліндра $\Delta^*_{c_1 c_2 \ldots c_m}$, де

$$\Delta^*_{c_1 c_2 \ldots c_m} = \Delta^*_{c_1 c_2 \ldots c_m 0} \cup \Delta^*_{c_1 c_2 \ldots c_m 1}.$$

Справді, нехай $D > 0$. Тоді

$$\inf \Delta^*_{c_1c_2\ldots c_m} = \Delta^*_{c_1c_2\ldots c_m(0)} = \inf \Delta^*_{c_1c_2\ldots c_m0(0)},$$
$$\sup \Delta^*_{c_1c_2\ldots c_m0} = \Delta^*_{c_1c_2\ldots c_m01(0)} = \Delta^*_{c_1c_2\ldots c_m11(0)} = \inf \Delta^*_{c_1c_2\ldots c_m1},$$
$$\sup \Delta^*_{c_1c_2\ldots c_m1} = \Delta^*_{c_1c_2\ldots c_m1(0)} = \sup \Delta^*_{c_1c_2\ldots c_m}.$$

Тоді при $D < 0$ маємо

$$\inf \Delta^*_{c_1c_2\ldots c_m} = \Delta^*_{c_1c_2\ldots c_m1(0)} = \inf \Delta^*_{c_1c_2\ldots c_m1},$$
$$\sup \Delta^*_{c_1c_2\ldots c_m1} = \Delta^*_{c_1c_2\ldots c_m11(0)} = \Delta^*_{c_1c_2\ldots c_m01(0)} = \inf \Delta^*_{c_1c_2\ldots c_m0},$$
$$\sup \Delta^*_{c_1c_2\ldots c_m0} = \Delta^*_{c_1c_2\ldots c_m0(0)} = \sup \Delta^*_{c_1c_2\ldots c_m}.$$

Таким чином, згідно з аксіомою Кантора для будь-якої послідовності $(\alpha_n) \in L_2 = A_2 \times A_2 \times \ldots \times A_2 \times \ldots$

$$\varnothing \neq \bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta^*_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m} = x \in \left[0; \frac{3}{4}\right].$$

І навпаки, для будь-якого $x \in \left[0; \frac{3}{4}\right]$ існує $(\alpha_n) \in L_2$ така, що

$$x \in \Delta^*_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m} \ \forall \ m \in N.$$

Тому $E = \left[0, \frac{3}{4}\right]$.

Враховуючи те, що циліндричні відрізки не перекриваються, доходимо висновку, що точки, які не є кінцями циліндричних відрізків, мають єдине G_2-зображення, а кінці циліндрів, окрім точки 0, мають два G_2-зображення. Теорему доведено.

Теорема 5. *Нехай $X = \Delta^5_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_n\ldots}$ — неперервна випадкова величина, цифри (τ_n) п'ятіркового зображення якої є незалежними і мають розподіли $P\{\tau_n = i\} = p_{in}$, $i = \overline{0,4}$, причому $p_{3n} = 0 = p_{4n}$ для будь-якого $n \in N$. Тоді розподіл випадкової величини $Y = f(X)$ є чисто дискретним, якщо*

$$B \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left[p_{2n} \prod_{k=1}^{n-1} (1 - p_{2k}) \right] = 1,$$

і є нетривіальною сумішшю дискретного та неперервного розподілів, коли $0 < B < 1$, *причому:*

1. *сумішшю дискретного і сингулярного, якщо*
$$W = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{4}{3} p'_{0n}\right)^2 + (1 - 4p'_{1n})^2 \right] = \infty,$$
де
$$p'_{0n} = \frac{p_{0n}}{p_{0n} + p_{1n}} \quad \text{і} \quad p'_{1n} = \frac{p_{1n}}{p_{0n} + p_{1n}};$$
2. *сумішшю дискретного і абсолютно неперервного, якщо* $W < \infty$.

Доведення. Завдяки незалежності цифр випадкової величини X маємо
$$P\{Y = f(\Delta^5_{c_1 \ldots c_m 2(0)})\} = P\{X \in \Delta^5_{c_1 \ldots c_m 2}\} \equiv \left(\prod_{i=1}^{m} p_{c_i i} \right) p_{2,m+1}.$$
Тому $y = f(\Delta^5_{c_1 \ldots c_m 2(0)})$ є атомом розподілу Y тоді і тільки тоді, коли
$$p_{c_i i} \neq 0 \ \ \forall\, i = \overline{1, m} \ \text{ і } \ p_{2,m+1} \neq 0.$$

Оскільки розподіл випадкової величини X є неперервним, то $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \max\limits_i \{p_{ik}\} = 0$ і жодна з точок y, G-зображення яких використовує лише цифри 0 та 1, не є атомом розподілу, а тому сумарна маса атомів розподілу Y обчислюється за формулою
$$B = \sum_{n=1}^{\infty} \left[p_{2n} \prod_{k=1}^{n-1} (p_{0k} + p_{1k}) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[p_{2n} \prod_{k=1}^{n-1} (1 - p_{2k}) \right].$$

Очевидно, що остання сума є скінченним числом, причому вона містить скінченну кількість доданків, якщо існує $p_{2k} = 1$ або $p_{2n} = 0$, і нескінченну — у протилежному випадку.

Якщо $p_{0n} = p_{1n} = p_{2n}$ для всіх $n \in N$, то $B = 1$ і розподіл є чисто атомарним (дискретним). Якщо $0 < B < 1$, то, враховуючи теорему Лебега про структуру ймовірнісної міри, доходимо висновку, що розподіл Y, маючи атоми, має й нетривіальну неперервну компоненту, а саме:

$$P_Y(\cdot) = B\mu_d(\cdot) + (1 - B)\mu_c(\cdot),$$

де μ_d — чисто дискретна, μ_c — неперервна ймовірнісні міри. Понад те, μ_c — це розподіл випадкової величини $\nu = \Delta^*_{\nu_1 \dots \nu_n \dots}$, де (ν_n) — послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень 0 і 1 з ймовірностями

$$p'_{0n} = \frac{p_{0n}}{p_{0n} + p_{1n}} \quad \text{і} \quad p'_{0n} = \frac{p_{1n}}{p_{0n} + p_{1n}}$$

відповідно. Тому згідно з теоремою Джессена-Вінтнера [6] розподіл ν є або чисто сингулярним, або чисто абсолютно неперервним, причому абсолютно неперервним, якщо $W < \infty$, і сингулярним, якщо $W = \infty$.

Обґрунтування останнього висновку можна провести аналогічно до того, як це зроблено в роботі [6] для Q_2-зображення, оскільки G_2-зображення є аналітичним самоподібним, як і Q_2-зображення (бієкція між цими зображеннями, яка зберігає міру Лебега і Гаусдорфа-Безиковича, легко встановлюється).

Наслідок. Якщо $p_{0n} = p_{1n} = 0$ для будь-якого $n \in N$, то розподіл випадкової величини $Y = f(X)$ має чисто дискретний розподіл, якщо $B = 1$, і є сумішшю дискретного й неперервного розподілів, якщо $0 < B < 1$.

3. Випадок чистої сингулярності

Теорема 6. *При відображенні f образом множини канторівського типу $C[5; V_n]$, де*

$$V_n = \begin{cases} \{0, 4\}, \textit{якщо } n = 1 (mod\ 3), \\ \{1, 3\}, \textit{якщо } n \neq 1 (mod\ 3), \end{cases}$$

є множина канторівського типу нульової міри Лебега, фрактальна розмірність Гаусдорфа-Безиковича якої дорівнює

$$\alpha_0 = \frac{3}{6 - \log_2 3}.$$

Доведення. Здійснимо перекодування чисел множини $C[5; V_n]$ засобами вісімкового алфавіту $A_8 = \{0, 1, \ldots, 7\}$ заміною трійок послідовних цифр $\alpha_{3k-2}\alpha_{3k-1}\alpha_{3k}$: $031 \to 0$, $033 \to 1$, $011 \to 2$, $013 \to 3$, $431 \to 4$, $433 \to 5$, $411 \to 6$, $413 \to 7$. Це перекодування рівносильне до такого перетворення виразу (1) функції f:

$$y = \rho_{a_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\rho_{a_k} (g_0 g_1^2)^{k-1} \right) = \Delta_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots},$$

де $\rho_i = \delta_{\alpha_{3k-2}} + \delta_{\alpha_{3k-1}} g_{\alpha_{3k-2}} + \delta_{\alpha_{3k}} g_{\alpha_{3k-2}} g_{\alpha_{3k-1}}$, $\alpha_{3k-2}\alpha_{3k-1}\alpha_{3k} \to i$, $i \in A_8$, а саме:

$\rho_0 = g_0^3 + g_0 g_1$, $\rho_4 = g_0 + 2g_1 + g_0^3 + g_0 g_1$,
$\rho_1 = g_0^3 + g_0^2 g_1$, $\rho_5 = g_0 + 2g_1 + g_0^3 + g_0^2 g_1$,
$\rho_2 = g_0^3$, $\rho_6 = g_0 + 2g_1 + g_0^3$,
$\rho_3 = g_0^3 + g_0 g_1^2$, $\rho_7 = g_0 + 2g_1 + g_0^3 + g_0 g_1^2$.

Очевидно, що $\rho_i < \rho_{i+1}$, $i = \overline{0, 7}$.

Якщо $f(C[5; V_n]) = E$, то легко довести, що

$$\min E = \Delta^G_{(031)} = \Delta_{(0)} = \frac{\rho_0}{1 - g_0 g_1^2},$$

$$\max E = \Delta^G_{(413)} = \Delta_{(7)} = \frac{\rho_7}{1 - g_0 g_1^2}.$$

Тоді діаметр

$$d(E) = \max E - \min E = \frac{\rho_7 - \rho_0}{1 - g_0 g_1^2} = \frac{g_0 + g_1 + g_0^3}{1 - g_0 g_1^2} = D.$$

Якщо $x \in C[5; V_n]$, то

$$y = f(x) = \rho_{a_1(x)} + y_1(x) = \rho_{a_1(x)} + g_0 g_1^2 \cdot D,$$

де
$$\frac{g_0 g_1^2 \cdot \rho_0}{1 - g_0 g_1^2} \leq y_1 \leq \frac{g_0 g_1^2 \cdot \rho_7}{1 - g_0 g_1^2}.$$

Якщо
$$\Delta_{c_1 c_2 \ldots c_m} = \{x : x = \Delta_{c_1 c_2 \ldots c_m a_{m+1} a_{m+2}} \ldots\}$$
— циліндр рангу m із основою $c_1 c_2 \ldots c_m$, що відповідає перекодованому зображенню, то
$$\Delta_i = \left[\rho_i + g_0 g_1^2 \cdot \frac{\rho_0}{1 - g_0 g_1^2}; \rho_i + g_0 g_1^2 \cdot \frac{\rho_7}{1 - g_0 g_1^2}\right],\ i = \overline{0,7};$$

$$\Delta_{c_1 \ldots c_m} = \left[A_m + (g_0 g_1^2)^m \cdot \frac{\rho_0}{1 - g_0 g_1^2}; A_m + (g_0 g_1^2)^m \cdot \frac{\rho_7}{1 - g_0 g_1^2}\right],$$
де $A_m = \rho_{c_1} + \rho_{c_2} g_0 g_1^2 + \ldots + \rho_{c_m} (g_0 g_1^2)^{m-1}$.

При цьому
$$d(\Delta_{c_1 \ldots c_m}) = (g_0 g_1^2)^m \cdot D.$$

Циліндри 1-го рангу мають однаковий діаметр $g_0 g_1^2 D$ і є подібними до множини E з коефіцієнтом $k_1 = (g_0 g_1^2)^{-1}$, причому циліндричні відрізки Δ_0, Δ_1, Δ_2, Δ_5, Δ_6, Δ_7 не перетинаються. Циліндричні відрізки Δ_3 і Δ_4 перекриваються, але циліндричні відрізки 2-го рангу, що належать спільній частині, не перекриваються, причому: $\sup \Delta_{41} < \inf \Delta_{36}$, $\inf \Delta_{36} > \inf \Delta_4$, $\sup \Delta_{35} < \inf \Delta_4$, $\sup \Delta_{41} < \sup \Delta_3$, $\inf \Delta_{42} > \sup \Delta_3$. Тоді

$$\begin{aligned} E &= Q_0 \cup Q_1 \cup Q_2 \cup Q_5 \cup Q_6 \cup Q_7 \cup [Q_3 \cup Q_4] = \\ &= Q_0 \cup Q_1 \cup Q_2 \cup Q_5 \cup Q_6 \cup Q_7 \cup \\ &\cup (Q_{30} \cup Q_{31} \cup Q_{32} \cup Q_{35} \cup Q_{36} \cup Q_{37} \cup [Q_{33} \cup Q_{34}]) \cup \\ &\cup (Q_{40} \cup Q_{41} \cup Q_{42} \cup Q_{45} \cup Q_{46} \cup Q_{47} \cup [Q_{43} \cup Q_{44}]) = \ldots, \end{aligned}$$
звідки маємо таку структуру N-самоподібної множини E:

1. $E = \bigcup\limits_{m=0}^{\infty} \left[\bigcup\limits_{3 \neq i \neq 4} \bigcup\limits_{a_m=3}^{4} \ldots \bigcup\limits_{a_2=3}^{4} \bigcup\limits_{a_1=3}^{4} \Delta_{a_1 a_2 \ldots a_m i}\right],$

2. $E \overset{k_i}{\sim} \Delta_{a_1a_2\ldots a_m i}$, $k_i = (g_0 g_1^2)^{m+1}$,

причому відстань між циліндрами, які беруть участь у об'єднанні, є додатною.

Отже, рівняння для визначення СП-розмірності має вигляд:

$$6 \cdot k_1^x + 2 \cdot 6 \cdot k_2^x + 2^2 \cdot 6 \cdot k_3^x + \ldots + 2^{n-1} \cdot 6 \cdot k_n^x + \ldots = 1,$$

$$6 \cdot \left(\frac{3}{4^3}\right)^x + 6 \cdot 2 \cdot \left(\frac{3}{4^3}\right)^{2x} + 6 \cdot 2^2 \cdot \left(\frac{3}{4^3}\right)^{3x} + \ldots = 1.$$

Розв'язок рівняння — це число $x = \alpha_0(E) = \frac{3}{6-\log_2 3} \approx \frac{2}{3}$, що є не лише N-самоподібною розмірністю множини E, а й розмірністю Гаусдорфа-Безиковича.

Оскільки $0 < \alpha_0 < 1$, то міра Лебега даної множини $C[5; V_n]$ дорівню нулю.

Теорема 7. *Якщо розподіл випадкової величини X є неперервним і для будь-якого натурального n мають місце рівності*

$$\begin{cases} p_{1n} = p_{2n} = p_{3n} = 0, p_{0n} + p_{4n} = 1, \text{якщо } n = 1(mod\ 3), \\ p_{0n} = p_{4n} = 0, p_{1n} + p_{2n} + p_{3n} = 1, \text{якщо } n \neq 1(mod\ 3), \end{cases}$$

то випадкова величина $Y = f(X)$ має сингулярний розподіл канторівського типу.

Доведення. Згідно з теоремою 6 спектром випадкової величини Y, тобто множиною точок росту її функції розподілу, є множина канторівського типу $E = f(C[5; V_n])$ з нульовою мірою Лебега. Оскільки розподіл випадкової величини X неперервний, то $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \max\limits_i \{p_{ik}\} = 0$ і жодна з точок y не є атомом розподілу, тому випадкова величина Y має сингулярний розподіл канторівського типу.

Література

[1] *Pratsiovytyi M., Vasylenko N.* Fractal properties of functions defined in terms of Q-representation // International Journal of Math. Analysis. – 2013. – Vol.7. – № 61-67. – P. 3155-3169.

[2] *Pratsiovytyi M., Isaieva T.* Transformations of $(0;1]$ preserving tails of Δ^{μ}-representation of numbers // Algebra and Discrete Mathematics. – 2016. – Vol. 22, № 1. – P. 102-115.

[3] *Працевитый Н. В.* Случайные величины с независимыми Q_2-символами // Асимптотические методы в исследовании стохастических моделей. — Киев: Институт математики АН УССР. – 1987. – С. 92-102.

[4] *Працевитый Н. В.* Непрерывные канторовские проекторы // Методы исследования алгебраических и топологических структур. — Киев: КГПИ. – 1989. – С. 95-105.

[5] *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. – Киев: Наук. думка. – 1992. – 208 с.

[6] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – К.: Видавництво НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. – 296 с.

[7] *Працьовитий М. В.* Фрактальні властивості однієї неперервної ніде не диференційовної функції // Наукові записки НПУ імені М. П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. – 2002. – №3. – С. 327-338.

[8] *Працьовитий М. В.* Ніде не монотонні сингулярні функції // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2011. – № 12. – С. 24-36.

[9] *Працьовитий М. В., Жабровець О. В.* Сім'я неперервних функцій зі складною локальною будовою, які є або сингулярними, або ніде не монотонними // Науковий часопис НПУ

імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. – 2014. – № 16 (1). – С. 228-242.

[10] *Працьовитий М. В., Калашніков А. В.* Самоафінні сингулярні та ніде не монотонні функції, пов'язані з Q-зображенням чисел. // Укр. мат. журнал. – 2013. – Т. 65, № 3. – С. 381-93.

[11] *Працьовитий М. В., Ратушняк С. П.* Розподіл значень однієї фрактальної функції від випадкового аргумента // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізикоматематичні науки. – Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. – 2014. – № 16 (2). – С. 150-160.

[12] *Працьовитий М. В., Свинчук О. В.* Один клас неперервних ніде не монотонних функцій з автомодельними властивостями // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. – 2014. – № 16 (2). – С. 81-93.

[13] *Працьовитий М. В., Свинчук О. В.* Про одну сім'ю неперервних немонотонних сингулярних функцій канторівського типу з фрактальними властивостями // Науковий часопис НПУ імені М П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. – 2015. – № 17. – С. 37-48.

[14] *Працьовитий М. В., Свинчук О. В.* Розподіл значень однієї сингулярної немонотонної функції канторівського типу // Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики: Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2017. – Т. 14, № 2. – С. 110-121.